Testelmélet gyakorlat, 10. feladatsor, május 4.

1. Soroljuk fel S_3 és S_4 tranzitív részcsoportjait. Mi lehet egy harmadfokú irreducibilis polinom Galois-csoportja?
2. Legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy n-edfokú irreducibilis polinom. Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ $\mathbb{Q}$ feletti Galois-csoportja pontosan akkor van az A_n alternáló csoportban, ha f diszkriminánsa egy racionális szám négyzete.
3. Legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy 4-edfokú irreducibilis polinom, G pedig $f(x)$ $\mathbb{Q}$ feletti Galois-csoportja. Mutassuk meg, hogy ha a harmadfokú rezolvense reducibilis, akkor $f(x)$ gyökei szerkeszthető számok. Spec., ekkor G a D_4 diédercsoporttal, a Z_4 ciklikus csoporttal vagy a K Klein-csoporttal izomorf.
4. Legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy 4-edfokú irreducibilis polinom, G pedig $f(x)$ $\mathbb{Q}$ feletti Galois-csoportja. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x)$ harmadfokú rezolvense irreducibilis, akkor G rendje osztható 3-mal.
5. Legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy 4-edfokú irreducibilis polinom, G az $f(x)$ $\mathbb{Q}$ feletti Galois-csoportja, $R_3(x)$ az $f(x)$ harmadfokú rezolvense, D az $f(x)$ diszkriminánsa. Az előző feladatok alapján igazoljuk az alábbi tételt.

$$\begin{array}{lll} \sqrt{D} \in \mathbb{Q}, \quad R_3(x) \text{ reducibilis} & \Rightarrow & G \cong K \\ \sqrt{D} \in \mathbb{Q}, \quad R_3(x) \text{ irreducibilis} & \Rightarrow & G \cong A_4 \\ \sqrt{D} \notin \mathbb{Q}, \quad R_3(x) \text{ reducibilis} & \Rightarrow & G \cong D_4 \text{ vagy } G \cong Z_4 \\ \sqrt{D} \notin \mathbb{Q}, \quad R_3(x) \text{ irreducibilis} & \Rightarrow & G \cong S_4 \end{array}$$

6. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x^4 + 4x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom gyökei negyedfokú, nem szerkeszthető számok.
7. Legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy p-edfokú irreducibilis polinom, p prím, G pedig legyen az $f(x)$ $\mathbb{Q}$ feletti Galois-csoportja. Tegyük fel, hogy $f(x)$-nek pontosan $p-2$ db valós gyöke van. Bizonyítsuk be, hogy $G \cong S_p$.

Testelmélet gyakorlat, 10. feladatsor, május 4.

1. Soroljuk fel S_3 és S_4 tranzitív részcsoportjait. Mi lehet egy harmadfokú irreducibilis polinom Galois-csoportja?
2. Legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy n-edfokú irreducibilis polinom. Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ $\mathbb{Q}$ feletti Galois-csoportja pontosan akkor van az A_n alternáló csoportban, ha f diszkriminánsa egy racionális szám négyzete.
3. Legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy 4-edfokú irreducibilis polinom, G pedig $f(x)$ $\mathbb{Q}$ feletti Galois-csoportja. Mutassuk meg, hogy ha a harmadfokú rezolvense reducibilis, akkor $f(x)$ gyökei szerkeszthető számok. Spec., ekkor G a D_4 diédercsoporttal, a Z_4 ciklikus csoporttal vagy a K Klein-csoporttal izomorf.
4. Legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy 4-edfokú irreducibilis polinom, G pedig $f(x)$ $\mathbb{Q}$ feletti Galois-csoportja. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x)$ harmadfokú rezolvense irreducibilis, akkor G rendje osztható 3-mal.
5. Legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy 4-edfokú irreducibilis polinom, G az $f(x)$ $\mathbb{Q}$ feletti Galois-csoportja, $R_3(x)$ az $f(x)$ harmadfokú rezolvense, D az $f(x)$ diszkriminánsa. Az előző feladatok alapján igazoljuk az alábbi tételt.

$$\begin{array}{lll} \sqrt{D} \in \mathbb{Q}, \quad R_3(x) \text{ reducibilis} & \Rightarrow & G \cong K \\ \sqrt{D} \in \mathbb{Q}, \quad R_3(x) \text{ irreducibilis} & \Rightarrow & G \cong A_4 \\ \sqrt{D} \notin \mathbb{Q}, \quad R_3(x) \text{ reducibilis} & \Rightarrow & G \cong D_4 \text{ vagy } G \cong Z_4 \\ \sqrt{D} \notin \mathbb{Q}, \quad R_3(x) \text{ irreducibilis} & \Rightarrow & G \cong S_4 \end{array}$$

6. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x^4 + 4x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom gyökei negyedfokú, nem szerkeszthető számok.
7. Legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy p-edfokú irreducibilis polinom, p prím, G pedig legyen az $f(x)$ $\mathbb{Q}$ feletti Galois-csoportja. Tegyük fel, hogy $f(x)$-nek pontosan $p-2$ db valós gyöke van. Bizonyítsuk be, hogy $G \cong S_p$.