Fejezetek az algebrából gyakorlat, 4. feladatsor, március 9.

0. Igazoljuk, hogy a nilpotens csoportok osztálya zárt a részcsoportképzésre, faktorcsoportra, véges direkt szorzatra, de bővítésre nem.
1. Mik a 6, 8, 10, 12, 15, 24-elemű csoportok?
2. Hány $pq, 4p, p^2, p^3$-rendű csoport van (p,q pozitív prímek)?
3. Feloldhatóak illetve nilpotensek-e az alábbi csoportok? Határozzuk meg a kommutátor- és a Frattini részcsoportjukat: $(\mathbb{Z}_n, +)$, a Klein csoport, S_3, A_4, S_4, A_5, D_4, D_6.
4. Igazoljuk, hogy ha $|P| = p^3$, P nem kommutatív, akkor $Z(P) = P' = \Phi(P)$, és ez egy p rendű részcsoport, mely szerinti faktor izomorf $(\mathbb{Z}_p, +)^2$-tel.
5. *a)* Mutassuk meg, hogy ha R egységelemes gyűrű, I ideál R-ben, melyre $I^n = 0$, akkor
$$1 + I = \{\, 1 + x \mid x \in I \,\}$$
nilpotens csoportot alkot.
   b) Mi lesz ez a csoport, ha R az $n \times n$-es felső háromszögmátrixok gyűrűje egy T test felett, I pedig a szigorúan felső háromszögmátrixok ideálja? Mi lesz az alsó- és felső centrális lánc a csoportban? Melyik csoporttal izomorf $n = 3$, $T = \mathbb{Z}_2$-re?
   c) Jelölje $T(n, T)$ a T test feletti invertálható felső háromszögmátrixok csoportját a szorzásra, $U(n, T)$ pedig a 5b feladatban definiált csoportot. Igazoljuk, hogy ha $|T| = p$, akkor $U(n, T)$ egy p-Sylowja $T(n, T)$-nek, illetve $GL(n, T)$-nek.
6. Van $\varphi\colon\ (\mathbb{Z}_p, +) \to \operatorname{Aut}\big(\mathbb{Z}_{p^2}, +\big)$ beágyazás, és így létezik a nemkommutatív p^3 elemű $\big(\mathbb{Z}_{p^2}, +\big) \rtimes_\varphi (\mathbb{Z}_p, +)$ szemidirekt szorzat is, mely nem izomorf $U(3, \mathbb{Z}_p)$-vel.
7. *a)* Igazoljuk, hogy egy véges csoport pontosan akkor nilpotens, ha bármely két, egymáshoz relatív prím rendű eleme felcserélhető egymással.
   b) Igazoljuk, hogy egy véges csoport pontosan akkor nilpotens, ha bármely két eleme által generál részcsoport nilpotens.
8. Igazoljuk, hogy $\Phi(G \times H) = \Phi(G) \times \Phi(H)$.
9. Legyen P egy véges p-csoport. Igazoljuk az alábbiakat.
   a) $\Phi(P) = P^p P'$, ahol $P^p = \langle g^p \mid g \in P \rangle$.
   b) $P/\Phi(P)$ elemi Abel féle p-csoport.
   c) $|P/\Phi(P)| = p^r$ esetén P minden minimális generátorrendszerének elemszáma r.
10. Legyen G nilpotens, $N \lhd G$, $N \neq \{\, 1 \,\}$. Igazoljuk, hogy $N \cap Z(G) \neq \{\, 1 \,\}$.
(*Ötlet:* Tekintsük a legkisebb i-t, hogy $N \cap Z_i(G) \neq \{\, 1 \,\}$.)
11.* Legyen G véges csoport. Igazoljuk az alábbiakat.
   a) G nilpotens $\iff$ $G/\Phi(G)$ nilpotens. Köv.: $G/\Phi(G)$ vagy Abel vagy nem is nilpotens. (*Ötlet:* $P \in Syl_p(G)$ esetén $P\Phi(G)/\Phi(G) \in Syl_p\,(G/\Phi(G))$, Frattini-elv.)
   b) Ha $\Phi(G) \leq N \lhd G$, melyre $N/\Phi(G)$ nilpotens, akkor N nilpotens. Köv.: $N = \Phi(G)$-re? (*Ötlet:* $P \in Syl_p(N)$ esetén $P\Phi(G)/\Phi(G) \in Syl_p\,(N/\Phi(G))$, Frattini-elv.)
   c) Ha $N \lhd G$, melyre $G/\Phi(N)$ nilpotens, akkor G is nilpotens. Köv.: Ha N és G/N' nilpotens, akkor G is nilpotens. (*Ötlet:* $P\Phi(N)/\Phi(N) \in Syl_p\,(G/\Phi(N))$, Frattini-elv.)
12.* *a)* Induktívan legyen $[X_1, \ldots, X_n] = [[X_1, \ldots, X_{n-1}], X_n]$. Igazoljuk, hogy G-nek van n hosszú centrális lánca $\iff$ $[G, \ldots, G] = 1$ (itt n darab G kommutátora áll).
   b) Legyen G csoport, $N, K \lhd G$ nilpotens normálosztók. Igazoljuk, hogy $NK \lhd G$ is nilpotens normálosztó. (*Ötlet:* 12a feladat.)
   c) Következtessünk arra, hogy véges G csoportban van egy egyértelmű $F(G)$-vel jelölt maximális nilpotens normálosztó, neve *Fitting részcsoport.* Ekkor $\Phi(G) \leq F(G)$.
   d) Ha $G \neq \{\, 1 \,\}$ véges feloldható csoport, akkor $F(G) \neq \{\, 1 \,\}$. (*Ötlet:* $N \lhd_{\min} G$.)
   e) Igazoljuk, hogy $F\,(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$. (*Ötlet:* 11b feladat.) Köv.: 11a feladat.