Hajdú–Bihar megyei középiskolások matematika versenye, 2016/2017
– 9. évfolyam, megoldókulcs –

---

1. feladat

Az első lépésben a beszínezett rész a négyzet $\frac{1}{9}$-e, ebből van 1 darab.

1 pont

A második lépésben egy kis beszínezett négyzet az eredeti négyzet $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{81}$-e
és ezekből van 8 darab.

2 pont

A harmadik lépésben egy kis beszínezett rész az eredeti négyzet $\frac{1}{81} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{729}$-e
és ezekből $8^2 = 64$ darab van.

2 pont

A beszínezett terület összesen: $1 \cdot \frac{1}{9} + 8 \cdot \frac{1}{81} + 64 \cdot \frac{1}{729} = \frac{217}{729}$.

2 pont

Tehát Ákos a négyzet $\frac{217}{729}$-ed részét színezte be.

1 pont

Összesen: 8 pont

2. feladat

Legyen a nagypapa születési évszáma x, ami nem 0.

1 pont

Ekkor $\frac{(x+39)(x+50)}{x} = \frac{x^2+89x+1950}{x} = x + 89 + \frac{1950}{x}$ pozitív egész szám.

4 pont

Tehát x osztója 1950-nak.

1 pont

De ez csak $x = 1950$ esetén lehetséges, mert 1950 következő legnagyobb osztója 975
már nem lehet születési évszáma nagypapának.

2 pont

Tehát ebben az évben nagypapa $2016 - 1950 = 66$ éves.

1 pont

Ellenőrzés: $\frac{(1950+39)(1950+50)}{1950} = \frac{1989 \cdot 2000}{1950} = 2040 = 1950 + 89 + 1$ évszám.

1 pont

Összesen: 10 pont

3. feladat

Készíts ábrát! Az $ABCD$ paralelogramma belső szögfelezőinek metszéspontjai legyenek E, F, G, H. Legyen például E az A és a D csúcsokból induló szögfelezők metszéspontja, F a C és D csúcsokból induló szögfelezők metszéspontja, G a B és C csúcsokból induló szögfelezők metszéspontja és H az A és B csúcsokból induló szögfelezők metszéspontja.
A paralelogramma szomszédos szögeinek összege $180°$.

1 pont

Ezért az AED háromszögben

$$DAE\angle + ADE\angle = \frac{1}{2}DAB\angle + \frac{1}{2}ADC\angle = \frac{180°}{2} = 90°.$$

2 pont

Így $AED\angle = FEH\angle = 90°$.

2 pont

Ugyanez megismételhető az $EFGH$ négyszög többi szögére is.

1 pont

Ezért az $EFGH$ négyszög minden szöge derékszög, azaz téglalap.

1 pont

Akkor nem zárnak közre síkidomot a szögfelezők, ha két szemközti szögfelező egy egyenesbe esik, azaz ezek az egyik átlóval esnek egybe.

1 pont

Mivel a paralelogramma szemközti szögei egyenlők, ezért ekkor az ABC és az ADC háromszögek egyenlőszárúak és egybevágóak.

3 pont

Így $AB = BC = CD = DA$ tehát a paralelogramma rombusz.

1 pont

Összesen: 12 pont

4. feladat

Legyenek M_1, M_2, ..., M_{13} a szobrok tömegei.
Ekkor $|M_1 - M_2|$, $|M_2 - M_3|$, ..., $|M_{13} - M_1|$ a gömbök tömegei.

2 pont

Az $(M_1 - M_2) + (M_2 - M_3) + ... + (M_{13} - M_1) = 0$ kifejezés azonosság.

5 pont

Ha ebben az azonosságban minden zárójeles tag 0, akkor egy gömböt sem függesztettek ki és a mérleg egyensúlyban van.

1 pont

Ha ebben az azonosságban néhány zárójeles tag pozitív, akkor a többi negatív (vagy nulla).

3 pont

Így a pozitív tagoknak megfelelő gömbök össztömege megegyezik a negatívoknak megfelelőkével.

2 pont

A válasz: igaz.

1 pont

Összesen: 14 pont

5. feladat

Két esetet vizsgálunk:

1. eset: A feladat feltételeinek eleget tevő H halmaz elemeinek száma páratlan: $2n+1$, $n \in \mathbb{N}^+$.
H elemeinek átlaga legyen x, ez a középső egész szám. $(2n+1)x = 100$.

2 pont

Mivel $100 = 2^2 \cdot 5^2$ és $2n+1$ páratlan osztója 100-nak, $2n+1$ csak 5 vagy 25 lehet.

2 pont

Ha $2n+1 = 5$, akkor $n = 2$. Így $x = 20$ és $H = \{18, 19, 20, 21, 22\}$.

2 pont

Ha $2n+1 = 25$, akkor $n = 12$. Így $x = 4$. Ez nem lehetséges mert H elemei pozitívak.

1 pont

2. eset: H elemeinek száma páros: $2n$, $n \in \mathbb{N}^+$.
H elemeinek átlaga: x most a két középső szám számtani közepe és így x nem egész.

2 pont

Ezért $2n \cdot x = 100$, $2x = \frac{100}{n} \in \mathbb{N}^+$, $x = \frac{50}{n}$, ahol x már nem egész.

1 pont

Így n a 4 szóbajövő többszöröse lehet: 4, 20, 100.

2 pont

Ha $n = 4$, akkor $x = 12,5$. H pedig: $H = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$.

2 pont

Ha $n = 20$ vagy $n = 100$ akkor nincs alkalmas H, mert H elemei pozitívak.

1 pont

Két halmaz van, amelyik a feltételeknek eleget tesz:
$H_1 = \{18, 19, 20, 21, 22\}$, $H_2 = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$.

1 pont

Összesen: 16 pont

Megjegyzés 1: Ha egy tanuló indoklás nélkül adja meg a $H_1 = \{18, 19, 20, 21, 22\}$ és $H_2 = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ halmazokat, akkor arra a $2+2+1$ pontokat kapja meg, ahogy fentebb szerepel a javítókulcsban.

Megjegyzés 2: Meg lehet oldani direkt módon is a feladatot esetszétválasztás nélkül, ha H elemeit $\{m, m+1, m+2, ..., n+m\}$ alakba írjuk fel.
Ekkor kiemelés után azt kapjuk, hogy $(n+1)m + \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)(m + \frac{n}{2}) = 100$.
Innen $(n+1)(2m+n) = 200$, felhasználjuk, hogy $n+1$ a 200 osztója és megvizsgáljuk az összes lehetőségeket.