

Választási rendszerek axiomatikus elmélete

Boros Zoltán

Debreceni Egyetem TTK

Matematikai Intézet

Analízis Tanszék

Matematika Szakkör Megnyitó

2016. szeptember 12.

Interaktív demonstráció: fagylalt preferenciák

- Minta kitöltött szavazólapra:
 - 1 csokoládé
 - 0 karamell
 - 2 rumos meggy
 - 3 vanília
- A leadott szavazat értelmezése:
 - A példabeli szavazó legjobban a vanília, legkevésbé a karamell fagylaltot szereti. A rumos meggyet jobban szereti, mint a csokoládét.

Alkalmazott matematika

**Különféle
társadalom- vagy
természettudományi problémák
matematikai modelljeinek
vizsgálata, axiomatizálása**

- Közgazdaságtan (pl. konzisztens aggregáció)
- Térlátás modellezése
- Játékelmélet
- Választási rendszerek (preferenciák integrálása)
- Populációk létszáma

**Bonyolult számítások
eredményének minél
pontosabb és gyorsabb
meghatározása**

- Égitestek mozgása
- Helymeghatározás (GPS)
- Energetikai folyamatok modellezése
- Folyadékok áramlása
- Idősorok elemzése
- Időjárás előrejelzés

Választás két jelölt közül

- **Szavazók:** véges halmaz (reprezentálható sorszámokkal).
- **Szavazat:** az egyik jelölt (neve).
- **Szavazás:** függvény, amely minden szavazóhoz hozzárendel egy szavazatot.
- **Választási rendszer:** a szavazások halmazán értelmezett függvény, amely minden szavazáshoz hozzárendel egy győztest (vagy a győztesek halmazát).

Egyszerű választási rendszerek

- **Diktatúra:** egy bizonyos szavazó szavazata lesz a végeredmény.
- **Előre meghatározás:** pl. az **A** és **B** jelöltek közül mindenképpen az **A** legyen a győztes, függetlenül a szavazás kimenetelétől.
- **Kisebbségi elv:** az nyer, akire kevesebben szavaznak.
- **Többségi elv:** az nyer, akire többen szavaznak.

Ésszerű elvárások

- **Titkosság**: az eredmény nem változik, ha két szavazó szavazatait egymás közt elcseréljük.
- **Semlegesség**: ha minden leadott szavazatot az ellenkezőjére cserélünk, a végeredmény is az ellenkezőjére változik.
- **Monotonitás**: a többlétszavazatok a győztesből nem csinálhatnak vesztest (és megfordítva).

Az elvárások teljesítése

Rendszer	Elvárás	Titkos	Semleges	Monoton
Diktatúra		Nem	Igen	Igen
Előre meghatározás		Igen	Nem	Igen
Kisebbségi elv		Igen	Igen	Nem
Többségi elv		Igen	Igen	Igen

May tétele (1952)

- **Kenneth O. May**

(1915. júl. 8. – 1977. dec. 1.)

matematikus és

matematika-történet kutató



- **May tétele:** Ha egy választáson két jelölt van és a szavazók száma páratlan, a **többségi elv** az **egyetlen** olyan választási rendszer, amelyik **titkos, semleges, monoton** és pontosan egy győztest ad.

Bizonyítás

- Legyen a szavazók száma $n = 2m + 1$ és indirekt tegyük fel, hogy egy, a feltételeket teljesítő választási rendszerben előfordul, hogy az A jelölt $k < m + 1$ szavazatot kap, mégis győz.
- Ha néhány B -re szavazó A -ra szavazott volna, és így A szavazatainak száma $n - k > k$ lenne, akkor is győzne a monotonitás miatt.

- A semlegesség miatt **B** is nyert volna, ha az előbbiekhöz képest mindenki fordítva szavaz, és így **B** kap $n - k$ szavazatot.
- De akkor a titkosság miatt eredetileg is **B**-nek kellett nyernie az általa kapott $n - k$ szavazattal.
- Az ellentmondás miatt nem nyerhet, aki kevesebb szavazatot kapott.

Választás több jelölt közül

- **Egyszerű választás** (minden szavazó egy jelöltre szavaz) esetén (is) a **többség** fogalma több értelmet nyer.
- **Egyszerű többséget** szerez az **A** jelölt, ha minden más jelölt kevesebb szavazatot kap, mint **A**.
- **Abszolút többséget** szerez az a jelölt, aki a szavazatok több, mint felét megkapja.
 - Pl. **A: 12, B: 10, C: 9** (3 jelölt, 31 szavazó).

A választási rendszer finomítása

- **Többfordulós választás:** egy-egy fordulóban néhány (legkevesebb szavazatot gyűjtő) jelölt kiesik, a szavazás minden fordulóban egyszerű (viszont idő- és költségigényes lehet)
- **Egyfordulós preferencia-választás:** a szavazók **preferencia-sorrendet** határoznak meg, amiből valamilyen eljárással adódik a jelöltek sorrendje (bonyolultabb, de gyorsabb és olcsóbb).

Választási rendszer elemei

- Véges sok **szavazó** és véges sok **jelölt**.
- **Szavazat**: egy lineáris rendezés a jelöltek halmazán (**egyéni preferencia**).
- **Szavazás**: függvény, amely minden szavazóhoz hozzárendel egy szavazatot.
- **Választási rendszer**: a szavazások halmazán értelmezett függvény, amely minden szavazáshoz hozzárendel egy lineáris rendezést (**társadalmi preferenciát**).

1. Választási rendszer: a Borda-pontozás

- **Jean-Charles, chevalier de Borda** (1733. május 4. – 1799. február 19.) francia matematikus, fizikus, politológus és tengerész.
- **Pontozás** (n jelölt esetén): a k -adik helyen lévő jelölt kap $n-k$ pontot minden egyes szavazat feldolgozásakor. A kapott pontokat végül összesítjük és a magasabb pontszám jobb helyezést jelent.
- **Holtverseny** esetére külön protokoll kell.



2. Választási rendszer:

a sorozatos páros szavazás

- **Eljárás:** a jelöltek preferenciáit egy előre meghatározott protokoll szerint páronként összevetjük és mindig a győztes jut tovább
- Az eredmény függhet a protokolltól.
- Motiváció: Condorcet **győztes**/vesztes kritérium.
- **Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet**

(1743. szept. 17. – 1794. márc. 28.)

francia filozófus, matematikus és politológus.



3. Választási rendszer:

a folyamatos kizárás

- **Eljárás:** Minden egyes lépésben meghatározzuk azt az X jelöltet, akit a legkevesebb szavazó jelölt be elsőnek, majd X -et töröljük minden szavazólapról (így pl. amelyik szavazólapon X volt bejelölve elsőnek és Y másodiknak, ezután Y lesz az első).
- Ez nem más, mint a **többsfordulós szavazás automatikus lejátszása** egyetlen preferencia-szavazás alapján.

Szemléltetés példán

- **Példa:** 3 jelölt; $A > B > C$ (12 szavazat), $B > C > A$ (10 szavazat), $C > A > B$ (4 szavazat), $C > B > A$ (5 szavazat); összesen 31 szavazat.
- Egyszerű többség: **A** nyer (A: 12, B: 10, C: 9).
- Borda-pontozás: **B** nyer (B: 37, A: 28, C: 28).
- Sorozatos páros szavazás:
 - ha előbb **A** harcol **B**-vel, végül **C** nyer;
 - ha előbb **A** harcol **C**-vel, végül **B** nyer;
 - ha előbb **B** harcol **C**-vel, végül **A** nyer.
- Folyamatos kizárás: **A** nyer (előbb **C** esik ki 9 első hellyel, ezután **B** esik ki 15 első hellyel).

Arrow feltételei

- **1. feltétel: általánosság.** Minden lineáris rendezés megengedett szavazat.
- **2. feltétel: monotonitás.** Ha egy szavazaton csak annyit változtatunk, hogy az A jelölt néhány pozícióval előrébb kerül, nem végezhet hátrébb.
- **3. feltétel: az irreleváns alternatíváktól való függetlenség.** Két jelölt egymáshoz viszonyított pozícióját a társadalmi preferenciában meghatározza viszonyuk az egyéni preferenciákban.
- **4. feltétel: szavazói szuverenitás.** A semlegesség általános megfelelője: két jelölt viszonya a társadalmi preferenciában nem lehet független a szavazás kimenetelétől.
- **5. feltétel: diktatúra-mentesség.** Egyetlen szavazat sem dönthet két jelölt végső sorrendjéről a többi szavazattól függetlenül.

Arrow tétele (1950)

- **Kenneth Joseph Arrow**

(szül.: 1921. augusztus 23.)

amerikai közgazdász (az

1972. évi közgazdaságtani Nobel-díjas

John Hicks-szel megosztva).

- **Arrow tétele:** Kettőnél több jelölt esetén nem létezik olyan választási rendszer, ami mind az öt Arrow-féle feltételt teljesíti.



Arrow tételének erős változata

- **Pareto egyöntetűségi feltétele:** Ha egy szavazás során minden szavazó egyéni preferenciájában az **A** jelölt megelőzi a **B** jelöltet, akkor a kapott társadalmi preferencia szerint is meg kell előznie.
- **Arrow tételének erős változata:** Kettőnél több jelölt esetén nem létezik olyan választási rendszer, ami teljesíti Arrow 1., 3. és 5. feltételét, valamint Pareto egyöntetűségi feltételét.

A bizonyítás alapgondolata

Az irreleváns alternatíváktól való függetlenség (és az általánosság) többszöri trükkös alkalmazásával megmutatjuk, hogy ha E és F a szavazók két diszjunkt részhalmaza, amelyek külön-külön **nem** minden jelölt –párra nézve *meghatározók*, akkor $E \cup F$ is ilyen. A diktatúra mentesség miatt a szavazók egyelemű halmazai ilyenek, tehát az egyesítésük, azaz az összes szavazó halmaza is. Ez azonban ellentmond Pareto egyöntetűségi feltételének.

Köszönöm a figyelmet!