Fejezetek az algebrából gyakorlat, 5. feladatsor, március 24.

1. Az alábbi definiáló relációkkal megadott csoportoknak határozzuk meg a rendjét, és döntsük el, hogy izomorfak-e valamelyik ismert csoporttal:

a) $\langle a \mid a^n = 1 \rangle$,
b) $\langle a \mid a^n = 1, a^k = 1 \rangle$,
c) $\langle a, b \mid a^n = 1, b^k = 1, ab = ba \rangle$,
d) $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^7 = 1, aba^{-1} = b^{-1} \rangle$,
e) $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^7 = 1, aba^{-1} = b^2 \rangle$,
f) $\langle a, b \mid a^3 = 1, b^7 = 1, aba^{-1} = b^2 \rangle$,
g) $\langle a, b \mid a^6 = 1, b^2 = a^3, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$,
h) $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^3 = 1 \rangle$,
i) $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^n = 1 \rangle$,
j) $\langle a, b \mid a^3 = b^2 = 1, (ab)^3 = 1 \rangle$,
k) $\langle a, b \mid a^3 = b^2 = 1, (ab)^4 = 1 \rangle$,
l) $\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^3 = 1, ab = ba, cac^{-1} = b \rangle$,
m) $\langle a, b \mid a^4 = 1, b^2 = a^2, aba^{-1} = b^{-1} \rangle$,
n) $\langle a, b \mid a^3 = 1, b^4 = 1, ba = ab^3 \rangle$,
o) $\langle a, b, c \mid a^4 = b^2 = c^2 = 1, ac = ca, bc = cb, ab = ba^3 \rangle$.

2. Legyen $B(k, N) = \langle x_1, \dots, x_k \mid w^N = 1,\ \text{minden } w \text{ szóra} \rangle$.
   a) Igazoljuk, hogy $B(k, 2) \simeq (\mathbb{Z}_2, +)^k$.
   *b)** Igazoljuk, hogy $B(k, 3)$ véges.
   *c)*** Döntsük el, hogy $B(2, 5)$ véges vagy végtelen.
3. Bizonyítsuk be, hogy ha F szabad csoport, akkor tetszőleges $\alpha \colon G \to H$ szürjektív homomorfizmusra az F csoport minden H-ba menő φ homomorfizmusa „keresztülvezethető” az α leképezésen, azaz van olyan $\psi \colon F \to G$ homomorfizmus, hogy $\varphi = \alpha \circ \psi$.
4.* Igazoljuk, hogy a két elemmel generált szabad csoportak van olyan részcsoportja, mely izomorf a megszámlálhatóan generált szabad csoporttal.
   (*Ötlet:* $x^i y x^{-i}$ szabad generátorrendszert alkot.)
5.* A szabad csoport egy elemét nevezzük nullösszegűnek, ha minden x generátorra a szóban előforduló x hatványok kitevőinek összege 0. Például $x^2y^{-3}x^{-1}zx^{-1}y^2z^{-1}y$ ilyen, mert $2 - 1 - 1 = 0$, $-3 + 2 + 1 = 0$, $1 - 1 = 0$. Igazoljuk, hogy a szabad csoport kommutátor részcsoportja a nullösszegű szavak halmazából áll.

$G \leq S_X$ *(szigorúan) k-tranzitív*, ha tetszőleges páronként különböző $x_1, \dots, x_k \in X$ és páronként különböző $y_1, \dots, y_k \in X$ esetén van $g \in G$, hogy $g(x_i) = y_i$ minden $i \in \{ 1, \dots, k \}$-ra. *Reguláris:* szigorúan 1-tranzitív.

6. (Burnside-lemma) Legyen $G \leq S_X$. Igazoljuk, hogy G-ben a fixpontok átlagos száma megegyezik G orbitjainak a számával! Ha G tranzitív, akkor van fixpontmentes elem.
7. $G \leq S_X$ reguláris $\iff$ G tranzitív X-en és minden stabilizátor 1 elemű.
8. Legyen $G \leq S_X$ reguláris. Igazoljuk, hogy G hatása X-en ekvivalens a Cayley-hatással.
9. Legyen $G \leq S_X$ tranzitív Abel csoport. Igazoljuk, hogy G reguláris X-en.
10. Igazoljuk, hogy ha G k-tranzitív egy n elemű halmazon, akkor $n(n-1)\dots(n-k+1)$ osztja $|G|$-t, és pontosan akkor egyenlő vele, ha G szigorúan k-tranzitív.
11. Legyen $G \leq S_X$ tranzitív, $H \leq G$ egy $x \in X$ elem stabilizátora. Igazoljuk, hogy G (szigorúan) k-tranzitív X-en $\iff$ H (szigorúan) $(k-1)$-tranzitív $X \setminus \{ x \}$-en.
12. Igazoljuk, hogy A_n szigorúan $(n-2)$-tranzitív $(n \geq 3)$, S_n szigorúan n, $(n-1)$-tranzitív.
13. Legyen $\mathrm{Aff}(n, T) = \{ x \mapsto Ax + b \mid A \in GL(n, T), b \in T^n \}$. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Aff}(n, T) \simeq$ $\simeq (T^n, +) \rtimes GL(n, T)$. Mikor hat $\mathrm{Aff}(n, T)$ szigorúan 3- illetve 2-tranzitívan T^n-en?
14. Legyen T test, $L(T) = \left\{ x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \mid a, b, c, d \in T, ad - bc \neq 0 \right\}$. Igazoljuk, hogy $L(T) \simeq$ $\simeq PGL(2, T)$, valamint $L(T)$ szigorúan 3-tranzitív $T \cup \{ \infty \}$-en.

$G \leq S_X$-re $\sim$ *kongruencia* X-en, ha ekvivalenciareláció és $x \sim y$ esetén $g(x) \sim g(y)$ minden $g \in G$-re. $G \leq S_X$ *primitív csoport*, ha tranzitív és csak a két triviális kongruencia van X-en $\iff G_x \leq_{max} G$. Ha G primitív, akkor $1 \neq N \lhd G$ tranzitív, mert N orbitjai kongruencia.

15. Az alábbi permutációcsoportokról döntsük el, hogy primitívek-e (illetve mikor primitívek): A_3, A_4, az A_4 csoport négyelemű normálosztója, D_n a szabályos n-szög n csúcsán, a kocka szimmetriacsoportja a kocka 8 csúcsán, illetve 12 élén, illetve 6 lapján, tetszőleges G véges csoport automorfizmuscsoportja $G \setminus \{1\}$-en.
16. Igazoljuk, hogy ha G úgy hat egy legalább háromelemű halmazon, hogy csak a két triviális kongruenciája van, akkor G tranzitív.
17. Igazoljuk, hogy ha $G \leq S_X$ primitív, $3 \leq |X|$ páros, akkor $|G|$ osztható 4-gyel.
18. Milyen n-ekre van S_n-ben Q-val izomorf részcsoport?
19. Legyen $N \lhd_{\min} G \leq S_X$. Igazoljuk, hogy ha N tranzitív Abel, akkor G primitív.
20. Határozzuk meg S_n primitív nilpotens részcsoportjait.
21.* Igazoljuk, hogy ha G véges permutációcsoport, akkor $\Phi(G)$ nem lehet tranzitív. Speciálisan, ha G primitív, akkor $\Phi(G) = \{id\}$.

Frobenius csoport: $G \leq S_X$ tranzitív, nem reguláris, ahol minden (id-től különböző) elemnek legfeljebb 1 fixpontja van. *Mag:* $N = \{id\} \cup \{\text{fixpontmentes elemek}\}$. Frobenius-tétel: $N \lhd G$ (nehéz). Egy X-beli pont stabilizátorát *komplementumnak* hívjuk.

22. Igazoljuk, hogy az alábbi csoportok Frobenius csoportok: S_3, D_{2k+1}, A_4, $\mathrm{Aff}(1,T)$. Írjuk fel őket a mag és a komplementum szemidirekt szorzataként.
23. Legyen $H, K \leq G$. Bizonyítsuk be, hogy G hatása H bal mellékosztályain balszorzással pontosan akkor ekvivalens a K balmellékosztályain való balszorzással, ha $K = gHg^{-1}$.
24. Legyen $G \leq S_X$ Frobenius csoport, H az $x \in X$ stabilizátora. Mutassuk meg, hogy $g \in G \setminus H$-ra $gHg^{-1} \cap H = \{1\}$.
25. Legyen $H \leq G$ úgy, hogy minden $g \in G \setminus H$-ra $H \cap gHg^{-1} = \{1\}$. Igazoljuk, hogy G hatása H bal mellékosztályain balszorzással Frobenius csoportot ad, mely komplementumai H konjugáltjai, magja pedig $N = \{id\} \cup (G \setminus \cup_{g \in G} gHg^{-1})$. Bizonyítsuk be, hogy $|N| = |G:H|$, és ha N részcsoport, akkor $N \lhd G$ is. Igazoljuk, hogy ekkor $G = N \rtimes H$.
26. Mi a szükséges és elégséges feltétele, hogy egy $N \rtimes_\varphi H$ szemidirekt szorzat olyan Frobenius csoport legyen, melynek magja N és H egy komplementuma?
27. Legyen $G \leq S_X$ Frobenius csoport, melynek magja N és H egy komplementuma. Igazoljuk, hogy G hatása X-en ekvivalens G azon hatásával N-en, ahol H elemei konjugálással, N elemei pedig balszorzással hatnak N-en. Igazoljuk, hogy $|H|$ osztja $(|N|-1)$-et.