

Lendület záróbeszámoló (2012-2017)

Szöveges összefoglaló a beszámolási időszakban elért eredményekről a szerződésekben szereplő kutatási tervek tükrében

Kutatócsoport-vezető neve: Molnár Lajos

A pályázat eddigi időtartama (2012. július 1. – 2016. december 31.) alatt végzett kutatásaink legfőbb irányai C^* -algebrák pozitív definit kúpjának és unitér csoportjának invariancia transzformációira, továbbá a kvantummechanikában és mátrixgeometriákban fellépő operátor-, és mátrixstruktúrákra valamint azok transzformációira vonatkoztak.

A projekt keretein belül az adott időszakban összesen 75 írott munka született, ami 48 megjelent, 6 megjelenés alatt levő, 8 benyújtott, 2 benyújtás előtt álló és 7 előkészületben lévő publikációt, illetve 4 PhD-disszertációt jelent. Megállapítható tehát, hogy a pályázatban kitűzött, évi 8-10 publikációra vonatkozó célunkat szignifikánsan túlteljesítettük. A tartalmi rész vonatkozásában a következők mondhatók el. Eredményeink születtek az ötéves kutatási tervben megjelölt I-V. problémakörök mindegyikében és a nevesített (1.1)-(1.6) kérdések közül teljes megoldását adtuk az (1.1), (1.2), (1.4), (1.5), (1.6) jelűeknek illetve lényegében megoldottuk az (1.3)-t is. Hasonló sikereket értünk el az éves kutatási tervekben kitűzött problémákkal kapcsolatban is. Ezeken kívül jelentős mennyiségű előre nem tervezett eredményt is kaptunk. Ez a matematikai kutatások jellegéből következik, a vizsgálatok során olyan új kérdések vetődtek fel, illetve irányok nyíltak meg, melyek a vizsgálatok menetét (véleményünk szerint egyértelműen kedvezően) befolyásolták. Az alábbi áttekintésben az előbb említett munkáinkban szereplő olyan fontos eredmények kerülnek említésre, melyekhez kapcsolódó vizsgálatokat célként tűztük ki valamelyik kutatási tervünkben.

Számos cikkünkben vizsgáltuk C^* -algebrák pozitív invertálható elemei halmazának, azaz pozitív kúpjának, illetve unitér csoportjának megőrzési transzformációit. Közülük a következőekben ismertetésre kerülő [9,13] közlemények az ötéves kutatási tervben szereplő I. problémakörhöz tartoznak. A [9] dolgozatunkban igazoltuk, hogy ha két C^* -algebra unitér csoportjai izometrikusak egymással, akkor a szóban forgó algebrák Jordan *-izomorfak. Ebből az eredményből az a meglepő konklúzió adódik, hogy ha két ilyen absztrakt struktúra bizonyos kicsiny részei (nevezetesen unitér csoportjai) izomorfak pusztán mint metrikus terek, akkor a nagy algebrák mind Jordan-algebrai, mind metrikus szempontból izomorfak egymással. A [9] publikációban meghatároztuk a Neumann-algebrák unitér csoportjai, illetve C^* -algebrák pozitív kúpjai közötti szürjektív izometriák pontos szerkezetét az operátornormára, illetve a Thompson-metrikára vonatkozóan. Utóbbi tétel a C^* -algebrák elméletében jelentős szerepet játszó, a szürjektív lineáris izometriákat leíró Kadison-tétel differenciálgeometriai megfelelőjének tekinthető, tudniillik a Thompson-metrika a pozitív kúp természetes differenciálgeometriai struktúrájához tartozó távolságfogalom. Lényeges megemlíteni, hogy a [9] dolgozatban található eredmények megoldást szolgáltatnak az ötéves kutatási tervben szereplő (1.1) és (1.2) problémákra. Ezen tételek nyomán kutatásainkat kiterjesztettük abban az irányban, melyben az adott struktúrák nem feltétlenül metrikákkal, hanem azoknál sokkal általánosabb távolságfogalmakkal, úgynevezett általánosított távolságmértékekkel (divergenciákkal) vannak ellátva. Efféle mennyiségek a matematika és alkalmazásai legkülönbözőbb területein jelennek meg az optimalizálástól a statisztikán át a kvantum információelméletig, ez a tény szolgált kutatásaink motivációjával. Bizonyos értelemben legerősebb eredményeinket tartalmazza a [13] több mint 30 oldalas közlemény, amiben közös keretbe foglaltuk és jelentősen általánosítottuk a [11,12,17] publikációkban adott tételek nagy részét. Ebben a munkánkban elsőként a jelen idő szerint egyfajta értelemben legáltalánosabb Mazur-Ulam típusú tételt bizonyítottuk. Ez geometriai struktúrák egy rendkívül széles osztályára vonatkozóan állítja, hogy azok általánosított izometriáknak nevezhető leképezései szükségszerűen bizonyos algebrai tulajdonsággal bírnak,

Lendület záróbeszámoló (2012-2017)

egyfajta értelemben lokális izomorfiák. Ezt az eredményt felhasználva tanulmányoztuk Neumann faktorok pozitív kúpja, illetve unitér csoportja általánosított izometriáit. A szóban forgó transzformációk meghatározásának, leírásának a kulcslepése a kérdéses struktúrák közötti folytonos, a Jordan-hármasszorzat műveletére vonatkozó izomorfizmusok szerkezetének a feltárása volt. Kiderítettük, hogy ezek szoros kapcsolatban állnak a teljes algebraik közötti lineáris(!) Jordan *-izomorfizmusokkal. A kapcsolódó eredmény legalábbis faktorok esetén megadja az ötéves kutatási tervben szereplő (1.3) probléma megoldását. A [13] publikációval kapcsolatban megjegyezzük még, hogy az a Charles Batty oxfordi professzor 60. születésnapjának alkalmából szerkesztett, a Birkhauser kiadó "Operator Theory: Advances and Applications" c. igen nagy presztízsű könyvsorozata külön kötete szerkesztőinek megtisztelő felkérésére készült.

Elsőrendűen az említett Mazur-Ulam típusú tétel (és annak előzőleg, szintén általunk kapott speciálisabb változatai) fenti alkalmazásai miatt a pozitív kúpokra, illetve unitér csoportokra vonatkozó kutatásaink lényeges részét képezte eme struktúrák Jordan-hármasszorzatra vonatkozó (folytonos) izomorfizmusainak/endomorfizmusainak tanulmányozása. A pozitív kúpok ilyen transzformációival kapcsolatban megemlítjük azt az érdekességet, hogy általános alakjaik meghatározása a látszólag egyszerű, 2×2 -es komplex pozitív definit mátrixok halmaza esetén különösen nehéznek bizonyult. Mintegy 2 évig csupán sikertelen kísérletek történtek - a csoporttagok és más kutatók részéről is - a probléma megoldására (a nagyobb méretű mátrixok és az operátorok esetét összetett módon, mély apparátust használva, de tudtuk kezelni előzőleg). Mivel a kérdés az előbbieken kívüli alkalmazásai révén is nagy jelentőséggel bírt számunkra, ezért komoly sikernek tartjuk annak végső megoldását, ami a [19] dolgozatban került publikálásra. Megjegyezzük, hogy a probléma megoldását célul tűztük ki a 2. évi kutatási tervben. Az említett [19]-beli eredmény alkalmazásai közül először a kvantummechanikai mérések elméletében fontos szerepet játszó úgynevezett effektalgebraik endomorfizmusainak struktúrájára vonatkozó egy régebbi tételünknek a hiányzó kétdimenziós esetre való kiterjesztését említjük. Ennél jelentősebbnek véljük azonban az Einstein-féle sebesség-összeadás műveletére vonatkozó folytonos endomorfizmusok teljes leírását. Az említett művelet a speciális relativitáselmélet meghatározó fontosságú operációja. A [18] cikk fő eredménye kimondja, hogy az erre vonatkozó nemzérus folytonos endomorfizmusokat éppen a háromdimenziós tér ortogonális transzformációi indukálják. Ebből egyenesen adódik az ötéves kutatási tervben található (1.5) probléma megoldása.

Ahogy az a fentiekből kitűnik, a pályázat időtartama alatt számos izometriákra vonatkozó vizsgálatot végeztünk. Ezek közé tartozik a Grassmann-sokaságok úgynevezett gap-izometriáival kapcsolatos munkánk, melyben az alapprobléma egy adott H Hilbert-téren ható, n -rangú projekciók tere – azaz az ún. n -indexű Grassmann-sokaság - operátornormára vonatkozó szürjektív izometriáinak leírása. A [3] közleményünkben meg is adtuk ezeknek a transzformációknak a struktúráját komplex és legalább $4n$ dimenziós H alaptér esetén. Egy későbbi publikációnkban [8] végül a probléma teljes megoldását is sikerült megadni a dimenzióra előírt bármiféle feltétel nélkül, sőt a cikkben bemutatott érvelés a valós esetben is működik, illetve véges dimenzióban a szürjektivitást sem kell feltételezni. Kapcsolódó tételünk alapján a szóban forgó izometriák éppen azok a leképezések, melyek – esetlegesen az ortokomplementálás erejéig – az alapul vett tér valamely unitér vagy antiunitér operátorából (valós H esetén annak ortogonális transzformációjából) származnak. Ez az eredmény az ötéves kutatási tervbeli (1.4) probléma megoldását szolgáltatja.

A projekt keretein belül operátorközepek invariancia-transzformációinak vizsgálatával is foglalkoztunk. A kérdéses közepek elméletének kidolgozása óta azok a matematika különféle területein találtak fontos alkalmazásokra. Közülük a három legalapvetőbb a számtani, mértani és a harmonikus közép, az ezeket megőrző leképezéseket tanulmányoztunk operátoralgebraikon a [16]

Lendület záróbeszámoló (2012-2017)

dolgozatban. Eme közepek egyben műveletek is egy adott C^* -algebra pozitív kúpján, így az említett transzformációk a kúp egyfajta homomorfizmusainak is tekinthetők. A [16]-ban szereplő fő eredmények egy A , illetve B C^* -algebra A^{++} , illetve B^{++} pozitív kúpjai közötti T leképezésre vonatkoznak. Ezek tartalma az, hogy amennyiben T izomorfizmus a számtani vagy a harmonikus középre nézve, úgy egy a teljes algebrák közötti, A -t B -be képező lineáris(!) Jordan $*$ -izomorfizmusból származik; továbbá, ha A, B faktor Neumann-algebrák, T pedig folytonos izomorfizmus a mértani középre nézve, akkor egy, az eredeti A és B algebrák közötti lineáris(!) $*$ -izomorfizmusból vagy $*$ -antiizomorfizmusból ered. Megjegyezzük, hogy az utóbbi állítások következményként megadják a pozitív invertálható operátorok kúpjának a kérdéses közepek valamelyikét megőrző (folytonos) bijekciói struktúráját. Ezen leképezések szerkezetének meghatározása problémaként szerepel a 3. évi kutatási tervben.

Az ötéves kutatási terv II. pontjának célkitűzése a kvantummechanika matematikai leírásaiban szereplő operátorstruktúrák megőrzési transzformációinak, szimmetriáinak a tanulmányozása. Ilyen típusú vizsgálataink fő motivációjául Wigner azon nevezetes tétele szolgál, ami röviden a matematika nyelvén úgy fogalmazható meg, hogy egy Hilbert-tér 1-rangú projekciói összességének minden olyan bijekciója, mely megőrzi a szorzat nyomát (átmeneti valószínűség), szükségképpen a tekintett tér egy unitér vagy antiunitér operátorából származik. Ez az eredmény a kvantummechanika valószínűségi vonatkozásait tekintve alapvető fontosságú. Ennek a jelentős tételnek sok általánosítása, kiterjesztése ismert. A kiterjesztések egyik lehetséges irányát megkaphatjuk például a következő természetes kérdés nyomán. Mit mondhatunk a szorzat nyomát invariánsan hagyó leképezésekről abban az esetben, melyben az alapstruktúra az 1-rangú projekciók osztálya helyett az n -rangú projekciók Grassmann sokasága? A [7] kéziratban meghatároztuk ezen transzformációk szerkezetét, amit célként tűztünk ki az 5. évi kutatási tervben. Megjegyezzük, hogy az így kapott eredmény jelentősen általánosítja a csoportvezető egy korábbi tételét (lásd [10]), ill. kiterjeszti Wigner fenti klasszikus tételét.

A pályázat időtartama alatt készült dolgozataink egy részében C^* -algebrák pozitív elemeiből álló struktúrák bizonyos divergenciákat (azaz egyfajta távolságmértékeket) megőrző transzformációival foglalkoztunk. Az ilyen típusú leképezéseknek a tanulmányozása beleillik az előző bekezdésben is említett II. problémakörbe. A 3. évi kutatási tervben kitűzött célokkal összhangban a [15] közleményben egy általános divergencia fogalom, az ún. kvázi-entrópiák invariancia transzformációit határoztuk meg a fizikai szempontból legfontosabb esetekben bizonyos C^* -algebrák pozitív kúpjain. Kiderült, hogy ezek mindegyike kiterjeszthető a teljes algebra olyan transzformációjává, ami egy alkalmas elemmel való szorzástól eltekintve a teljes algebra lineáris(!) Jordan $*$ -automorfizmusa.

Az [1] közleményünkben az ötéves kutatási terv III. pontjához tartozó vizsgálatokat folytattunk. Nevezetesen egy C^* -algebra pozitív kúpján adott érdekes és fontos műveletet tanulmányoztunk, s ennek különféle karakterizációit adtuk meg. A dolgozatban a kúp természetes K -loop struktúráját vizsgáltuk. A kapcsolódó loop-műveletnek az algebrai mellett fontos differenciálgeometriai aspektusai vannak és alkalmazásokkal rendelkezik a fizikában is (egybeesik a kvantummechanika matematikai leírásában szereplő Gudder-féle szekvenciális szorzattal, továbbá, mint kiderült, bizonyos reprezentáción keresztül szoros kapcsolatban áll az Einstein-féle sebesség-összeadással is). A publikációban különböző jellemzéseit mutattuk be a kérdéses műveletnek a binér műveletek osztályán belül, valamint igazoltuk, hogy asszociativitása, kommutativitása, illetve disztributivitása külön-külön ekvivalensek az adott algebra eredeti műveletre vonatkozó kommutatív voltaival. Következésképpen az algebra pozitív kúpja ellátva ezzel a művelettel egy olyan struktúra, melyben a közismert asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás tudvalevőleg független tulajdonságok egymással ekvivalensek, ami igen érdekes algebrai jelenség.

Lendület záróbeszámoló (2012-2017)

Egy, az ötéves kutatási terv IV. pontjában említett problémával foglalkoztunk a [6] dolgozatban, mely kutatásaink izometriákkal kapcsolatos irányához tartozik. Ebben a munkában teljes leírását adtuk eloszlásfüggvények terei Kuiper-metrikára (ami a statisztikában fontos távolságfogalom) vonatkozó szűrjektív izometriáinak. A [6]-beli fő eredmények alapján ezeknek a tereknek a szóban forgó leképezései lényegében bizonyos adott valós függvénnyel való kompozícióoperátorként hatnak. Ezeknek az izometriáknak a tanulmányozása külön problémaként jelent meg a 4. évi kutatási tervben.

Az ötéves kutatási terv V. pontjában megjelölt kérdést tanulmányoztunk a [2] dolgozatban, melyben transzformáció-csoportok algebrai reflexivitására vonatkozó eredményeket értünk el. Ezek olyan, meglepőnek tekinthető állítások, melyek úgy fogalmazhatóak meg, hogy bármely leképezés, ami lokálisan (2-pontonként) megegyezik az adott csoport valamelyik (a pontoktól függően változó) elemével, automatikusan globálisan is megegyezik egy elemmel (azaz szükségképpen benne van a csoportban). A [2] cikkben három fontos metrikus tér szűrjektív izometriái csoportjának (illetve bizonyos kapcsolódó automorfizmus-csoportoknak) algebrai reflexivitásáról szóló tételek szerepelnek. Ezek a terek egy adott H Hilbert-tér esetén H unitér csoportja az operátornormával, H pozitív invertálható operátorai kúpja ellátva a Thompson-metrikával, továbbá H általános lineáris csoportja az operátornormával. Az előbbi két struktúrára vonatkozó [2]-beli eredmények megadják az említett V. pontban levő (1.6) probléma megoldását.

A fentiekben az ötéves kutatási tervben megjelölt problémakörök (I-V.) valamelyikéhez sorolható eredményeket ismertettünk. Az ilyen eredményeinken túl számos más, a szóban forgó pontokhoz szorosan nem kapcsolódóakat is kaptunk a pályázat időtartama alatt. Az alábbiakban ezek közül kettőt mutatunk be. Ahogy az az eddigiekből is látszik, bizonyos munkáinkban különböző struktúrák általánosított távolságmértékeket megőrző leképezéseivel foglalkoztunk. Ezek közé tartozik a [4] kézirat, melyben ilyen típusú transzformációkat tanulmányoztunk a speciális ortogonális csoporton. Az abban szereplő általánosított távolságmértékek egy N unitér invariáns normával és egy f függvénnyel vannak paraméterezve. A [4]-beli fő eredményben – az f -re és N -re tett általánosabb feltételek mellett – leírtuk a speciális ortogonális csoport f -hez s N -hez tartozó általánosított távolságmértéket megőrző transzformációinak struktúráját. Megjegyezzük, hogy az ilyen típusú leképezések általános alakjainak meghatározását célul tűztük ki a 4. évi kutatási tervben.

Az írott munkákban szereplő, a projekt keretében kapott eredményeink ismertetését a [23] kézirat fő tételének bemutatásával zárjuk. Ebben az operátor monoton függvények mély elméletéhez kapcsolódóan a lokális monotonitás tulajdonságát vizsgáltuk. Nevezetesen, adott \mathcal{A} C^* -algebra és bizonyos elég általános függvényosztályhoz tartozó f valós függvény esetén karakterizáltuk \mathcal{A} -nak azokat az x elemeket, amik növekedési pontjai f -nek. Az x önadjungált elemet akkor nevezzük az f függvény növekedési pontjának, ha bármely \mathcal{A} -beli y önadjungált elemre az $x \leq y$ relációból következik, hogy $f(x) \leq f(y)$, ahol \leq a szokásos rendezés \mathcal{A} önadjungált elemei halmazán. Az előbb említett jellemzés szerint f növekedési pontjai pontosan az \mathcal{A} centrális önadjungált elemei. Megjegyezzük, hogy ez a tétel jelentősen általánosítja a csoportvezető egy korábbi, [14] közleménybeli eredményét. A jellemzés igazolása tökéletesen beleillik az 5. évi kutatási tervbe.

A fenti eredmények mindegyike publikált cikkben, vagy közlésre benyújtott, illetve benyújtás előtti kéziratban szerepel. A támogatási időszakban azonban több olyan eredményt is nyertünk, melyeknek dolgozatban való megírására időhiány miatt még nem került sor. Ezek között szerepelnek többek között operátoralgebrák transzformáció-csoportjainak (pl. rendezés-automorfizmusok csoportjainak) reflexivitásával (az ötéves kutatási tervbeli V. problémakör) és C^* -algebrák kommutativitásának karakterizációival kapcsolatos eredmények. Tehát a projekt visszamaradó idejében még további publikációk fognak születni.

Lendület záróbeszámoló (2012-2017)

Elvégzett szakmai tevékenységünkkel, eredményeinkkel kapcsolatban fontosnak tartjuk, hogy a támogatási időszakban a csoport négy fiatal tagja készítette el PhD-disszertációját. Nagy Gergő a [20] értekezésben pozitív operátorok különböző struktúráinak megőrzési problémáira vonatkozó eredményeit foglalta össze. Gehér György Pál az [5] dolgozatban a Hilbert-tér operátorok aszimptotikus viselkedésének területén elért eredményeit és alkalmazásait ismertette. A harmadik disszertáció [21] szerzője Szokol Patrícia, aki megőrzési problémákkal és különböző függvényekre vonatkozó elválasztási tételekkel kapcsolatos eredményeit mutatta be értekezésében. A PhD dolgozatok sorát Virosztek Dániel [22] értekezésével zárjuk, melyben nem-kommutatív varianciákat, bizonyos általánosított kvantum entrópiákat és relatív entrópiákat vizsgált, továbbá bemutatta számos kapcsolódó megőrzési probléma megoldását. Az említett 4 fiatal mindegyike summa cum laude minősítéssel szerezte meg PhD-fokozatát.

A pályázat eddigi, 4,5 éves időtartama alatt született eredményeinkről 72 külföldi és 33 hazai rendezvényen (nemzetközi konferenciákon, egyetemek, kutatóintézetek szemináriumain) tartottunk előadásokat. Az említett hazai események közül fontos kiemelni egy, a kutatócsoport által szervezett rendezvénysorozatot. Ez a Debreceni Egyetem Matematikai Intézetében megrendezett "Lendület" FIFA'13 Mini-konferenciából, a Young Functional Analysts' Meeting 2014-ből, továbbá a Functional Analysis Meets Linear Algebra c. konferenciából áll, melynek helyszíne a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete volt. Az első és utolsó szakmai találkozón hazai, a másodikon pedig részben külföldi kutatók vettek részt. Az események célja Magyarország, illetve a környező országok fiatal, funkcionálanalízissel és lineáris algebrával foglalkozó matematikusai kutatási területeinek, eredményeinek megismerése, tudományos kapcsolatok létrehozása és építése volt. Mindhárom találkozó igen sikeresnek minősíthető, azokon felvetett problémákból tudományos dolgozatok is születtek, illetve az elsőt mutatott teljesítménye alapján vált Gehér György a kutatócsoport tagjává.

További konferenciarendezési tevékenységként említjük, hogy a csoport vezetője tudományos bizottsági tagként vett részt a CIMPA Research School on Operator Theory and The Principles of Quantum Mechanics című eseményen. Fontos tudományszervezési feladatunknak tekintjük, hogy Recent Developments in Non-linear Preservers címmel szimpóziumot rendeztünk az ILAS (International Linear Algebra Society) 2016. júliusi konferenciáján Belgiumban, ami a lineáris algebra világszervezetének elsőszámú eseménysorozata több száz (tavalyl 440) résztvevővel. Ez a feladat külön pontként szerepel a 4. projektévi kutatási tervben. A közeljövőt illetően pedig kiemeljük, hogy sikeresen pályáztunk az MTA konferenciarendezést támogató pályázatára, és annak keretében - összhangban az ötéves kutatási tervvel - nemzetközi konferenciát szervezünk Preservers Ewerywhere címmel 2017 júniusára a projekthez kapcsolódó tudományterület legkiválóbb kutatóinak részvételével.

A csoport működése során számos nemzetközi szinten is jelentős kutatót látott vendégül. James Jamison professzor (University of Memphis, USA) a Banach-terek izometriái területének vezető matematikusa 2013 júniusának végén tett látogatást. Osamu Hatori professzor (Niigata University, Japán) a függvényalgebrák területének egyik kiemelkedő szakembere, akivel a csoportvezető igen aktív közös kutatásokat folytat, őt 2013 októberében láttuk vendégül. Pálfia Miklós (RIMS, Japán) pedig, aki a mátrixközépek világviszonylatban magasan jegyzett fiatal kutatója, 2015 februárjában járt csoportunknál. Ezután őrá vonatkozóan a csoport posztdoktori pályázatot nyújtott be, amit el is nyert, s ezzel a „Lendület” program eredeti céljaival teljes összhangban lehetőség nyílt arra, hogy ez a kiemelkedő fiatal magyar kutató 2016. január 1-étől vizsgálatait Magyarországon, a projekt tagjaként folytassa. A 2016. évi látogatók között voltak Peter Šemrl és Matej Brešar professzorok a University of Ljubljana-ról. Az előbbi kutató a megőrzési problémák, utóbbi pedig az asszociatív algebrák és gyűrűk területének kiemelkedő matematikusa. További vendégek voltak Dijana Ilisevic (Zagreb) és Mostafa Mbekhta (Lille), Ya-

Lendület záróbeszámoló (2012-2017)

Shu Wang (Taichung) és Ngai-Ching Wong (Kaohsiung) professzorok, illetve 2017 februárjában és áprilisában vendégünk lesz Jan Hamhalter (Prague) és T.S.S.R.K. Rao (Bangalore) professzor (utóbbi a bangalore-i Indian Statistical Institute igazgatója, mely kutatóintézet vezető szerepet tölt be az indiai matematikai életben).

A csoport tagjai is számos meghívásnak tettek eleget. Ezek közül kiemelendő, hogy a csoportvezető a University of Calabria-n, a University of Memphis-n és a Niigata University-n mintegy egy-egy hónapig volt vendégkutató, a tagok pedig hosszabb-rövidebb időszakokat töltöttek el a Sungkyunkwan University, a University of Ljubljana illetve a National Sun Yat-sen University matematikai intézetében.

A bemutatott munka értékeléséhez megemlíjtük, hogy a kutatócsoport a projekt időtartama alatt több pályázatot nyert el. Ezek között szerepel egy NKFIH-OTKA pályázat a 2015-19 időszakra 11976 E Ft támogatással, továbbá egy MTA által meghirdetett tajvani mobilitási pályázat, aminek futamideje 2 év volt, a támogatás összege évi 1315 E Ft. A csoporthoz kötődik egy nyertes MTA Posztdoktori Kutatói Program pályázat is, aminek összege 9600 E Ft. A fentiekén túl van egy sikeres nemzetközi konferencia pályázatunk 500 E Ft-os támogatással. A csoport egyik tagja elnyert egy, a National Research Foundation of Korea(NRF)(MSIP) által kiírt pályázatot, melynek neve Free functions and gradient flows in metric spaces, összege kb. 37142 E Ft. A tagoknak 4 nyertes Nemzeti Kiválóság Program keretében meghirdetett pályázata volt, két-két Apáczai Csere János Doktoranduszi, ill. Jedlik Ányos Doktorjelölti ösztöndíjpályázat. A támogatás összege az előbbi típusú ösztöndíjak esetén egyenként 1800 E Ft, az utóbbiaknál pedig 2400 E Ft. A tagoknak 6 Campus Hungary Program keretében meghirdetett nyertes pályázata volt, ezek összege 132, 150, 176, 248, 442 és 467 E Ft. Végül, az egyik fiatal tag elnyerte az EMMI - Emberi Erőforrás Támogatáskezelő által meghirdetett "A nemzet fiatal tehetségeiért" ösztöndíját, melynek összege 500 E Ft.

A csoport eddigi működése során a kutatási aktivitás mellett számos egyéb tudományos illetve tudománnyal kapcsolatos tevékenységet is végeztünk. A csoportvezető ez alatt lett elnöke az NKFIH matematika szakértői csoportjának (volt OTKA MAT zsűri), tagja az MTA Doktori Tanácsának, a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj matematikai szakértői kollégiumának és a Szegedi Tudományegyetem Természet- és Műszaki Tudományi Doktori Tanácsának. A meglévő szerkesztőbizottsági tagságai mellé újabb ilyen felkéréseket kapott az Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), Advances in Operator Theory, Linear and Multilinear Algebra, Periodica Mathematica Hungarica és az Operators and Matrices nemzetközi folyóiratoktól, mely folyamatos megterheléssel járó feladatot a szakma iránt érzett felelősségből vállalt el. Tagja volt 2 MTA doktori védési bizottságnak, bírálója egy MTA doktori disszertációnak, szakértője 2 MTA doktori habitusvizsgálatnak. Szakértői bizottság elnökeként illetve tagjaként részt vett 4 habilitált doktori és 6 PhD doktori eljárásban, és bírálója volt 2 PhD-disszertációnak. Két PhD-hallgatója (a csoport jelenlegi ill. korábbi tagjai) a támogatási időszak során sikeresen védte meg doktori értekezését. Új, a csoporton kívüli PhD témavezetői feladatot is vállalt, ami ugyancsak sikeres védelemmel zárult. Jelenleg egy hallgató PhD-témavezetője, ő tagja a csoportnak. Rendszeres szakértő véleményezői munkát végzett az NKFIH, illetve hasonló külföldi szervezetek, legutóbb az NSERC Canada számára. A pályázat időtartama alatt aktív referálói munkát is folytattunk, összesen 109 bírálatot és 44 ismertetőt készítettünk tudományos dolgozatokról.

A kutatómunka mellett Pálfia Miklóst kivéve a csoport minden tagjának voltak oktatási és egyéb egyetemi kötelezettségei, a támogatási időszak során minden szemeszterben tartottunk, ill. fogunk tartani órákat a Debreceni, Miskolci, Szegedi Egyetemen, továbbá a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen. A kapcsolódó reguláris kurzusokon kívül a csoportvezető a prágai Károly Egyetemen szervezett téli iskolán, a Meknesi Moulay Ismail Egyetemen, a Niigatai

Lendület záróbeszámoló (2012-2017)

Egyetemen és a BME-n is tartott különféle speciális kurzusokat (az utóbbi kettőn kettő-kettőt). Az első BME-s kurzus fontos hozadéka, hogy az azt felvett egyik PhD-hallgató, Virosztek Dániel a csoportvezetővel közös kutatásokba kezdett, melyek eredménye 3 megjelent és 1 benyújtott cikk. A vizsgálatokat Virosztek Dániel 2015. július 1-től a kutatócsoport tagjaként folytatta. A második alkalmon hallgatója volt Gaál Marcell, akinek 2016-tól PhD témavezetője, s aki jelenleg ugyancsak aktív tagja a Lendület csoportnak.

Hivatkozások:

1. R. Beneduci and L. Molnár, On the standard K-loop structure of positive invertible elements in a C*-algebra, *J. Math. Anal. Appl.* 420 (2014), 551-562.
2. F. Botelho, J. Jamison and L. Molnár, Algebraic reflexivity of isometry groups and automorphism groups of some operator structures, *J. Math. Anal. Appl.* 408 (2013), 177-195.
3. F. Botelho, J. Jamison and L. Molnár, Surjective isometries on Grassmann spaces, *J. Funct. Anal.* 265 (2013), 2226-2238.
4. M. Gaál, On certain generalized isometries of the special orthogonal group, benyújtott.
5. Gy. P. Gehér, Asymptotic behaviour of Hilbert space operators with applications, PhD-disszertáció (2014).
6. Gy. P. Gehér, Surjective Kuiper isometries, *Houston J. Math.*, megjelenés alatt.
7. Gy. P. Gehér, Wigner's theorem on Grassmann spaces, benyújtott.
8. Gy. P. Gehér and P. Šemrl, Isometries of Grassmann spaces, *J. Funct. Anal.* 270 (2016), 1585-1601.
9. O. Hatori and L. Molnár, Isometries of the unitary groups and Thompson isometries of the spaces of invertible positive elements in C*-algebras, *J. Math. Anal. Appl.* 409 (2014), 158-167.
10. L. Molnár, Transformations on the set of all n-dimensional subspaces of a Hilbert space preserving principal angles, *Comm. Math. Phys.* 217 (2001), 409-421.
11. L. Molnár, Jordan triple endomorphisms and isometries of unitary groups, *Linear Algebra Appl.* 439 (2013), 3518-3531.
12. L. Molnár, Jordan triple endomorphisms and isometries of spaces of positive definite matrices, *Linear Multilinear Algebra* 63 (2015), 12-33.
13. L. Molnár, General Mazur-Ulam type theorems and some applications, in *Operator Semigroups Meet Complex Analysis, Harmonic Analysis and Mathematical Physics*, W. Arendt, R. Chill, Y. Tomilov (Eds.), *Operator Theory: Advances and Applications*, Vol. 250, pp. 311-342, Birkhäuser, 2015.
14. L. Molnár, A characterization of central elements in C*-algebras, *Bull. Aust. Math. Soc.* 95 (2017), 138-143.
15. L. Molnár, Maps on the positive definite cone of a C*-algebra preserving certain quasi-entropies, *J. Math. Anal. Appl.* 447 (2017), 206-221.
16. L. Molnár, The arithmetic, geometric and harmonic means in operator algebras and transformations among them, in *Recent Methods and Research Advances in Operator Theory*, F. Botelho, R. King, T.S.S.R.K. Rao (Eds.), *Contemporary Mathematics*, American Mathematical Society, megjelenés alatt.
17. L. Molnár and P. Szokol, Transformations on positive definite matrices preserving generalized distance measures, *Linear Algebra Appl.* 466 (2015), 141-159.
18. L. Molnár and D. Virosztek, On algebraic endomorphisms of the Einstein gyrogroup, *J. Math. Phys.* 56 (2015), 082302.
19. L. Molnár and D. Virosztek, Continuous Jordan triple endomorphisms of P_2 , *J. Math. Anal. Appl.* 438 (2016), 828-839.

**Lendület záróbeszámoló
(2012-2017)**

20. G. Nagy, Preserver problems on structures of positive operators, PhD-disszertáció (2013).
21. P. Szokol, Preserver problems and separation theorems, PhD-disszertáció (2015).
22. D. Viroztek, Quantum entropies, relative entropies, and related preserver problems, PhD-disszertáció (2016).
23. D. Viroztek, Connections between centrality and local monotonicity of certain functions on C^* -algebras, benyújtás előtt álló.

**Lendület záróbeszámoló
(2012-2017)**

A beszámolási időszakban a témában született publikációk listája

Kutatócsoport-vezető neve: Molnár Lajos

Megjelent:

1. R. Beneduci and L. Molnár, On the standard K-loop structure of positive invertible elements in a C*-algebra, *J. Math. Anal. Appl.* 420 (2014), 551-562.
2. F. Botelho, J. Jamison and L. Molnár, Algebraic reflexivity of isometry groups and automorphism groups of some operator structures, *J. Math. Anal. Appl.* 408 (2013), 177-195.
3. F. Botelho, J. Jamison and L. Molnár, Surjective isometries on Grassmann spaces, *J. Funct. Anal.* 265 (2013), 2226-2238.
4. F. Botelho, L. Molnár and G. Nagy, Linear bijections on von Neumann factors commuting with λ -Aluthge transform, *Bull. Lond. Math. Soc.* 48 (2016), 74-84.
5. G. Dolinar, B. Kuzma, G. Nagy and P. Szokol, Restricted skew-morphisms on matrix algebras, *Linear Algebra Appl.* 490 (2016), 1-17.
6. Gy. P. Gehér, An elementary proof for the non-bijective version of Wigner's theorem, *Phys. Lett. A* 378 (2014), 2054-2057.
7. Gy. P. Gehér, Characterization of Cesaro- and L-asymptotic limits of matrices, *Linear Multilinear Algebra* 63 (2015), 788-805.
8. Gy. P. Gehér, Maps on real Hilbert spaces preserving the area of parallelograms and a preserver problem on self-adjoint operators, *J. Math. Anal. Appl.* 422 (2015), 1402-1413.
9. Gy. P. Gehér, A contribution to the Aleksandrov conservative distance problem in two dimensions, *Linear Algebra Appl.* 481 (2015), 280-287.
10. Gy. P. Gehér, Asymptotic limits of operators similar to normal operators, *Proc. Amer. Math. Soc.* 143 (2015), 4823-4834.
11. Gy. P. Gehér, Is it possible to determine a point lying in a simplex if we know the distances from the vertices?, *J. Math. Anal. Appl.* 439 (2016), 651-663.
12. Gy. P. Gehér, Asymptotic behaviour and cyclic properties of weighted shifts on directed trees, *J. Math. Anal. Appl.* 440 (2016), 14-32.
13. Gy. P. Gehér, Bilateral weighted shift operators similar to normal operators, *Oper. Matrices* 10 (2016), 419-423.
14. Gy. P. Gehér and G. Nagy, Maps on classes of Hilbert space operators preserving measure of commutativity, *Linear Algebra Appl.* 463 (2014), 205-227.
15. Gy. P. Gehér and P. Šemrl, Isometries of Grassmann spaces, *J. Funct. Anal.* 270 (2016), 1585-1601.
16. E. Gselmann, Jordan triple mappings on positive definite matrices, *Aequationes Math.* 89 (2015), 629-639.
17. O. Hatori and L. Molnár, Isometries of the unitary groups and Thompson isometries of the spaces of invertible positive elements in C*-algebras, *J. Math. Anal. Appl.* 409 (2014), 158-167.
18. O. Hatori and L. Molnár, Generalized isometries of the special unitary group, *Arch. Math.* 106 (2016), 155-163.
19. O. Hatori and L. Molnár, Spectral conditions for Jordan *-isomorphisms on operator algebras, *Studia Math.* 236 (2017), 101-126.
20. H. Huang, C.-N. Liu, P. Szokol, M.-C. Tsai and J. Zhang, Trace and determinant preserving maps of matrices, *Linear Algebra Appl.* 507 (2016), 373-388.
21. Z. Léka, A note on central moments in C*-algebras, *J. Math. Inequal.* 9 (2015), 165-175.

**Lendület záróbeszámoló
(2012-2017)**

22. L. Molnár, Jordan triple endomorphisms and isometries of unitary groups, *Linear Algebra Appl.* 439 (2013), 3518-3531.
23. L. Molnár, Bilocal $*$ -automorphisms of $B(H)$, *Arch. Math.* 102 (2014), 83-89.
24. L. Molnár, A few conditions for a C^* -algebra to be commutative, *Abstr. Appl. Anal.* 2014 (2014), Article ID 705836, 4 pages.
25. L. Molnár, Jordan triple endomorphisms and isometries of spaces of positive definite matrices, *Linear Multilinear Algebra* 63 (2015), 12-33.
26. L. Molnár, On the nonexistence of order isomorphisms between the sets of all self-adjoint and all positive definite operators, *Abstr. Appl. Anal.* 2015 (2015), Article ID 705836, 6 pages.
27. L. Molnár, General Mazur-Ulam type theorems and some applications, in *Operator Semigroups Meet Complex Analysis, Harmonic Analysis and Mathematical Physics*, W. Arendt, R. Chill, Y. Tomilov (Eds.), *Operator Theory: Advances and Applications*, Vol. 250, pp. 311-342, Birkhäuser, 2015.
28. L. Molnár, Two characterizations of unitary-antiunitary similarity transformations of positive definite operators on a finite dimensional Hilbert space, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* 58 (2015), 83-93.
29. L. Molnár, The logarithmic function and trace zero elements in finite von Neumann factors, *Bull. Aust. Math. Soc.* 94 (2016), 290-295.
30. L. Molnár, Maps on the positive definite cone of a C^* -algebra preserving certain quasi-entropies, *J. Math. Anal. Appl.* 447 (2017), 206-221.
31. L. Molnár, A characterization of central elements in C^* -algebras, *Bull. Aust. Math. Soc.* 95 (2017), 138-143.
32. L. Molnár and G. Nagy, Transformations on density operators that leave the Holevo bound invariant, *Int. J. Theor. Phys.* 53 (2014), 3273-3278.
33. L. Molnár and G. Nagy, Spectral order automorphisms on Hilbert space effects and observables: the 2-dimensional case, *Lett. Math. Phys.* 106 (2016), 535-544.
34. L. Molnár, G. Nagy and P. Szokol, Maps on density operators preserving quantum f -divergences, *Quantum Inf. Process.* 12 (2013), 2309-2323.
35. L. Molnár, J. Pitrik and D. Viosztek, Maps on positive definite matrices preserving Bregman and Jensen divergences, *Linear Algebra Appl.* 495 (2016), 174-189.
36. L. Molnár, P. Šemrl and A.R. Sourour, Bilocal automorphisms, *Oper. Matrices* 9 (2015), 113-120.
37. L. Molnár and P. Szokol, Transformations on positive definite matrices preserving generalized distance measures, *Linear Algebra Appl.* 466 (2015), 141-159.
38. L. Molnár and P. Szokol, Transformations preserving norms of means of positive operators and nonnegative functions, *Integral Equations Operator Theory* 83 (2015), 271-290.
39. L. Molnár and D. Viosztek, On algebraic endomorphisms of the Einstein gyrogroup, *J. Math. Phys.* 56 (2015), 082302.
40. L. Molnár and D. Viosztek, Continuous Jordan triple endomorphisms of P_2 , *J. Math. Anal. Appl.* 438 (2016), 828-839.
41. G. Nagy, Isometries on positive operators of unit norm, *Publ. Math. Debrecen* 82 (2013), 183-192.
42. G. Nagy, Preservers for the p -norm of linear combinations of positive operators, *Abstr. Appl. Anal.* 2014 (2014), Article ID 434121, 9 pages.
43. G. Nagy, Isometries of the spaces of self-adjoint traceless operators, *Linear Algebra Appl.* 484 (2015), 1-12.
44. G. Nagy, Determinant preserving maps: an infinite dimensional version of a theorem of Frobenius, *Linear Multilinear Algebra* 65 (2017), 351-360.

**Lendület záróbeszámoló
(2012-2017)**

45. M. Pálfia, Operator means of probability measures and generalized Karcher equations, *Adv. Math.* 289 (2016), 951-1007.
46. P. Szokol, M.-C. Tsai and J. Zhang, Preserving problems of geodesic-affine maps and related topics on positive definite matrices, *Linear Algebra Appl.* 483 (2015), 293-308.
47. D. Virosztek, Quantum f-divergence preserving maps on positive semidefinite operators acting on finite dimensional Hilbert spaces, *Linear Algebra Appl.* 501 (2016), 242-253.
48. D. Virosztek, Maps on quantum states preserving Bregman and Jensen divergences, *Lett. Math. Phys.* 106 (2016), 1217-1234.

Megjelenés alatt álló:

1. A. Efimov, M. Gaál and Sz.Gy. Révész, On integral estimates of non-negative positive definite functions, *Bull. Aust. Math. Soc.*
2. M. Gaál, Maps preserving a new version of quantum f-divergence, *Banach J. Math. Anal.*
3. M. Gaál and L. Molnár, Transformations on density operators and on positive definite operators preserving the quantum Rényi divergence, *Period. Math. Hung.*
4. Gy. P. Gehér, Surjective Kuiper isometries, *Houston J. Math.*
5. L. Molnár, Comment for the "From the Editor-in-Chief" column in LAA, *Linear Algebra Appl.*
6. L. Molnár, The arithmetic, geometric and harmonic means in operator algebras and transformations among them, in *Recent Methods and Research Advances in Operator Theory*, F. Botelho, R. King, T.S.S.R.K. Rao (Eds.), *Contemporary Mathematics*, Amer. Math. Soc.

Benyújtott:

1. H.-Y. Chen, Gy. P. Gehér, C.-N. Liu, L. Molnár, D. Virosztek and N.-C. Wong, Generalized isometries of the positive definite cone with respect to the quantum χ_α^2 -divergences.
2. M. Gaál, On certain generalized isometries of the special orthogonal group.
3. Gy. P. Gehér, On n-norm preservers and the Aleksandrov conservative n-distance problem.
4. Gy. P. Gehér, Symmetries of projective spaces and spheres.
5. Gy. P. Gehér, Wigner's theorem on Grassmann spaces.
6. Gy. P. Gehér and T. Titkos, Surjective Lévy-Prokhorov isometries.
7. E. Gselmann, The Lukács-Olkin-Rubin theorem on symmetric cones.
8. M. Pálfia, Löwner's Theorem in several variables.

Benyújtás előtt álló:

1. L. Molnár, Algebraic automorphisms in the descriptions of generalized isometries on spaces of positive definite matrices.
2. D. Virosztek, Connections between centrality and local monotonicity of certain functions on C*-algebras.

Előkészületben levő:

1. M. Gaál, Automorphisms for the logarithmic product and means of positive semidefinite operators.

**Lendület záróbeszámoló
(2012-2017)**

2. Y. Lim and M. Pálfi, Existence and Uniqueness of the L1-Karcher mean.
3. M. Matolcsi, D. Virosztek, A Fourier analytical approach to Littlewood's conjecture.
4. L. Molnár, On the surjectivity of generalized isometries on the positive definite cone of matrices.
5. L. Molnár, Busch-Gudder metric on the cone of positive semidefinite operators and their isometries.
6. M. Pálfi, Loewner's theorem in several variables II.
7. D. Virosztek, A short proof of a duality theorem.

PhD-disszertáció:

1. Gy. P. Gehér, Asymptotic behaviour of Hilbert space operators with applications (2014).
2. G. Nagy, Preserver problems on structures of positive operators (2013).
3. P. Szokol, Preserver problems and separation theorems (2015).
4. D. Virosztek, Quantum entropies, relative entropies, and related preserver problems (2016).

**Lendület záróbeszámoló
(2012-2017)**

Kutatócsoport-vezető neve: Molnár Lajos

A beszámolási időszakban hazai rendezvényen tartott tudományos előadások

Rendezvény	Előadás címe
"Functional Analysis Meets Linear Algebra" Konferencia (Szeged)	Determinánstartó transzformációk Hilbert-tér operátorok struktúráin (Nagy)
"Functional Analysis Meets Linear Algebra" Konferencia (Szeged)	Szigorúan konvex és belsőszorzat terek egy új jellemzése (Gehér)
"Functional Analysis Meets Linear Algebra" Konferencia (Szeged)	Bregman- és Jensen-távolságokat őrző leképezések az állapottéren és a pozitív definit mátrixok kúpján (Vírusztek)
"Functional Analysis Meets Linear Algebra" Konferencia (Szeged)	Többváltozós operátor monoton függvények karakterizációja (Pálfia)
„Lendület” FIFA'13 Mini-konferencia (Debrecen)	Izometriák és izomorfizmusok (Molnár)
„Lendület” FIFA'13 Mini-konferencia (Debrecen)	Megőrzési problémák sűrűségoperátorokon (Nagy)
„Lendület” FIFA'13 Mini-konferencia (Debrecen)	A Lukács-tétel szimmetrikus kúpokon (Gselmann)
„Lendület” FIFA'13 Mini-konferencia (Debrecen)	Kvantum f-divergenciát megőrző leképezések sűrűségoperátorokon (Szokol)
2015 Szeged Workshop on Convexity (Szeged)	Can we determine a point lying in a simplex by its distances from the vertices? (Gehér)
54th International Symposium on Functional Equations (Hajdúszoboszló)	Isometries on structures of Hilbert space operators (Nagy)
54th International Symposium on Functional Equations (Hajdúszoboszló)	Commutativity in operator algebras (Molnár)
A Magyar Tudomány Ünnepe (Debrecen)	Operátorstruktúrák izometriái (Molnár)
Algebra szeminárium a Rényi Alfréd Kutatóintézetben (Budapest)	Izometriák mint izomorfizmusok (Molnár)
Analízis Kutató Szeminárium (Debrecen)	Lineáris kombinációk normájának megőrzése pozitív operátorok halmazain (Nagy)
Analízis Kutató Szeminárium (Debrecen)	Rezolvens halmazok metrikus terekben (Nagy)
Conference on Inequalities and Applications '14 (Hajdúszoboszló)	Maps preserving numerical quantities of geodesics in space of positive definite matrices (Szokol)
Conference on Inequalities and Applications '14 (Hajdúszoboszló)	Characterization of inequalities between self-adjoint matrices using entropic quantities (Nagy)
Conference on Inequalities and Applications 2016 (Hajdúszoboszló)	Order preserving maps on structures of linear operators (Nagy)
CSM - The Third Conference of PhD Students in Mathematics (Szeged)	Maps preserving geodesics and their connection with relative entropy and geometric mean (Szokol)
Doktori Nyílt Nap (Szeged)	Megőrzési transzformációk (Molnár)
Eötvös Kollégium, Matematika Műhely (Szeged)	Mátrixok függvényei (Molnár)
Functional Analysis Workshop in honour of Z. Sebestyén's 70th birthday (Budapest)	Transformations on positive definite matrices preserving distances (Molnár)
Lendület Napok (Budapest)	Matematikai struktúrák transzformációi (Nagy)
Miskolci Egyetem Matematikai Intézetének Szemináriuma (Miskolc)	Operátorok struktúráinak megőrzési problémáiról (Nagy)
Miskolci Egyetem Matematikai Intézetének Szemináriuma (Miskolc)	Általánosított eloszlásfüggvények terének szürjektív izometriái (Szokol)
Neumann-szeminárium (Budapest)	Megőrzési problémák pozitív operátorok struktúráin (Nagy)
Numbers, Functions, Equations 2013 (Visegrád)	Sequential isomorphisms and endomorphisms of Hilbert space effect algebras (Molnár)
Numbers, Functions, Equations 2013 (Visegrád)	On some classes of partial difference equations (Gselmann)
Sz.-Nagy Centennial Conference (Szeged)	Reflexivity of automorphism groups and isometry groups of some operator structures (Molnár)
Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének szemináriuma (Szeged)	Izometriák és izomorfizmusok (Molnár)

Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének hallgatói szemináriuma (Szeged)	Operátorstruktúrákra vonatkozó megőrzési problémákról (Nagy)
Szeminárium a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Analízis Tanszékén (Budapest)	Általánosított Mazur-Ulam tételek és mátrixterek izometriái (Molnár)
Szeminárium a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Analízis Tanszékén (Budapest)	Egy mátrix- és egy geometriai probléma (Gehér)
Szeminárium a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Analízis Tanszékén (Budapest)	Kapcsolatok felcserélhetőség, monotonitás és konvexitás között C^* -algebrákon (Virosztek)
Szeminárium a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Analízis Tanszékén (Budapest)	Grassmann terek izometriái (Gehér)
Szeminárium a Rényi Alfréd Kutatóintézetben (Budapest)	Wigner tétele kvantummechanikai szimmetriákról (Gehér)
Szeminárium a Szegedi Tudományegyetem Elméleti Fizikai Tanszékén (Szeged)	Wigner tétele kvantummechanikai szimmetriákról (Gehér)
Tanszéki Szeminárium, Debreceni Egyetem, Analízis Tanszék (Debrecen)	Maps on classes of linear operators preserving measure of commutativity (Gehér)
The 10th International Students' Conference on Analysis (Noszvaj)	Transformations on positive definite matrices preserving generalized distance measures (Szokol)
The Fourteenth Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities (Hajdúszoboszló)	On the standard K -loop structure of positive invertible elements in a C^* -algebra (Molnár)
The Fourteenth Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities (Hajdúszoboszló)	Transformations on positive definite matrices preserving generalized distance measures (Szokol)
The Fourteenth Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities (Hajdúszoboszló)	Maps preserving the p -norm of linear combinations of positive operators (Nagy)
Varecza Árpád Emléknapp (Nyíregyháza)	Isometries of matrix spaces (Molnár)
Young Functional Analysts' Meeting 2014 (Debrecen)	Transformations on sets of linear operators that preserve measure of commutativity (Nagy)
Young Functional Analysts' Meeting 2014 (Debrecen)	Transformations on positive definite matrices preserving generalized distance measures (Szokol)
Young Functional Analysts' Meeting 2014 (Debrecen)	An elementary proof of Wigner's theorem (Gehér)

A beszámolási időszakban külföldi rendezvényen tartott tudományos előadások

Rendezvény	Előadás címe
10th Workshop on Functional Analysis and its Applications in Mathematical Physics and Optimal Control (Szlovákia)	Isometries and isomorphisms on positive definite matrices (Molnár)
11th Biennial Meeting of the International Quantum Structure Association (Olaszország)	Sequential isomorphisms and endomorphisms of Hilbert space effect algebras (Molnár)
11th Biennial Meeting of the International Quantum Structure Association (Olaszország)	On some isometries of density operators (Nagy)
2014 CMS Summer Meeting (Kanada)	Transformations on density operators preserving quantum relative entropy or related quantities (Molnár)
20th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS 2016) (Belgium)	Symmetries on quantum pure states (Gehér)
20th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS 2016) (Belgium)	Preservers on positive matrices and operators (Molnár)
20th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS 2016) (Belgium)	Maps on quantum states preserving Bregman and Jensen divergences (Virosztek)
20th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS 2016) (Belgium)	Characterization of Operator monotone and Concave functions in several variables (Pálfa)
51st International Symposium on Functional Equations (Lengyelország)	The Lukács theorem on symmetric cones (Gselmann)
51st International Symposium on Functional Equations	Transformations on density operators leaving f -

(Lengyelország)	divergences invariant (Nagy)
51st International Symposium on Functional Equations (Lengyelország)	Separation by convex Beckenbach families (Szokol)
52nd International Symposium on Functional Equations (Ausztria)	Mappings on sets of Hilbert space operators that leave the norm of commutators invariant (Nagy)
52nd International Symposium on Functional Equations (Ausztria)	Maps preserving geodesic and their connection with relative entropy (Szokol)
9th Workshop on Functional Analysis and its Applications in Mathematical Physics and Optimal Control (Szlovákia)	Maps on classes of linear operators preserving measure of commutativity (Nagy)
9th Workshop on Functional Analysis and its Applications in Mathematical Physics and Optimal Control (Szlovákia)	Transformations on density operators leaving f-divergences invariant (Szokol)
9th Workshop on Functional Analysis and its Applications in Mathematical Physics and Optimal Control (Szlovákia)	Which positive operator can be the asymptotic limit of a contraction or a power-bounded operator? (Gehér)
Advanced School and Workshop on Matrix Geometries and Applications (Olaszország)	Isometries and isomorphisms of some spaces of matrices (Molnár)
Algebra & logic seminar, Department of Mathematics, University of Denver (USA)	On an operation on the positive definite cone of a C^* -algebra (Molnár)
AMS 2013 Spring Southeastern Section Meeting (USA)	Isometries of some nonlinear spaces of operators (Molnár)
AMS Sectional Meeting (Fall Southeastern Sectional Meeting) (USA)	Isometries of Grassmann spaces (Gehér)
AMS Sectional Meeting (Fall Southeastern Sectional Meeting) (USA)	Linear bijections on von Neumann factors commuting with lambda-Aluthge transform (Molnár)
Analysis Seminar, University of Innsbruck (Ausztria)	Transformations on positive definite matrices preserving distance measures (Molnár)
Banach Algebras and Applications (Svédország)	Asymptotic behaviour and cyclic properties of tree-shift operators (Gehér)
CIMPA Research School on "Operator theory and the principles of quantum mechanics" (Marokkó)	Quantum structures and their transformations (Molnár)
Colloquium at the Department of Applied Mathematics, National Sun Yat-sen University (Tajvan)	Preserver problems on quantum structures (Molnár)
Colloquium at the Department of Mathematical Sciences, The University of Memphis (USA)	Generalized Mazur-Ulam theorems and isometries of matrix spaces (Molnár)
Colloquium at the Department of Mathematics, University of Manitoba (Kanada)	An operation on the positive definite cone of a C^* -algebra and its algebraic properties (Molnár)
Colloquium at the Department of Mathematics, Waseda University (Japán)	On isometries of some matrix spaces (Molnár)
Colloquium at the Indian Statistical Institute (India)	Preserver problems (Molnár)
Commutative algebra, Banach algebras (preserver problem), Hypergroups and their related topics (Japán)	Transformers of operator means (Molnár)
Cut Locus (Thaiföld)	Gradient flows in K -convex and $CAT(1)$ -spaces (Pálfi)
Events of Functional Analysts at NSYSU (Tajvan)	Is it possible to determine a point lying in a simplex if we know the distances from the vertices? (Gehér)
Events of Functional Analysts at NSYSU (Tajvan)	Isometries of Grassmann spaces (Gehér)
Events of Functional Analysts at NSYSU (Tajvan)	Transformations on positive matrices and operators (Molnár)
Events of Functional Analysts at NSYSU (Tajvan)	Maps on quantum states and positive definite matrices preserving Bregman and Jensen divergences (Virosztek)
Events of Functional Analysts at NSYSU (Tajvan)	Continuous Jordan triple endomorphisms of P_2 and endomorphisms of the Einstein gyrogroup (Virosztek)
Geometric Ergodic Theory and Matrix Manifold Learning (Koreai Köztársaság)	Existence and uniqueness of the L_1 -Karcher mean (Pálfi)
International Linear Algebra Society 2013 Meeting (USA)	Some non-linear preservers on quantum structures (Molnár)
International Linear Algebra Society 2013 Meeting (USA)	Transformations on density matrices preserving the Holevo bound (Nagy)
International Conference of The Indian Mathematics	Commutativity in operator algebras (Molnár)

Consortium (TMC) in cooperation with American Mathematical Society (AMS) (India)	
International Conference on Preserver Problems and Related Topics (Japán)	Generalized Mazur-Ulam theorems and isometries of positive definite cones in operator algebras (Molnár)
International Linear Algebra Society (ILAS) 2014 Meeting (Koreai Köztársaság)	Isometries and isomorphisms of spaces of positive definite and unitary matrices (Molnár)
International Linear Algebra Society (ILAS) 2014 Meeting (Koreai Köztársaság)	Transformations on density operators preserving quantum f -divergences (Nagy)
International Workshop on Applied Analysis and Optimization 2016 (Tajvan)	A natural generalization of Uhlhorn's version of Wigner's theorem (Gehér)
International Workshop on Applied Analysis and Optimization 2016 (Tajvan)	Maps compatible with operator means (Molnár)
International Workshop on Applied Analysis and Optimization 2016 (Tajvan)	Quantum f -divergence preserving maps on positive semidefinite operators (Virosztek)
International Workshop on Functional Analysis (Románia)	Isometries of nonlinear structures of linear operators (Molnár)
International Workshop on Functional Analysis (Románia)	Maps on density operators preserving f -divergences (Szokol)
International Workshop on Operator Theory 2014 (Nagy-Britannia)	Asymptotic behaviour and similarity problems for power bounded Hilbert space operators (Gehér)
IWOTA 2013 (India)	Isometries of certain nonlinear spaces of matrices and operators (Molnár)
IWOTA 2013 (India)	Tree-shift operators and their cyclic properties (Gehér)
IWOTA 2014 (Hollandia)	On the standard K -loop structure of positive invertible elements in a C^* -algebra (Molnár)
K&K Analysis Seminar (Ausztria)	Asymptotic behaviour and similarity problems for power bounded Hilbert space operators (Gehér)
K&K Analysis Seminar (Ausztria)	On the standard K -loop structure of positive invertible elements in a C^* -algebra (Molnár)
Mat Triad 2015 (Portugália)	Isometries of Grassmann spaces (Gehér)
Mat Triad 2015 (Portugália)	Transformations preserving norms of means of positive operators (Szokol)
Mathphys Analysis Seminar (Ausztria)	Continuous Jordan triple endomorphisms and preservers of the relativistic sum (Virosztek)
Matrices and Operators (Koreai Köztársaság)	Characterization of operator monotone and concave functions in several variables (Pálfia)
Operator Algebra Seminar, Department of Mathematics, University of Rome "Tor Vergata" (Olaszország)	Isometries and isomorphisms of some spaces of matrices (Molnár)
Operator Algebras Seminar (Olaszország)	Connections between centrality and local monotonicity of certain functions on C^* -algebras (Virosztek)
Operator Theory Workshop (Egyesült Királyság)	Asymptotic behaviour of operators which are similar to normal operators (Gehér)
Preserver Problems and Their Related Topics (Japán)	Commutativity in operator algebras (Molnár)
Quantum Information Seminar (Egyesült Királyság)	A Natural Generalization of Uhlhorn's Version of Wigner's Theorem (Gehér)
Quantum information theory and related topics 2016 (Japán)	Loewner's Theorem in several variables (Pálfia)
Recent Advances in Operator Theory and Operator Algebras 2016 (India)	Transformations of the positive cone in operator algebras (Molnár)
Recent Advances in Operator Theory and Operator Algebras 2016 (India)	Connections between centrality and local monotonicity of certain functions on C^* -algebras (Virosztek)
Recent Advances in Operator Theory and Operator Algebras 2016 (India)	Loewner's Theorem in several variables (Pálfia)
Recent Developments in Operator Algebras (Japán)	Loewner's Theorem in several variables (Pálfia)
Researches on isometries from various viewpoints (Japán)	Isometries as isomorphisms (Molnár)
Seminar at the Department of Applied Mathematics, National Sun Yat-sen University (Tajvan)	Maps on positive definite matrices preserving generalized distance measures (Szokol)
Seminar at the Department of Applied Mathematics, National Sun Yat-sen University (Tajvan)	Transformations on spaces of unitary or positive definite matrices: isometries and isomorphism (Molnár)
Seminar at the Department of Applied Mathematics,	Reflexivity of automorphism groups and isometry

National Sun Yat-sen University (Tajvan)	groups of some operator structures (Molnár)
Seminar at the Department of Applied Mathematics, National Sun Yat-sen University (Tajvan)	Transformations on density operators preserving quantum f-divergences (Szokol)
Seminar at the Department of Applied Mathematics, National Sun Yat-sen University (Tajvan)	Maps on structures of operators preserving norms of linear combinations (Nagy)
Seminar at the Department of Applied Mathematics, National Sun Yat-sen University (Tajvan)	Transformations preserving norms of means of positive operators and nonnegative functions (Szokol)
Seminar at the Department of Mathematics and Computer Science, West University of Timisoara (Románia)	On certain operations on the set of positive invertible elements in a C*-algebra (Molnár)
Seminar at the Department of Mathematics, The University of Mississippi (USA)	Generalized Mazur-Ulam theorems and isometries of matrix spaces (Molnár)
Seminar at the Department of Mathematics, University of Ljubljana (Szlovénia)	C*-algebras with isometric unitary groups are Jordan *-isomorphic (Molnár)
Seminar at the Department of Mathematics, University of Ljubljana (Szlovénia)	Commutativity preserving maps on sets of linear operators (Nagy)
Seminar at the Department of Mathematics, University of Ljubljana (Szlovénia)	Maps on density operators preserving f-divergence (Szokol)
Seminar at the Department of Mathematics, University of Ljubljana (Szlovénia)	Kolmogorov-Smirnov isometries of the space of generalized distribution functions (Szokol)
Seminar at the Department of Mathematics, University of Wyoming (USA)	Algebraic properties of some operations on C*-algebras (Molnár)
Seminar at the Nihon University (Japán)	Linear bijections on von Neumann factors commuting with lambda-Aluthge transform (Molnár)
Seminar at the University of Ljubljana (Szlovénia)	A matrix problem and a geometry problem (Gehér)
Seminar at the University of Ljubljana (Szlovénia)	On Hilbert space operators similar to normal operators (Gehér)
Seminar at the University of Primorska (Szlovénia)	A matrix problem and a geometry problem (Gehér)
Seminar of Department of Mathematics and Department of Physics, University of Calabria (Olaszország)	Nonlinear preserver transformations on some quantum structures (Molnár)
Seminar of the Department of Physics, University of Calabria (Olaszország)	Preserver problems on quantum structures (Molnár)
Seminar of the Institute of Analysis, TU Dresden (Németország)	Isometries of nonlinear operator structures (Molnár)
Seminar of the Institute of Analysis, TU Dresden (Németország)	New results on preservers - Transformations on positive matrices and operators (Molnár)
Seventh Conference on Function Spaces (USA)	Preservers for the p-norm of linear combinations of positive operators (Nagy)
Seventh Conference on Function Spaces (USA)	Isomorphisms and isometries of positive definite cones and unitary groups in operator algebras (Molnár)
The 11th International Students' Conference on Analysis (Lengyelország)	Surjective isometries of the space of generalized distribution functions (Szokol)
The 15th Katowice-Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities (Lengyelország)	Transformations preserving norms of means of positive operators and nonnegative functions (Szokol)
The 15th Katowice-Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities (Lengyelország)	Resolving sets in metric spaces (Nagy)
The 9th International Students' Conference on Analysis (Lengyelország)	Maps on sets of density operators preserving the Holevo quantity (Nagy)
The 9th International Students' Conference on Analysis (Lengyelország)	Separation by convex interpolation families (Szokol)
The Seventh Linear Algebra Workshop (Szlovénia)	An elementary proof of Wigner's theorem on quantum mechanical symmetry transformations (Gehér)
The Thirteenth Katowice-Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities (Lengyelország)	On some classes of partial difference equations (Gselmann)
The Thirteenth Katowice-Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities (Lengyelország)	Transformations of the unitary group on a Hilbert space (Molnár)
The Thirteenth Katowice-Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities (Lengyelország)	Maps on sets of density operators preserving the Holevo quantity (Nagy)
The Thirteenth Katowice-Debrecen Winter Seminar on	Maps on density operators preserving f-divergences

Functional Equations and Inequalities (Lengyelország)	(Szokol)
TSSRK Fest (India)	Preservers on positive matrices and operators (Molnár)
Winter School in Abstract Analysis (Csehország)	Preservers: transformations on quantum structures and isometries of matrix spaces (Molnár)
Young Functional Analysts' Workshop 2014 (Nagy-Britannia)	An elementary proof of Wigner's theorem (Ghér)
Zagreb Workshop on Operator Theory (Horvátország)	Isomorphisms and generalized isometries of positive definite cones and unitary groups in operator algebras (Molnár)