Fejezetek az algebrából gyakorlat, 1. feladatsor, február 17.

A_n egyszerű, ha $n \geq 5$. Ha $|G|$ prímhatvány, akkor $Z(G) \neq 1$.

Legyen G véges csoport, p prím, q pedig egy olyan p-hatvány, melyre $q \,\big|\, |G|$. Ekkor teljesülnek az alábbiak.

1. Van $H \leq G$, $|H| = q$, és az ilyen részcsoportok száma $\equiv 1 \pmod p$. Speciálisan G-ben van p-Sylow részcsoport.
2. Bármely $H \leq G$, melyre teljesül $|H| = q$, belekonjugálható bármely p-Sylowba. Speciálisan bármely két p-Sylow konjugált, és bármely p-hatványrendű részcsoport része egy p-Sylownak.
3. Legyen P egy p-Sylow G-ben. Ekkor a p-Sylowok száma G-ben $|G : N_G(P)| \,\Big|\, |G : P|$.

0. Legyen H és K két részcsoportja a G csoportnak. A HK komplexusszorzaton a $HK = \{h \cdot k \mid h \in H, k \in K\}$ részhalmazt értjük. Ez általában nem lesz részcsoport.
   a) Igazoljuk, hogy HK pontosan akkor részcsoport G-ben, ha $HK = KH$.
   b) Ha H és K közül az egyik normálosztó G-ben, akkor HK részcsoport G-ben.
   c) Bizonyítsuk be, hogy ha H és K véges részcsoportok, akkor $|HK| = \frac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|}$.
1. *a)* Írjuk fel D_3 Cayley-reprezentációjában az egyes elemek S_6-beli képét.
   b) Igazoljuk, hogy egy egyszerű csoport elemszáma nem lehet $4k + 2$ alakú. (*Ötlet:* tekintsük a Cayley-reprezentációt, számoljuk ki egy 2 rendű elem képét, majd igazoljuk, hogy a páros permutációk egy 2 indexű részcsoportot alkotnak G képében.)
2. Legyen $H \leq G$, és tekintsük G hatását a baloldali mellékosztályokon balszorzással, azaz $g * (aH) = gaH$. Igazoljuk, hogy ez hatás, és lássuk be, hogy a magja $\cap_{g\in G} H^g$. Ezt követően igazoljuk az alábbiakat, ahol G *egyszerű csoport*.
   a) Ha G-ben van k indexű H részcsoport ($k \geq 2$), akkor G izomorf S_k egy részcsoportjával, és így $|G| \leq k!$ (sőt, osztója is).
   b) Végtelen egyszerű csoportnak nincs véges indexű valódi részcsoportja.
   c) Vegyük észre, hogy ha $k = 2, 3$, akkor $G \simeq (\mathbb{Z}_k, +)$,
   d) Igazoljuk, hogy egy egyszerű csoportban nincs 4 indexű részcsoport.
   e) Igazoljuk, hogy nincs $4p^\alpha$ rendű egyszerű csoport (p prím).
   f) Igazoljuk, hogy ha $k \geq 5$, akkor $|G| \,\Big|\, \frac{k!}{2}$ is igaz. (*Ötlet:* 1b feladat.)
   g) Ha G-ben n_p darab p-Sylow van, akkor $|G| \,\Big|\, \frac{n_p!}{2}$.
3. Határozzuk meg az alábbi csoportok Sylow részcsoportjainak a számát és izomorfiatípusát: S_3, S_4, A_5, D_n.
4. *a)* Igazoljuk, hogy nincs 200, 204, 260, 56, 616, 120 rendű egyszerű csoport.
   b) Igazoljuk, hogy nincs pq, pqr, p^2q rendű egyszerű csoport (p, q, r különböző prímek).
   c) Igazoljuk, hogy nincs 60-nál kisebb rendű nemkommutatív egyszerű csoport.
   d) Ha G egyszerű, $|G| = 60$, akkor van benne 5 indexű részcsoport, és így $G \simeq A_5$.

2,3. Legyen G véges csoport, p a legkisebb prímosztója, és tegyük fel, hogy van $H \leq G$, $|G : H| = p$. Igazoljuk, hogy $H \lhd G$. (*Ötlet:* használjuk a 2. feladatban szereplő hatást).

5. **[Frattini-elv]** Legyen $N \lhd G$ (G véges), P az N egy p-Sylowja. Igazoljuk, hogy ekkor $G = NN_G(P)$, és $N_G(P)$ tartalmazza G egy p-Sylow részsoportját.
6. Legyen P egy p-Sylowja G-nek, és tegyük fel, hogy $N_G(P) \leq H \leq G$. Igazoljuk, hogy $N_G(H) = H$ és $|G : H| \equiv 1 \pmod p$.