# Hajdú–Bihar megyei középiskolások matematika versenye, 2016/2017
## – 11. évfolyam, megoldókulcs –

---

**1. feladat**

Töltsük tele az $5$ literes palackot, majd ebből töltsük tele a $3$ literest. Így az $5$ literesben $2$ liter folyadék marad.

*3 pont*

Ürítsük ki a $3$ literes palackot, majd töltsük bele az $5$ literes palack $2$ liternyi tartalmát. Ekkor még $1$ liternyi hely marad a $3$ literes palackban.

*3 pont*

Végezetül töltsük fel az $5$ literes palackot, és ebből öntsük tele a $3$ literes palackot. Így pontosan $4$ liter folyadék marad vissza.

*2 pont*

*Összesen: 8 pont*

*Megjegyzés: A feladat más módszerrel is megoldható.*

**2. feladat**

A nullák számát az dönti el, hogy $10$ melyik legmagasabb hatványával osztható a $100!$ értéke. Ehhez azonban elegendő tudni, hogy a prímtényezős felbontásában $5$ melyik legmagasabb hatványa szerepel.

*4 pont*

Mivel minden ötötik szám öttel, minden huszonötödik pedig huszonöttel osztható, ezért a $100!$ prímtényezős felbontásában az $5$ kitevője $20 + 4 = 24$. Vagyis, a $100!$ ennyi nullára végződik.

*4 pont*

A $100!$ nem négyzetszám, mivel prímtényezős felbontásában a $97$ első hatványa lép föl.

*2 pont*

*Összesen: 10 pont*

*Megjegyzés: A második rész megválaszolható az első rész mintájára, a $2$ legmagasabb hatványának meghatározásával.*

**3. feladat**

Tükrözzük a poharat (és ezzel együtt a méh helyzetét) a pohár nyílásának körvonalára!

*3 pont*

Tekintsük a mézcseppnek és a méhnek a nyílás körívére való merőleges vetületét, valamint a körív egy olyan ármérőjét, amely nem választja el ezeket a merőleges vetületeket.

*3 pont*

A kapott átmérő mentén hasítsuk föl a henger palástját és terítsük ki. Tartsuk meg azt a palástdarabot, amely tartalmazza a mézcseppet és a méhet. Ez a darab nyilván tartalmazza a mézcsepp tükörképét is.

*2 pont*

A méhet és a mézcsepp tükörképét összekötő legrövidebb út nyilván az őket összekötő egyenes szakasz. Keressük meg végezetül e a szakasznak és a perem körívének megfelelő szakasznak a metszéspontját.

*2 pont*

A méh úgy juthat el a legrövidebb úton a mézcsepphez, ha elsőkén a metszéspontig halad, majd onnan az előzőleg megtalált szakasz tükörképén folytatja útját. Mindezt az eredeti palástra „görbítve" kapjuk a legrövidebb pályát.

*2 pont*

*Összesen: 12 pont*

**4. feladat**

A megoldandó egyenlet úgynevezett reciprok-egyenlet. Nyilván $x = 0$ nem lehet megoldás, ezért mindkét oldalt oszthatjuk az $x^2$ taggal. Rendezéssel az alábbi egyenletet kapjuk:

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0.$$

*4 pont*

Vezessük be az $y = x + 1/x$ új ismeretlent. Mivel

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2,$$

ezért az előző egyenlet most az alábbi formát ölti:

$$0 = 3(y^2 - 2) + 4y - 14 = 3y^2 + 4y - 20.$$

Így $y = -10/3$ vagy $y = 2$.

*2+1+1=4 pont*

Az első eset, visszatérve az eredeti változóra, a $3x^2 + 10x + 3 = 0$ egyenletre vezet. Ennek két gyöke: $x = -3$ és $x = -1/3$. Helyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy mindkét érték valóban megoldás.

*1+1+1=3 pont*

Hasonlóan, a második esetből az $x^2 - 2x + 1 = 0$ egyenletre adódik, melynek gyöke: $x = 1$. Ez szintén megoldásnak bizonyul.

*1+1+1=3 pont*

*Összesen: 14 pont*

*1. Megjegyzés: A feladat megoldható a reciprok-egyenletekre vonatkozó ismeretek nélkül is, az alábbiak szerint. Mivel az együtthatók összege* $0$*, ezért* $x = 1$ *megoldás (2 pont). A gyöktényezővel osztva, a* $3x^3 + 7x^2 - 7x - 3 = 0$ *egyenletet kapjuk (4 pont). Ennek az* $x = 1$ *ismét megoldása (2 pont); újabb osztást követően a* $3x^2 + 10x + 3 = 0$ *egyenelethez jutunk (4 pont). Ezt megoldva kapjuk a másik két gyököt (2 pont).*

*2. Megjegyzés: Valójában az* $x = -3$ *gyök szintén megsejthető, hiszen osztja a nulladfokú tagot (2 pont). Ezt követően ismét lehet osztani az* $(x - 1)$ *és* $(x + 3)$ *tényezővel (4+4 pont), és a feladat egy másodfokú egyenlet megoldására redukálódik (2 pont).*

*3. Megjegyzés: A Rolle-tételből is megkapható mindhárom racionális gyök (10 pont). Ezek birtokában megmutatható, hogy további valós gyök már nincsen (4 pont).*

*Összesen: 14 pont*

**5. feladat**

Jelölje a négyszög területét $T$. A beírt kör középpontjából az oldalszakaszokra állított merőlegeseket fölvéve azonnal adódik, hogy ekkor

$$2T = r(a + b + c + d).$$

*3 pont*

Másrészt, a terület kétszeresét megkaphatjuk az oldalak és az átlók által meghatározott négy háromszög területének összegeként is.

*3 pont*

Az eddigieket összevetve, majd fölhasználva, hogy bármely háromszög területe legfeljebb akkora, mint tetszőleges két oldala szorzatának a fele, végezetül a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} r(a+b+c+d) &= 2T = T_{ABC} + T_{BCD} + T_{CDA} + T_{DAC} \le \frac{ab+bc+cd+da}{2} \\ &\le \frac{a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+d^2+d^2+a^2}{4} = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}. \end{aligned}$$

Innen rendezéssel nyerjük a bizonyítandó becslést.

*2+4+4=10 pont*

*Összesen: 16 pont*

*Megjegyzés: Bár a feladat nem kérdezi az egyenlőség esetét, azonban a fentiekből világosan kiderül, hogy ennek szükséges és elegendő feltétele, hogy a négyszög négyzet legyen.*