

Testelmélet gyakorlat, 9. feladatsor, április 28.

1. Szerkeszthetőek-e az alábbi számok (\mathbb{Q} felett)?

a) $\sqrt{2}$, b) $\sqrt[3]{2}$, c) $\sqrt[6]{2}$, d) $\sqrt[7]{2}$, e) $\sqrt{2} - \sqrt[4]{3}$, f) $\sqrt[4]{\pi}$.

Melyek szerkeszthetőek a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\pi)$, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{222})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2222})$ testek felett?

2. Igazoljuk, hogy $\varphi(n)$ pontosan akkor 2-hatvány, ha $n = 2^m p_1 \dots p_k$, ahol minden $p_i = 2^{2^{k_i}} + 1$ alakú prím (Fermat prím), különböző k_i értékekkel. Megjegyezzük, hogy 2014-ben $k \leq 32$ -ig ismertek a Fermat prímekek ($k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$).
3. Mennyi $\cos(2\pi/n)$ foka \mathbb{Q} felett? Igazoljuk, hogy $\varphi(n)$ páros ha $n \geq 3$.
4. Milyen egész n -ekre szerkeszthető n fokos szög?
5. Adott egy szabályos 9-szög. Szerkeszthető-e szabályos 36-, 360-, 45-, 99-szög?
6. Szerkeszthető-e egyenlő szárú háromszög a szárából és a beírt kör sugarából?
7. Tetraéderesíthető-e a kocka, azaz szerkeszthető-e 1 térfogatú szabályos tetraéder?
8. Állapítsuk meg, hogy ha adott egy a területű ÚŰ , akkor szerkeszthető-e egy b területű ÁÁ , $a, b \in \{1, \pi\}$ és ÚŰ , $\text{ÁÁ} \in \{\text{négyzet, kör}\}$. (Ez 16 feladat.)
9. Lehet-e szöget ötödülni, hetedelni, kilencedelni, stb.?
10. Az alábbi adatok közül melyekből szerkeszthető egyenlőszárú háromszög:
 - a) szárhoz tartozó magasság, beírt kör sugara,
 - b) szárhoz tartozó magasság, köréírt kör sugara,
 - c) alap, beírt kör sugara,
 - d) alap, köréírt kör sugara,
 - e) alap, szárhoz tartozó szögfelező,
 - f) szár, szárhoz tartozó szögfelező?
11. Szerkeszthető-e háromszög két oldalából és az egyikhez tartozó szögfelezőből?
12. Legyen ε primitív 5-ödik egységgyök, $\eta_1 = \varepsilon + \varepsilon^4$, $\eta_2 = \varepsilon^2 + \varepsilon^3$. Számoljuk ki η_1 , η_2 összegét, szorzatát, majd fejezzük ki ε -t gyökjelekkel. A segítségével szerkesszük meg a szabályos ötszöget.
- 13.* Legyen p páratlan prím, ε primitív p -edik egységgyök. Mennyi a $\sum_{j=0}^{p-1} \varepsilon^{j^2}$ összeg? Mit mond ez $p = 17$ -re? Szerkesszünk szabályos 17-szöget.