Az abszolút geometria alapjai

Vincze Csaba

Debreceni Egyetem

2023. szeptember 18.

Tartalomjegyzék

1. Az abszolút geometria axiómái

Az abszolút geometria az euklideszi geometriának a párhuzamossági axiómától független része.

1.1. Illeszkedési axiómák, a Hilbert-féle illeszkedési tér

Nemdefiniált fogalmak: pont, egyenes és sík. Jelölje ezek halmazát rendre $\mathbb{E}$, $\mathbb{L}$ és $\mathbb{P}$. A pont, egyenes és sík közelebbi meghatározását mellőzzük. Ehelyett a közöttük lévő ún. illeszkedési reláció (kapcsolat) szabályait fogalmazzuk meg, mint axiómákat. Ha az illeszkedési reláció kielégíti az

(I1) Bármely két pontra illeszkedik egy és csak egy egyenes

(I2) Bármely egyenesre illeszkedik legalább két pont

(I3) Van három nem egy egyenesre illeszkedő pont

(I4) Bármely három nem egy egyenesre illeszkedő pontra illeszkedik egy és csak egy sík

(I5) Egyetlen sík sem az üreshalmaz

(I6) Ha egy egyenes két pontja illeszkedik egy síkra, akkor az egyenes is illeszkedik a síkra

(I7) Ha két síknak van közös pontja, akkor további közös pontjuk is van

(I8) Van négy nem egy síkra illeszkedő pont

illeszkedési axiómákat, akkor $(\mathbb{E}, \mathbb{L}, \mathbb{P})$ egy ún. Hilbert-féle illeszkedési tér. Az $(\mathbb{E}, \mathbb{L})$ pár Hilbert-féle illeszkedési sík, ha (I1)-(I3) teljesül. Az elmélet kifejtése két szálon fut: egyrészt az axiómákból, illetve a már bizonyított állításokból levezethető állítások megfogalmazása, másrészt pedig a fogalmak körének szélesítése a nemdefiniált fogalmak, illetve a már definiált fogalmak felhasználásával.

1. Állítás. *Két nem diszjunkt sík metszete egyenes.*

Bizonyítás. A következő axiómákra hivatkozunk:
I7. Ha két síknak van közös pontja, akkor további közös pontjuk is van
I1. Bármely két pontra illeszkedik egy és csak egy egyenes
I6. Ha egy egyenes két pontja illeszkedik egy síkra, akkor az egyenes is illeszkedik a síkra.
További pontokat a két sík metszetében kizár
I4. Bármely három nem egy egyenesre illeszkedő pontra illeszkedik egy és csak egy sík □

Az állítás megfogalmazásánál halmazelméleti terminológiát használtunk. Bár nem szükségszerű, hogy az egyenesek és a síkok pontokból álló részhalmazok legyenek, a szemléletnek tett engedmény megkönnyíti a fogalmazást.

1. Definíció. (térelemek kölcsönös helyzete: egyenesek) *Két egyenest metszőnek nevezünk, ha van közös pontjuk és nem esnek egybe. Az egyenesek kitérők, ha nincsenek egy síkban. Két egyenes párhuzamos, ha egy síkban vannak és nincs közös pontjuk, vagy ha egybeesnek.*

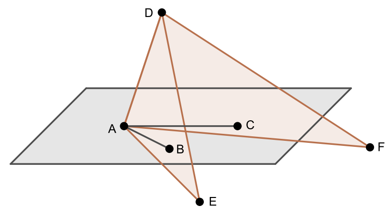
1. Feladat. Igazolja logikailag ekvivalens átalakításokkal, hogy a párhuzamosság a metsző, vagy kitérő állítás tagadása.

2. Definíció. (térelemek kölcsönös helyzete: síkok) *Két síkot metszőnek nevezünk, ha van közös pontjuk és nem esnek egybe. Két sík párhuzamos, ha nincs közös pontjuk, vagy ha egybeesnek.*

1. Megjegyzés. Az 1. Állítás szerint metsző síkok közös része egyenes.

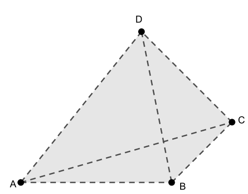
3. Definíció. (térelemek kölcsönös helyzete: egyenes és sík) *Egy egyenes és egy sík metsző, ha van közös pontjuk és az egyenes nem illeszkedik a síkra. Egy egyenes és egy sík párhuzamos, ha nincs közös pontjuk, vagy ha az egyenes illeszkedik a síkra.*

2. Állítás. *Egy Hilbert-féle illeszkedési tér minden síkja Hilbert-féle illeszkedési sík.*



1. ábra.

Bizonyítás. Legyen S a Hilbert-féle illeszkedési tér egy rögzített síkja. Az (I1) axióma követelménye - (I6) szerint - teljesül az S síkban, míg (I2) nyilvánvalóan öröklődik. A kérdés az, hogy teljesül-e (I3) is, léteznek-e A, B és $C \in S$ nem kollineáris (azaz nem egy egyenesre eső) pontok? A bizonyítást az (I5) axiómával kezdjük (1. ábra): legyen $A \in S$ egy tetszőleges pont. (I8) szerint a tér minden pontja nem illeszkedhet S-re, ezért felvehetünk egy $D \notin S$ pontot, mely egyértelműen meghatározza - (I1) szerint - az l_{AD} egyenest. Mivel (I3) érvényes a térben, választhatunk egy $E \notin l_{AD}$ pontot, mely egyértelműen meghatározza - (I4) szerint - az S_{ADE} síkot. Az 1. Állítás szerint az S és az S_{ADE} síkok metszete egy e egyenes, melynek jelölje B egy A-tól különböző pontját az (I2) axióma értelmében. (I8) szerint a tér minden pontja nem illeszkedhet S_{ADE}-re, ezért felvehetünk egy $F \notin S_{ADE}$ pontot, mely egyértelműen meghatározza - (I4) szerint - az S_{ADF} síkot. Az 1. Állítás szerint az S és az S_{ADF} síkok metszete egy f egyenes, melynek jelölje C egy A-tól különböző pontját az (I2) axióma értelmében. A bizonyítás teljes, ha megmutatjuk, hogy A, B és C nem esik egy egyenesre. Ehhez vegyük észre, hogy $S_{ADE} = S_{ABD}$ és $S_{ADF} = S_{ACD}$. Ha a szóban forgó pontok egy egyenesre esnek, akkor $S_{ADE} = S_{ADF}$ következik, ami ellentmond az F pont választásának. $\square$



2. ábra.

1. Példa. (a minimális modell, 2. ábra) A Hilbert féle illeszkedési tér minimális modelljében

$$\mathbb{E} = \{A, B, C, D\},\ \mathbb{L} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\},$$

$$\mathbb{P} = \{\{A, B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, C, D\}, \{B, C, D\}\},$$

azaz az egyenesek a kételemű, a síkok pedig a háromelemű részhalmazok. (I8) szerint ennél kevesebb pontja nem lehet egy illeszkedési térnek. Az illeszkedési sík minimális modellje a tér minimális modelljének síkja.

2. Feladat. Állapítsa meg a térelemek kölcsönös helyzetét a minimális modellben.

1.2. A Birkhoff-féle vonalzó axióma (a vonalzó absztrakt leírása)

Azt mondjuk, hogy egy Hilbert-féle illeszkedési térben teljesül a Birkhoff-féle **vonalzó axióma** (RP), ha bármely l egyenes esetén megadható egy $f\colon l \to \mathbb{R}$ kölcsönösen egyértelmű leképezés (az egyenes koordinátázása) úgy, hogy

$$|f(A) - f(B)| = d(A, B) \quad (A, B \in l),$$

ahol $d(A, B)$ az A és B pontok távolsága (alapfogalom).

2. Megjegyzés. A távolság értelmezésére nincs szükség, ha megállapodtunk abban, hogy minden egyenes izometrikusan - azaz távolságtartóan - leképezhető a számegyenesre. Mindazonáltal beemeltük a rendszerbe a valós számok axiómáit: $\mathbb{R}$ az egyenes prototípusa.

A vonalzó-transzformáció Legyen $f_1\colon l \to \mathbb{R}$ és $f_2\colon l \to \mathbb{R}$ adott. Mivel izometrikusan képezzük az egyenest a számegyenesre, ezért a $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) := f_2 \circ f_1^{-1}(x)$ leképezés a valós számegyenes távolságtartó transzformációja:

$$|h(x) - h(y)| = |x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Az eltolások a valós számegyenes távolságtartó transzformációi. Ennélfogva a $g(x) := h(x) - h(0)$ segédfüggvény olyan távolságtartó transzfomáció, mely az origót fixen hagyja:

$$|g(x) - g(y)| = |x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R}) \;\text{ és }\; g(0) = 0.$$

Az $y = 0$ helyettesítést és négyzetre emelést követően $g^2(x) = x^2$ írható. Speciálisan $g(1) = \pm 1$. A négyzetre emelést az argumentum speciális megválasztása nélkül elvégezve,

$$g^2(x) - 2g(x)g(y) + g^2(y) = x^2 - 2xy + y^2.$$

Mivel $g^2(x) = x^2$ és $g^2(y) = y^2$, kapjuk, hogy

$$g(x)g(y) = xy \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Az $y = 1$ választással pedig $g(x) = \pm x$ következik. A valós számok távolságtartó leképezéseinek általános alakja $h(x) = \varepsilon x + c$, ahol $\varepsilon = \pm 1$ és $c = h(0)$. Innen

$$f_2(A) = \varepsilon f_1(A) + c \quad (A \in l), \tag{1}$$

azaz a vonalzó eltolható ($c \neq 0$) és átfordítható ($\varepsilon = -1$). Az (1) formula mutatja, hogy a valós számok közötti rendezés átvitele az egyenes pontjaira a koordinátázás választásától független. Ez lehetővé teszi a szakasz és a félegyenes (intervallumok) fogalmának értelmezését.

4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az l egyenes A, B és X pontjai közül X az A és B pontok között van, ha az $f(X)$ valós szám az $f(A)$ és $f(B)$ valós számok között van, ahol $f\colon l \to \mathbb{R}$ az l egyenes tetszőleges koordinátázása: $A - X - B$.*

3. Feladat. A vonalzó axióma segítségével igazolja, hogy X pontosan akkor van az A és B pontok között, ha $d(A, X) + d(X, B) = d(A, B)$.

5. Definíció. *Az A és B pontokat összekötő szakaszon az*

$$\bar{AB} = \{X \in l_{AB} \mid A - X - B\} \cup \{A, B\}$$

halmazt értjük. A szakasz belseje $\bar{AB} \setminus \{A, B\}$. A szakasz hossza a $d(A, B)$ távolság; két szakaszt egybevágónak, vagy kongruensnek nevezünk, ha a hosszuk megegyezik.

6. Definíció. *Az A kezdőpontú, B pontot tartalmazó félegyenesen az*

$$\vec{AB} = \{X \in l_{AB} \mid \neg(X - A - B)\} \cup \{A\}$$

halmazt értjük. A félegyenes belseje $\vec{AB} \setminus \{A\}$.

A vonalzó eltolhatóságának és átfordíthatóságának egyszerű, de fontos következménye az alábbi félegyenes-koordinátázási tétel.

1. Tétel. (a félegyenes koordinátázási tétele) *Bármely $\vec{AB}$ félegyenes esetén egyértelműen megadható a tartóegyenes olyan $f\colon l \to \mathbb{R}$ koordinátázása, melyre*

$$f(A) = 0 \quad \textit{és} \quad \vec{AB} = \{X \in l \mid f(X) \geq 0\}.$$

Bizonyítás. Mivel a vonalzó eltolható és átfordítható, ezért feltehetjük, hogy $f(A) = 0$ és $f(B) > 0$; ekkor az $X - A - B$ reláció ekvivalens azzal, hogy az $f(A) = 0$ valós szám az $f(X)$ és az $f(B)$ között van, azaz $f(X) < 0$, melynek tagadása éppen $f(X) \geq 0$. További eltolással az $f(A) = 0$, átfordítással pedig az $f(B) > 0$ feltétellel kerülünk ellentmondásba. Ezért a koordinátázás egyértelműen meghatározott. □

2. Tétel. (a szakaszfelmérés tétele) *Egy szakasz bármely pontból és e pontból induló bármely félegyenes mentén egyértelműen felmérhető.*

Bizonyítás. Legyen adott egy $\bar{PQ}$ szakasz, melynek hossza $r > 0$. A $d(P, Q) = 0$ eset triviális, hiszen ekkor $P = Q$ következik a vonalzó axióma alapján. Tekintsük az $\vec{AB}$ félegyenesnek a koordinátázási tételben szereplő, egyértelműen meghatározott $f\colon l \to \mathbb{R}$ koordinátázását. A félegyenes olyan X pontját keressük, melyre $d(A, X) = d(P, Q) = r$. Mivel $f(A) = 0$ és $f(X) > 0$ a félegyenes további pontjaira, ezért $f(X) = r$. Következésképpen az $X := f^{-1}(r)$ inverz kép a keresett pont. □

A szakasz és a félegyenes fogalmának birtokában már bevezethető a polygon (töröttvonal), a szögvonal (közös kezdőpontú félegyenesek uniója)

$$AOB\angle := \vec{OA} \cup \vec{OB}$$

és a konvexitás fogalma.

7. Definíció. *A tér egy H részhalmaza konvex, ha bármely két pontjával együtt az őket összekötő szakaszt is tartalmazza.*

A következő, kissé technikai jellegű axióma a szögmérés bevezetését készíti elő.

1.3. A félsík axióma

A **félsík-axióma** (PSP) kimondja, hogy egy tetszőleges S síkot bármely $l \subset S$ egyenese (sorrendtől eltekintve egyértelműen) két nemüres, konvex, diszjunkt H_1 és H_2 halmazra bont úgy, hogy

(PSP1) $S \setminus l = H_1 \cup H_2$

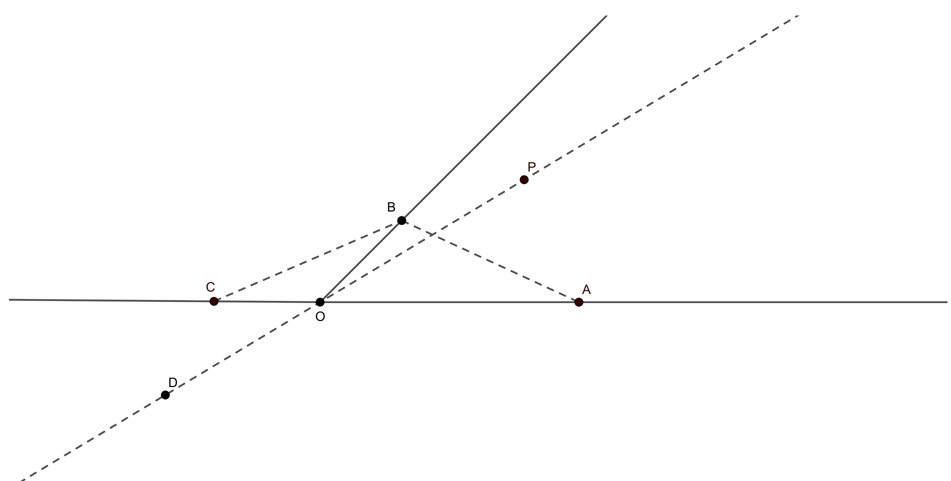
(PSP2) ha $A \in H_1$ és $B \in H_2$, akkor $\bar{AB} \cap l \neq \emptyset$.

H_1 és H_2 az l egyenes által határolt nyílt félsíkok; a határegyenessel vett uniójukat pedig zárt félsíkoknak nevezzük.

3. Tétel. (Pasch tétele) *Ha egy egyenes egy háromszög síkjában nem illeszkedik egyik csúcsra sem, de metsz egy oldalt, akkor pontosan egy további oldalt is metsz.*

Bizonyítás. Messe az l egyenes az $ABC\triangle$ háromszög $\bar{AB}$ oldalát az X belső pontban. A félsíkok konvexitása alapján nyilvánvaló, hogy A és B az l által határolt különböző nyílt félsíkokban vannak. (PSP1) szerint pedig a C csúcs pontosan az egyikükkel (például A-val) van ellentétes nyílt félsíkban. (PSP2) miatt tehát az l egyenes az $\bar{AC}$ oldalt is metszi. $\square$

8. Definíció. *Legyen $AOB\angle$ valódi szögvonal, azaz nem egyenes, vagy félegyenes; az l_{OA} határegyenesű, B - t tartalmazó zárt félsíknak az l_{OB} határegyenesű, A-t tartalmazó zárt félsíkkal vett metszetét az $AOB\angle$ szögvonalhoz tartozó konvex szögtartománynak nevezzük. Egyenesszög esetén az egyenes által határolt valamely zárt félsíkot nevezünk a szögvonalhoz tartozó konvex szögtartománynak. A szögtartomány belsején a nyílt félsíkokkal vett metszetet, illetve a határolt nyílt félsíkot értjük.*



3. ábra.

4. Tétel. (keresztszakasz, vagy crossbar tétel) *Legyen $AOB\angle$ valódi szögvonal, azaz nem egyenes, vagy félegyenes. Az $\vec{OP}$ félegyenes pontosan akkor metszi az $\bar{AB}$ keresztszakasz belsejét, ha P a konvex szögtartomány belsejében van.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy P a konvex szögtartomány belsejében van. A 3. ábrán látható $ABC\triangle$ háromszögre és az l_{OP} egyenesre alkalmazzuk Pasch tételét: mivel az $\overline{AC}$ oldalon van belső metszéspont, ezért pontosan egy további oldalon is van. Ez nem lehet $\overline{BC}$, ugyanis az $\overrightarrow{OD}$ félegyenest az egyik szögszár tartóegyenese, az $\overrightarrow{OP}$ félegyenest pedig a másik szögszár tartóegyenese szeparálja $\overline{BC}$ belső pontjaitól. Mivel az $\overrightarrow{OD}$ félegyenest az egyik szögszár tartóegyenese az $\overline{AB}$ belső pontjaitól is szeparálja, ezért csak az a lehetőség marad, hogy az $\overrightarrow{OP}$ félegyenes az $\overline{AB}$ keresztszakaszt metszi egy belső pontban. Megfordítva, ha az $\overrightarrow{OP}$ félegyenes az $\overline{AB}$ keresztszakaszt egy X belső pontban metszi, akkor P és X ugyanabban a nyílt félsíkban van mindkét szögszár tartóegyenesére nézve. Ennélfogva P a konvex szögtartomány belsejében van. $\square$

9. Definíció. *Ha egy illeszkedési térben teljesül a vonalzó és a félsík axióma, akkor folytonosan rendezett illeszkedési térnek nevezzük.*

4. Feladat. Igazolja a térfelbontás tételét: egy folytonosan rendezett illeszkedési teret bármely S síkja (sorrendtől eltekintve egyértelműen) két nemüres, konvex diszjunkt K_1 és K_2 halmazra bont úgy, hogy

(SSP1) $\mathbb{E} \setminus S = K_1 \cup K_2$

(SSP2) ha $P \in K_1$ és $Q \in K_2$, akkor $\overline{PQ} \cap S \neq \emptyset$.

A megoldáshoz megadjuk a K_1 és K_2 halmazok konstruktív előállítását. Válasszunk egy $A \notin S$ pontot az (I8) axióma alapján és legyen

$$K_1 := \{P \in \mathbb{E} \setminus S \mid \overline{AP} \cap S = \emptyset\} \cup \{A\},\ K_2 := \{P \in \mathbb{E} \setminus S \mid \overline{AP} \cap S \neq \emptyset\}.$$

Könnyen látható, hogy egyik halmaz sem üres. K_1 konvexitásának ellenőrzéséhez legyen P, $Q \in K_1$. Amennyiben P, Q és A kollineárisak (megengedve pl. az $A = P$ esetet is), az $\overline{AX}$ szakaszt az $\overline{AP}$ és az $\overline{AQ}$ szakaszok uniója lefedi bármely $X \in \overline{PQ}$ esetén, ahonnan $\overline{AX} \cap S = \emptyset$ következik. Tegyük fel tehát, hogy A, P és Q nem kollineáris. Ha S_{APQ} párhuzamos az S síkkal, akkor nyilvánvalóan $\overline{AX} \cap S = \emptyset$, ahol X a $\overline{PQ}$ szakasz tetszőleges pontja. Egyébként az S és az S_{APQ} síkok metszik egymást egy l egyenesben és hivatkozhatunk a félsík axiómára az S_{APQ} síkban. K_2 konvexitásának ellenőrzéséhez válasszunk P és $Q \in K_2$ pontokat és egy az A, P és Q pontokra illeszkedő síkot. Az előző esettel ellentétben az S síkkal vett metszésvonal létezése automatikus a K_2 halmaz konstrukciója miatt és a konvexitás a félsík axióma következménye az A, P és Q pontokra illeszkedő síkban: P és Q az A pontot tartalmazó nyílt félsíkkal ellentétes félsíkban vannak (utóbbi nyilvánvalóan konvex). A bizonyítás akkor lesz teljes, ha megmutatjuk, hogy a K_1 és K_2 halmazok nem függnek az $A \notin S$ pont választásától, legfeljebb felcserélődnek. (SSP2) igazolása pedig hasznos gyakorlófeladat (alkalmazzuk Pasch tételét az $APQ\triangle$ háromszögre).

1.4. A szögmérő axióma (a szögmérő absztrakt leírása)

Legyen adott egy egyenes három pontja; a vonalzó axióma segítségével rendezhetjük ezeket a pontokat abban az értelemben, hogy megmondjuk, melyikük van a másik kettő között. Most tekintsünk egy zárt félsíkot és annak határegyenesén egy tetszőleges O pontot. A félsík axióma segítségével bevezetett konvex szögtartomány fogalma segít eldönteni, hogy a félsík három, O kezdőpontú félegyenese közül, melyik van a másik kettő között. Az $A - X - B$ relációt leíró $d(A, X) + d(X, B) = d(A, B)$ formula megfelelője a szögmérés additivitása (PP1) lesz. Az ún. szögszerkesztési posztulátum (PP2) pedig a szakaszfelmérés tételének analogonja (4. ábra). Azt mondjuk, hogy egy folytonosan rendezett illeszkedési térben teljesül a **szögmérő axióma**, ha a szögmérés additív, azaz

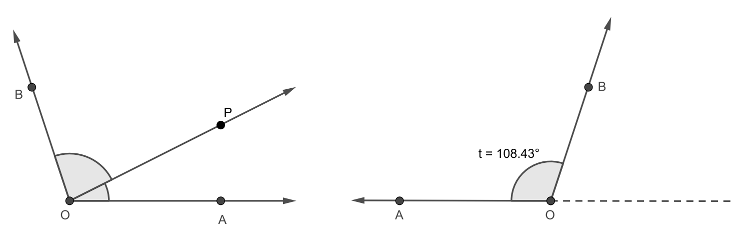
(PP1) ha $\overrightarrow{OA} \neq \overrightarrow{OB}$ és P az $AOB\angle$ konvex szögtartomány pontja, akkor

$$m(AOB\angle) = m(AOP\angle) + m(POB\angle),$$

ahol $m(AOB\angle) \in [0, \pi]$ az $AOB\angle$ konvex szögtartomány mértéke (alapfogalom),

továbbá érvényes a szögszerkesztési posztulátum:

(PP2) Egy szög bármely félegyenestől és e félegyenes tartóegyenese által határolt bármely félsíkban egyértelműen felmérhető, azaz megadva egy $\overrightarrow{OA}$ félegyenest és egy a tartóegyenes által határolt zárt H félsíkot, bármely $t \in [0, \pi]$ esetén létezik egy és csak egy $\overrightarrow{OB} \subset H$ félegyenes úgy, hogy $m(AOB\angle) = t$.



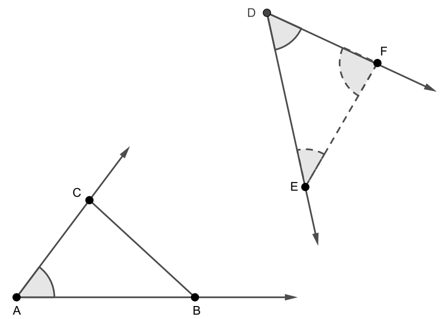
4. ábra.

10. Definíció. *Két szöget egybevágónak, vagy kongruensnek nevezünk, ha mértékük megegyezik.*

A szögmérő axióma alapján könnyen igazolható, hogy

- egyenesszög mértéke π,
- nullszög mértéke 0,
- a csúcsszögek egybevágóak, a mellékszögek pedig kiegészítő szögek.

Újabb fogalmak többé-kevésbé értelemszerű bevezetésével gazdagíthatjuk a szótárunkat (derékszög, szakaszfelező merőleges, szögfelező). A továbbiak szempontjából a legfontosabb azonban a tér alakzatainak (elsősorban háromszögeinek) merev mozgatása a szakaszfelmérés tétele és a szögszerkesztési posztulátum alapján.



5. ábra.

11. Definíció. *Két háromszöget egybevágónak, vagy kongruensnek mondunk, ha létezik a csúcsaik között olyan megfeleltetés, hogy az egymásnak megfelelő oldalak és szögek egybevágók.*

Az 5. ábrán $\overline{AB}=\overline{DE}$, $m(A\angle) = m(D\angle)$ és $\overline{AC}=\overline{DF}$ a szakaszfelmérés tételének és a szögszerkesztési posztulátumnak köszönhetően. Mit tudhatunk a nem közvetlen méréssel adódó oldalakról és szögekről? A választ az ún. kongruencia axióma adja meg.

1.5. A kongruencia axióma

A **kongruencia-axióma** (SAS) kimondja, hogy ha két háromszög csúcsai között létezik olyan megfeleltetés, melynél két oldal és a közbezárt szög egybevágó a megfelelő két oldallal és közbezárt szöggel, akkor a háromszögek egybevágók. Ezzel az abszolút geometria axiómarendszere teljes. Alapfogalmak: $\mathbb{E}$ (pontok), $\mathbb{L}$ (egyenesek), $\mathbb{P}$ (síkok), d (távolság), m (szögmérték). Axiómák: illeszkedési axiómák, vonalzó (RP), félsík (PSP), szögmérő (PP) és kongruencia axióma (SAS).

12. Definíció. *Ha egy illeszkedési térben teljesül a vonalzó, a félsík, a szögmérő és a kongruencia axióma, akkor abszolút térnek nevezzük.*

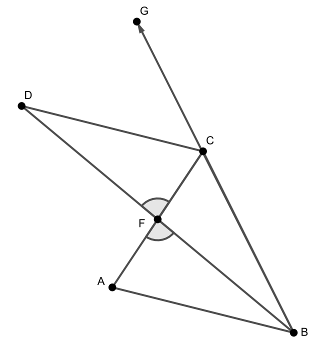
2. Fejezetek az abszolút geometriából

2.1. Kongruenciatételek

5. Tétel. (Pons Asinorum) *Egyenlő szárú háromszögben a kongruens oldalakkal szemközti szögek kongruensek.*

Bizonyítás. Legyen $ABC\triangle$ egyenlő szárú háromszög; a határozottság kedvéért tegyük fel, hogy $\overline{AC}=\overline{BC}$. Húzzuk be a C csúcsnál a szögfelezőt. A keresztszakasz tétel miatt ez metszi az $\overline{AB}$ oldalt egy X belső pontban. A (SAS) axióma alapján két egybevágó háromszöget kapunk, ahonnan következik a szóban forgó szögek egyenlősége. □

6. Tétel. (külső szög egyenlőtlenség, 6. ábra) *Egy háromszög bármely belső szöge kisebb, mint a nem mellette fekvő külső szögek bármelyike.*



6. ábra.

Bizonyítás. Tekintsük az $ABC\triangle$ háromszöget és koncentráljunk az A csúcsnál elhelyezkedő szögre. Tükrözzük a háromszöget az $\overline{AC}$ oldal F felezőpontjára és legyen D a B pont képe (nyilvánvaló, hogy A és C helyet cserél). Mivel a csúcsszögek kongruensek, ezért (SAS) szerint a $DFC\triangle$ egybevágó a $BFA\triangle$ háromszöggel. Tekintsünk egy G pontot a $\overrightarrow{BC}$ félegyenesen úgy, hogy $B-C-G$, azaz $ACG\angle$ a C csúcsnál lévő egyik külső szög. Mivel a D pont eleme az $ACG\angle$ szöghöz tartozó konvex szögtartománynak (a részletek átgondolása hasznos gyakorlófeladat), ezért $m(A\angle) = m(ACD\angle) < m(ACG\angle)$, ami bizonyítandó volt. □

1. Következmény. *Derékszögű/tompaszögű háromszögben pontosan egy derékszög/tompaszög és két hegyesszög van.*

7. Tétel. (kongruenciatételek, 7. ábra) *Ha két háromszögben*

(ASA) *egy oldal és a rajta fekvő két szög egybevágó,*

(SAA) *egy oldal és egy rajta fekvő, illetve a szemközti szög egybevágó,*

(SSS) *az oldalak egybevágók,*

akkor a két háromszög kongruens.

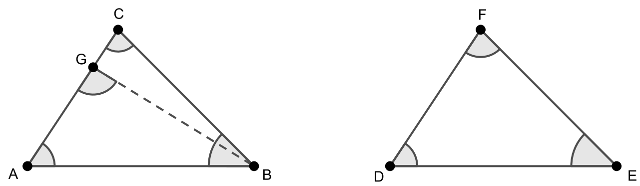
Bizonyítás. Az (ASA) és a (SAA) kongruenciatételeket egyszerre bizonyítjuk. Legyen $ABC\triangle$ és $DEF\triangle$ a két háromszög és tegyük fel, hogy a feltételek között szereplő oldal, illetve rajta fekvő szög $\overline{AB}$, illetve $A\angle$. Indirekte okoskodunk. Ha $\overline{AC}$ nem egyenlő a másik háromszög megfelelő $\overline{DF}$ oldalával, akkor - a háromszögek szerepét szükség esetén felcserélve - feltehetjük, hogy $\overline{AC}>\overline{DF}$. Ennélfogva kiválaszthatjuk az $\overline{AC}$ oldal egy G belső pontját úgy, hogy $\overline{AG}=\overline{DF}$. A (SAS) axióma szerint az $ABG\triangle$ és $DEF\triangle$ háromszögek egybevágók. Az (ASA) állítás esetében ez az

$$m(DEF\angle) = m(ABG\angle) < m(ABC\angle) = m(DEF\angle)$$

ellentmondáshoz vezet, míg a (SAA) állítás esetében

$$m(DFE\angle) = m(AGB\angle) > m(ACB\angle) = m(DFE\angle)$$

ellentmondás következik a külső szög egyenlőtlenségre tekintettel. Ennélfogva $\overline{AC}=\overline{DF}$, ahonnan a (SAS) axióma alapján következik a háromszögek egybevágósága. Az (SSS) kongruenciaállítás bizonyítását illetően a szakirodalomra utalunk: [1] és [2]. □



7. ábra.

8. Tétel. (a Pons Asinorum megfordítása) *Ha egy háromszögben két belső szög kongruens, akkor a velük szemben fekvő oldalak is kongruensek.*

Bizonyítás. A bizonyítás kulcslépése ugyanaz, mint a Pons Asinorum bizonyítása esetén; az (SAA) kongruenciatételből következik az állítás. □

3. Megjegyzés. Két további lehetséges kongruenciaállítás van: (AAA), azaz a szögek egybevágósága, illetve (SSA), azaz két oldal és egy nem közöttük lévő szög egybevágósága. (AAA) az abszolút geometria axiómarendszerétől független állítás, se nem bizonyítható, se nem cáfolható. Az euklideszi geometriában hamis (ld. hasonlóság), a hiperbolikus geometriában pedig igaz. Az (SSA) kongruenciaállítás azonban igaz az abszolút geometriában, legalábbis egy további feltétel mellett: a két oldal közül a nagyobbikkal szemközti szög esetén. Igazolására az egyenlőtlenségek fejezetben kerül sor.

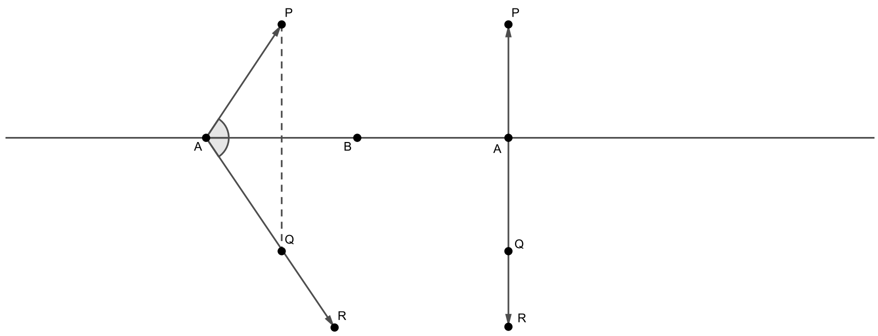
2.2. Merőleges és párhuzamos egyenesek az abszolút síkon

9. Tétel. (a merőleges egyenes egzisztencia- és unicitástétele, 8. ábra) *Egy S sík bármely $l \subset S$ egyenese és $P \in S$ pontja esetén egyértelműen létezik olyan egyenese a síknak, mely illeszkedik P-re és merőleges az l egyenesre.*

Bizonyítás. Ha $P \in l$, akkor a szögszerkesztési posztulátumra és a csúcsszögek egybevágóságára hivatkozhatunk. Ha $P \notin l$, akkor a merőleges egyenes unicitása (egyértelműsége) a külső szög tétel következménye. Egzisztenciáját (létezését) a következőképpen láthatjuk be. Legyen A és $B \in l$; mérjük át a $BAP\angle$ szöget a P pontot tartalmazó félsíkkal ellentétes félsíkba:

$$m(BAP\angle) = m(BAR\angle) \tag{2}$$

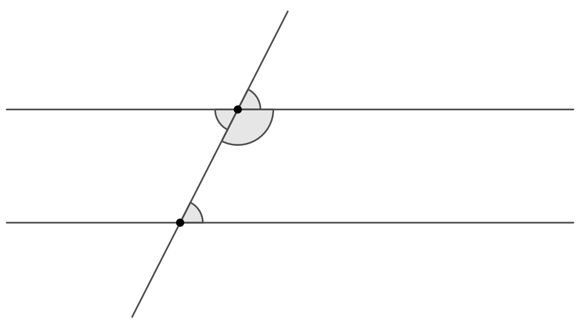
és a kapott $\overrightarrow{AR}$ szögszáron mérjük fel az $\overline{AP}$ szakaszt az A pontból kiindulva: $\overline{AP}$=$\overline{AQ}$. Kössük össze a Q pontot P-vel. A (PSP2) axióma értelmében $\overline{PQ}$ metszeni fogja az l egyenest egy T pontban. Ha $T = A$, akkor $PAR\angle$ egyenesszög, azaz $\pi = m(PAR\angle) = m(BAP\angle) + m(BAR\angle)$ és (2) implikálja a merőlegességet. Ellenkező esetben a $PTA\triangle$ és $QTA\triangle$ háromszögek egybevágósága mutatja, hogy az l_{PQ} egyenes merőleges l-re. □



8. ábra.

10. Tétel. (a párhuzamosság elegendő feltétele I, 9. ábra) *Ha két komplanáris egyenes egy harmadikkal való metszésekor kongruens belső váltószögek keletkeznek, akkor a két egyenes párhuzamos.*

Bizonyítás. Tételünk a külső szög egyenlőtlenség azonnali következménye. □



9. ábra.

11. Tétel. (a párhuzamos egyenes egzisztenciatétele) *Megadva egy pontot és egy rá nem illeszkedő egyenest van olyan egyenes, mely illeszkedik a megadott pontra és párhuzamos a megadott egyenessel.*

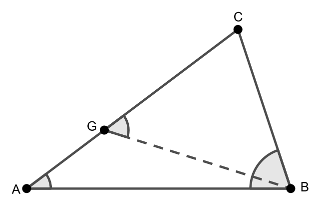
Bizonyítás. Legyen S a P pont és a rá nem illeszkedő l egyenes által meghatározott sík. A merőleges egyenes egzisztencia és unicitástétele alapján tekintsük a P-re illeszkedő és az l egyenesre merőleges m egyenest. Az m egyenesre P-ben merőleges e egyenes párhuzamos az l egyenessel, hiszen teljesül a párhuzamosság elegendő feltétele. □

4. Megjegyzés. (a párhuzamosság elegendő feltétele II, 9. ábra) Nyilvánvaló, hogy a kongruens belső váltószögek keletkezése ekvivalens azzal, hogy kongruens megfelelő szögek keletkeznek, illetve a metsző egyenes ugyanazon oldalán keletkező belső szögek kiegészítő szögek. Ezek bármelyike elegendő feltétele a két egyenes párhuzamosságának, de nem szükségesek, azaz párhuzamosság esetén a transzverzális ugyanazon oldalán keletkező belső szögek nem feltétlenül kiegészítő szögek. Valójában evidens, hogy ha a párhuzamosság elegendő feltételei szükségesek is, akkor nem csupán a párhuzamos egyenes létezését, hanem egyértelműségét is igazolhatjuk, hiszen a szögek felvétele egy adott félsíkban egyértelmű a szögszerkesztési posztulátum alapján. Az unicitás azonban az abszolút geometria axiómarendszerétől független állítás, se nem bizonyítható, se nem cáfolható. Az euklideszi geometriában igaz, míg a hiperbolikus geometriában hamis.

2.3. Egyenlőtlenségek

12. Tétel. *Egy háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $ABC\triangle$ háromszögben $\overline{AC}>\overline{BC}$ és vegyünk fel egy olyan G pontot az $\overline{AC}$ oldalon, melyre $\overline{GC}=\overline{BC}$. A $GBC\triangle$ háromszög egyenlő szárú, ezért a külső szög egyenlőtlenséget is figyelembe véve $m(B\angle) > m(GBC\angle) = m(BGC\angle) > m(A\angle)$, ami bizonyítandó volt. □



10. ábra.

2. Következmény. *Egy háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van.*

Bizonyítás. Ha a nagyobb szöggel szemben kisebb oldal lenne, mint a kisebb szöggel szemben, akkor az előző tétellel, míg ha ugyanakkora, akkor a Pons Asinorummal kerülnénk ellentmondásba. □

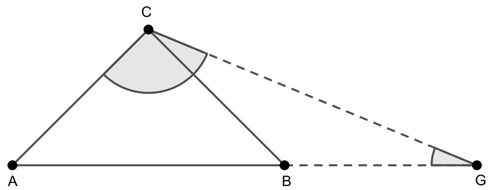
3. Következmény. *Egy derékszögű háromszög átfogója nagyobb mindkét befogónál.*

13. Tétel. (klasszikus háromszög-egyenlőtlenség, 11. ábra) *Egy háromszög bármely két oldalának összege nagyobb, mint a harmadik oldal.*

Bizonyítás. Tekintsük az $ABC\triangle$ háromszöget; az l_{BC} egyenes által meghatározott, A-t tartalmazó félsíkkal ellentétes félsíkban vegyünk fel egy G pontot az $\overrightarrow{AB}$ félegyenesen úgy, hogy $\overline{BC}=\overline{BG}$. Mivel a $BCG\triangle$ háromszög egyenlő szárú, ezért

$$m(AGC\angle) = m(BGC\angle) = m(BCG\angle) < m(ACG\angle).$$

Ez azt jelenti, hogy az $AGC\triangle$ háromszögben az $AGC\angle$ szöggel szemközti $\overline{AC}$ oldal kisebb, mint az $ACG\angle$ szöggel szemközti $\overline{AG}$ oldal, ami az eredeti háromszög másik két oldalának összege. □



11. ábra.

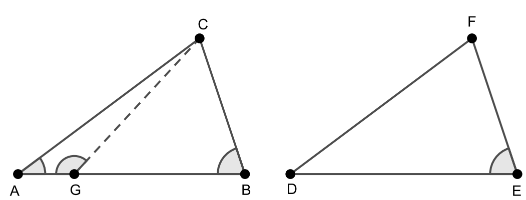
4. Következmény. *A tér bármely A, B és C pontja esetén* $d(A,B)+d(B,C) \geq d(A,C)$ *és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha* $A - B - C$.

5. Következmény. (töröttvonal egyenlőtlenség) *Ha* $n \geq 3$ *és* $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{E}$, *akkor*

$$d(A_1, A_2) + \ldots + d(A_{n-1}, A_n) \geq d(A_1, A_n).$$

Bizonyítás. Alkalmazzunk n-szerinti teljes indukciót. □

14. Tétel. (az (SsA) kongruenciatétel, 12. ábra) *Ha két háromszögben két oldal és a nagyobbikkal szemközti szög kongruens, akkor a két háromszög kongruens.*



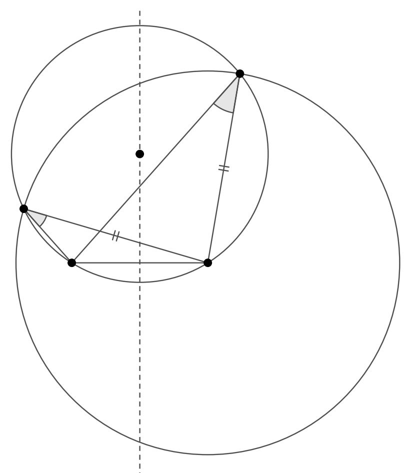
12. ábra.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $ABC\triangle$ és a $DEF\triangle$ háromszögek kielégítik a feltételeket:

$$\bar{A}C = \bar{D}F,\ \bar{B}C = \bar{E}F,\ m(B\angle) = m(E\angle)$$

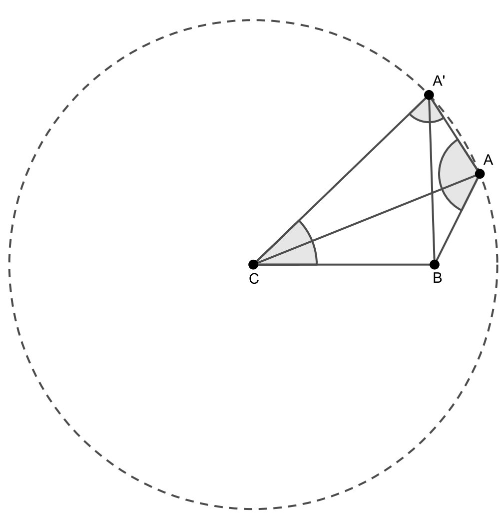
és $\overline{AC} > \overline{BC}$. (SAS) miatt elegendő belátni, hogy $\overline{AB} = \overline{DE}$. Indirekte tegyük fel, hogy mégsem ez a helyzet; a háromszögek szerepét szükség esetén felcserélve $\overline{AB} > \overline{DE}$. Válasszunk az $\overline{AB}$ szakaszon egy G belső pontot, melyre $\overline{GB} = \overline{DE}$. (SAS) szerint a $GBC\triangle$ háromszög egybevágó a $DEF\triangle$ háromszöggel. Az $AGC\triangle$ háromszögben felbukkanó szögekre viszont $m(A\angle) < m(B\angle) < m(AGC\angle)$ a külső szög egyenlőtlenséget figyelembe véve. Ennélfogva $\overline{AC} > \overline{GC} = \overline{DF}$ ellentmondás következik. $\square$

5. Megjegyzés. A feltétel nem gyengíthető az (SsA) kongruenciatételben, ahogy azt a 13. ábra mutatja az euklideszi geometria keretei között.



13. ábra.

1. Lemma. *Legyen egy háromszög $\overline{AC}$ és $\overline{BC}$ oldalának hossza rögzített. Ekkor az $\overline{AB}$ oldal hossza a szemközti $C\angle < \pi$ szög szigorúan monoton növekvő függvénye.*



14. ábra.

Bizonyítás. Az általánosság sérelme nélkül feltehető, hogy $\overline{BC} \leq \overline{AC}$. Alkalmazva a Pons Asinorumot világos, hogy a 14. ábrán szereplő $AA'B\triangle$ háromszögben az A' csúcsnál lévő szög kisebb, mint az egyenlő szárú háromszög alapján nyugvó szögek közös mértéke, míg az A csúcsnál lévő szög nagyobb. Ennélfogva a szemközti oldalakra $\overline{AB} < \overline{A'B}$ teljesül. □

5. Feladat. Igazolja, hogy a 14. ábrán látható konfiguráció esetén B a $CA'A\angle$ szöghöz tartozó, C pedig az $A'AB\angle$ szöghöz tartozó konvex szögtartomány belsejében van. Ez teljessé teszi az 1. Lemma bizonyítását.

Útmutatás. Mivel A a $BCA'\angle$ konvex szögtartomány pontja, ezért a B és az A pont az $l_{A'C}$ egyenes által meghatározott ugyanazon nyílt félsíkban van. Tegyük fel, hogy B és C az $l_{AA'}$ által meghatározott különböző nyílt félsíkokban vannak. Ekkor (PSP2) szerint a $\overline{BC}$ szakasz metszi az $l_{AA'}$ egyenest egy X pontban. Az X pont helyzetére tekintettel

$$m(BCA\angle) = m(XCA\angle) \quad \text{és} \quad m(BCA'\angle) = m(XCA'\angle),$$

ahonnan az $m(BCA\angle) < m(BCA'\angle)$ monotonitás miatt $m(XCA\angle) < m(XCA'\angle)$ következik. Ennélfogva $\neg(X - A' - A)$, míg a C, X és B pontok kollinearitása kizárja az $A' - X - A$ esetet is, hiszen A és A' az l_{BC} egyenes ugyanazon oldalán van. Kapjuk tehát, hogy $A' - A - X$. Figyelembe véve, hogy $\overline{AC} = \overline{A'C}$, a Pons Asinorum és a 2. Következmény alapján $\overline{CX}$ nagyobb, mint az $\overline{AC}$ és $\overline{A'C}$ szakaszok közös hossza. Ugyanez áll a $\overline{CB}$ szakaszra, ami ellentmond a $\overline{BC} \leq \overline{AC}$ feltételnek. Alkalmazva a keresztszakasz-tételt, az $\overrightarrow{A'B}$ félegyenes metszi az $\overline{AC}$ keresztszakaszt egy belső pontban. Ennélfogva az $\overrightarrow{AC}$ félegyenes metszi az $\overline{A'B}$ keresztszakaszt egy belső pontban, ahonnan a kersztszakasz-tételre való ismételt hivatkozással következik, hogy C az $A'AB\angle$ szöghöz tartozó konvex szögtartomány belsejében van.

15. Tétel. (Legendre I. szögtétele) *Az abszolút tér bármely háromszögében a belső szögek összege legfeljebb π.*

Bizonyítás. Indirekte tegyük fel, hogy az $A_1B_1C_1\triangle$ háromszögben a belső szögek összege nagyobb, mint π és másoljuk fel a háromszöget egymás után n-szer a 15. ábrán látható módon. A töröttvonal egyenlőtlenség szerint egyfelől

$$n\, \overline{A_1A_2} < \overline{A_1C_1} + (n-1)\, \overline{C_1C_2} + \overline{C_nB_n} \Rightarrow \overline{A_1A_2} - \overline{C_1C_2} < \frac{\overline{A_1C_1} - \overline{C_1C_2} + \overline{C_nB_n}}{n}.$$

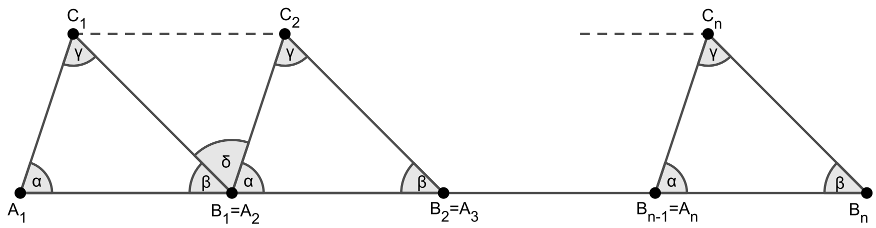
Véve az $n \to \infty$ határátmenetet $\overline{A_1A_2} - \overline{C_1C_2} \leq 0$. Másfelől a keletkező δ szögre $\gamma > \delta$, hiszen $\alpha + \delta + \beta = \pi$, de $\alpha + \beta + \gamma > \pi$. Az előző lemma miatt $\overline{C_1C_2} < \overline{A_1A_2}$, ahonnan $0 < \overline{A_1A_2} - \overline{C_1C_2}$ következik. Az ellentmondás mutatja, hogy a belső szögek összege legfeljebb π. □

6. Következmény. (abszolút külső szög tétel) *Egy háromszög bármely külső szöge nagyobb vagy egyenlő a nem mellette fekvő belső szögek összegénél.*

6. Feladat. Igazolja az abszolút Thálesz tételt: egy kör bármely átmérője legfeljebb $\pi/2$ mértékű szög alatt látszik a kör pontjaiból.

16. Tétel. (Legendre II. szögtétele) *Az abszolút térben vagy minden háromszög belső szögeinek összege kisebb, mint π, vagy minden háromszög belső szögeinek összege egyenlő π-vel.*

Bizonyítás. A bizonyítást illetően a szakirodalomra utalunk: [1] és [2]. □



15. ábra.

3. Az euklideszi párhuzamossági axióma és ekvivalensei

Az abszolút geometriában tehát léteznek párhuzamos egyenesek. Két egymást kizáró eset lehetséges:

> (EPP) Megadva egy egyenest és egy rá nem illeszkedő pontot legfeljebb egy olyan egyenes van, mely illeszkedik az adott pontra és párhuzamos az adott egyenessel (euklideszi párhuzamossági axióma).
>
> (HPP) Megadva egy egyenest és egy rá nem illeszkedő pontot legalább két olyan egyenes van, mely illeszkedik az adott pontra és párhuzamos az adott egyenessel (hiperbolikus párhuzamossági axióma).

Vegyük észre, hogy (HPP)=$\neg$ (EPP): legalább kettő=$\neg$ (legfeljebb egy).

13. Definíció. *Egy abszolút teret euklideszi/hiperbolikus térnek nevezünk, ha érvényes benne az euklideszi/hiperbolikus párhuzamossági axióma.*

A párhuzamos egyenes egzisztenciatételének és az (EPP) axiómának az összevetése mutatja, hogy *megadva egy egyenest és egy rá nem illeszkedő pontot az euklideszi térben pontosan egy olyan egyenes van, mely illeszkedik az adott pontra és párhuzamos az adott egyenessel.*

17. Tétel. *Abszolút térben a következő kijelentések ekvivalensek:*

(A) (Euklidész V. posztulátuma) *Legyen adott egy S sík és egy $l \subset S$ egyenes. Ha A és $B \in l$, a C és D pontok pedig az egyenes által meghatározott azonos nyílt félsíkban vannak úgy, hogy $m(CAB\angle) + m(DBA\angle) < \pi$, akkor az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BD}$ félegyenesek metszik egymást*

(B) *A párhuzamosság elegendő feltételei szükségesek is*

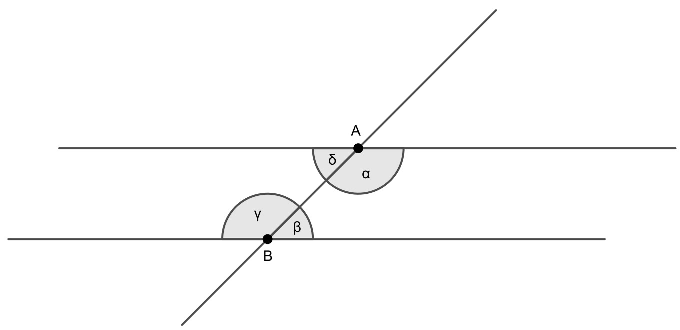
(E) (EPP)

(H) *A háromszögek oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, azaz minden háromszögnek van körülírt köre*

(I) (Bolyai Farkas tétele) *Bármely három nem kollineáris pontra illeszkedik egy és csak egy kör*

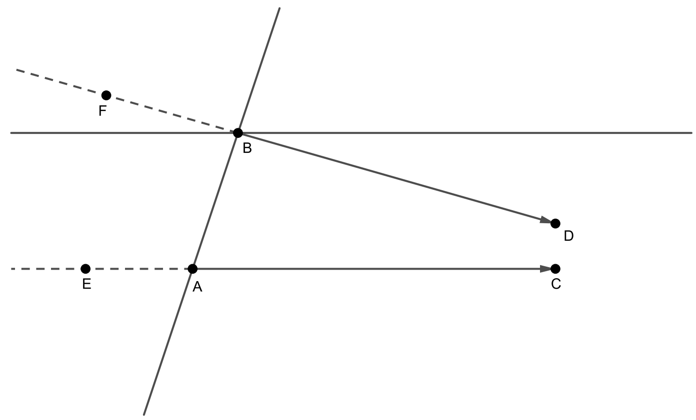
(J) *A háromszögek belső szögeinek összege* π

(K) *A háromszögek külső szögei egyenlők a nem mellettük fekvő belső szögek összegével*



16. ábra.

Bizonyítás. Az állítások betűjele a [1] szakirodalmat követi; a nem bizonyított ekvivalenciákat illetően az [1] és a [2] forrásokra hivatkozunk. A következőket fogjuk belátni: $(A) \Rightarrow (B) \Leftrightarrow (E) \Rightarrow (A)$. Tegyük fel, hogy a közös transzverzális az $A \in e$, illetve $B \in f$ pontokban metszi a párhuzamos egyeneseket. Jelölje a transzverzális ugyanazon oldalán lévő szögeket α és β, illetve γ és δ (16. ábra). Mivel páronként kiegészítő szögekről van szó, ezért $\alpha + \delta = \pi$ és $\beta + \gamma = \pi$. Másfelől (A) implikálja, hogy $\alpha + \beta \geq \pi$ és $\gamma + \delta \geq \pi$, hiszen ellenkező esetben valamely félegyenespár metszené egymást. Összeadva a szögeket $2\pi \leq \alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$, azaz az egyenlőtlenségekben valójában egyenlőség teljesül: $\alpha + \beta = \pi$ és $\gamma + \delta = \pi$, ami ekvivalens azzal, hogy kongruens belső váltószögek keletkeznek: $\alpha = \gamma$ és $\beta = \delta$. Ha a párhuzamosság elegendő feltételei szükségesek is, azaz a transzverzálissal bezárt szögek egyértelműen meghatározzák a párhuzamos egyenest, akkor a szögszerkesztési posztulátum szerint nincs alternatív párhuzamos egyenes. A megfordítás $(E) \Rightarrow (B)$ hasonlóan nyilvánvaló. Végül pedig tegyük fel, hogy (EPP) igaz és tekintsük az V. posztulátumban szereplő konfigurációt (17. ábra). Mivel a párhuzamosság elegendő feltételei szükségesek is, ezért az l_{AC} és l_{BD} egyenesek metszők, hiszen $m(CAB\angle) + m(DBA\angle) < \pi$ azt jelenti, hogy nem teljesülnek az elegendő feltételek. Négy egymást kizáró eset lehetséges: $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{BD} \neq \emptyset$, $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{BF} \neq \emptyset$, $\overrightarrow{AE} \cap \overrightarrow{BF} \neq \emptyset$, $\overrightarrow{AE} \cap \overrightarrow{BD} \neq \emptyset$. Tekintettel arra, hogy az l_{AB}, illetve a B-re illeszkedő, l_{AC}-vel párhuzamos egyenes szeparálja a metszet tagjait az utolsó három eset mindegyikében, ezért éppen a bizonyítandó metszés következik. $\square$



17. ábra.

4. Appendix

4.1. Semmiből egy új, más világot: a geometria axiómái (Kutatók éjszakája 2017, Debreceni Egyetem)

Babits Mihály: Bolyai

Isten elménket bezárta a térbe.
Szegény elménk e térben rab maradt:
a kapzsi villámölyv, a gondolat,
gyémántkorlátját még csak el sem érte.

Én, boldogolván, azt a madarat,
ki kalitjából legalább kilátott,
a semmiből alkottam új világot,
mint pókhálóból sző kötélt a rab.

Új törvényekkel, túl a szűk egen,
új végtelent nyitottam én eszemnek:
király gyanánt, túl minden képzeten

kirabolván kincsét a képtelennek
nevetlek, mint Istennel osztozó,
vén Euklides, rab törvényhozó.

Bolyai Jánosról számtalan alkotás született a magyar irodalomban. Az első művek egyike, Babits Mihály, Bolyai című szonettje (1911), hűen tükrözi azt a hatást, amit Bolyai János élete és munkássága az utókorra gyakorolt, nem csupán a matematika, de általában a gondolkodás és a művészetek szempontjából is. A Bolyai-kultusz égisze alatt természetesen számos példa akad Bolyai alakjának roman-

18. ábra.

tikus irányban való eltorzítására is. A kivételek közé tartozik (többek között) Németh László: A két Bolyai (1961) c. drámája.

A két matematikust, az alexandriai Euklidészt (i.e. 300) és Bolyai Jánost több mint kétezer év választja el egymástól az időben. Babits szonettjének költői túlzásai dacára, Euklidész fő műve, az Elemek (Sztoikheia) korának, sőt századok hosszú sorának mérvadó alkotása. *Gondolkodása átjárta a filozófiát és a matematika természetét egészen a XIX. századig meghatározta* (L. Mlodinov, Euklidész ablaka, Akkord Kiadó, 2003). Tizenhárom könyve összefoglalja korának matematikai, tehát nem csak geometriai ismereteit. Legfontosabb tényezője az ún. axiomatikus módszer, melynek kiindulópontja az alapfogalmak közötti alapkapcsolatokra vonatkozó alapigazságokat rögzítése.

Alapfogalmak pl. a pont, az egyenes és a sík (ezeket nem definiáljuk), alapkapcsolat pl. az illeszkedés, az alapigazságok pedig az ún. illeszkedési axiómák (ezeket nem bizonyítjuk). A rendszer bővítése olyan következtetések segítségével lehetséges, mely az axiómák logikai következménye. A következtetés folyamatát bizonyításnak nevezzük. Ezeket a következtetéseket a továbbiakban felhasználhatjuk újabb következtetések levonásához. Nyilvánvaló, hogy minél előrébb jutunk a következtetési láncban, az axiómákkal való kapcsolat annál többet veszít direkt jellegéből, végül szinte el is tűnik; az axiómákat maga alá temeti az ismeretek sokasága.

Euklidész munkásságának jelentőségét akkor mérhetjük fel igazán, ha világossá tesszük, hogy ez az első szisztematikus kísérlet a geometria axiomatizálására, azaz számára éppen az ismeretek sokasága volt adott és ezek között kellett megtalálnia azokat a többé-kevésbé egyszerű és hatékony alapelveket, amiket ma axiómáknak nevezünk. Több, mint kétezer év távlatából nézve természetes, hogy az Elemek nem állja ki a szigorú kritikát, de módszere, az ún. axiomatikus módszer a mai napig szilárd pillére a tudománynak:

- 1882: A természetes számok axiómái (Peano)
- 1908: A halmazelmélet axiómarendszere (Zermelo, Fraenkel)
- 1933: A valószínűségszámítás axiomatikus megalapozása (Kolmogorov)

Euklidész posztulátumai (axiómái):

I. Minden pontból minden további ponthoz húzható egyenes

II. Minden egyenes korlátlanul hosszabbítható

III. Bármely pontból bármely sugárral vonható kör

IV. A derékszögek egymással egyenlőek

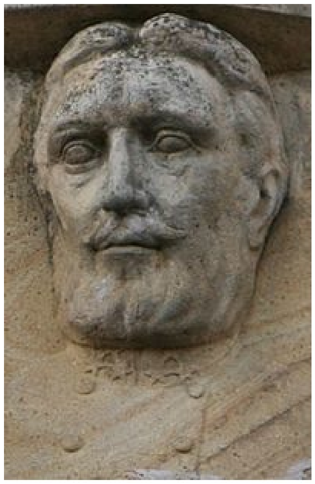
V. (más számozás szerint XI.) axióma: Ha a sík $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BD}$ félegyenesei az l_{AB} egyenes ugyanazon oldalára esnek és az egyenessel bezárt belső szögeik összege kisebb, mint két derékszög, akkor a félegyenesek metszik egymást az l_{AB} egyenes ugyanazon oldalán

A nem euklideszi geometriák az V. posztulátum vizsgálatából nőttek ki, mely a matematika történetének legtöbbet tanulmányozott axiómája. A kutatások arra irányultak, hogy az V. posztulátumot bebizonyítsák az euklideszi geometria többi axiómájára támaszkodva. Ennek során számos egyenértékű átfogalmazás született:

- Adott egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton át egy és csak egy párhuzamos vonható (Ptolemaiosz, Proklosz, Playfair)
- Egy sík bármely három nem egy egyenesre eső pontjára illeszkedik egy és csak egy kör (Bolyai Farkas, Legendre)
- Valamely (s így bármely) háromszög belső szögeinek összege egyenlő két derékszög összegével (Sacchieri, Lambert és Legendre)

Az V. posztulátumot már a kortársak is kritizálták bonyolultsága miatt és főképpen azért, mert egyáltalán nem magától értetődő, vagy intuitíve nyilvánvaló állítás a tér szerkezetéről. *Menjünk talán az egyenesek után a csillagokba?* (Németh László: A két Bolyai). Az axióma természetesen nem igényel bizonyítást, de a görög filozófia igényelte a biztos ismeretet, mint rendező elvet az empirikus tapasztalatok kaotikus világában. Platón ideatana szerint csak az empirikus tapasztalattól függetlenül létező ideákról lehetnek biztos ismereteink. Mivel a matematikai vizsgálatok tárgyai ideák, a matematikai megismerés folyamata biztos ismeretet eredményez (görög matematika). Ez azonban nem változtat azon, hogy a fizikai világ az ideák érzékszerveinkkel felfogható, bár elmosódott leképeződése (egyiptomi matematika). Az empirikus tapasztalat tehát – így, vagy úgy - visszautal a nem megtapasztalhatóra. Kantnál például úgy, hogy az empirikus tapasztalat előfeltételeként határoz meg két, ún. a priori szemléleti formát: a teret és az időt – „Isten elménket bezárta a térbe" (Babits Mihály: Bolyai). A tapasztalhatóval szembeni intolerancia azt jelenti, hogy a matematika kiválik a természettudományok közül – többek között Bolyai János munkásságának köszönhetően: *A XIX. század matematikájának új célkitűzése nemcsak felszabadította, el is szigetelte a matematikát. A XIX. században született meg a „tiszta" matematika. Addig senkinek eszébe sem jutott, hogy másféle matematika is lehet, mint ... amit a természet megfigyelése és a gondolkozás alapján megismerhetünk. Közhely volt már a XVII. században, hogy a természetnek „matematikai elvei" vannak, a természettudomány matematikai elveken épül fel. A feladat nem a matematika természettudományban való alkalmazása volt, hanem a természet matematikai elveinek a megismerése* – írja A „két kultúra" és a harmadik c. tanulmányában Vekerdi László.

Egyiptom piramisai, a görög tudomány eredményei kézenfekvő példák a kor technikai korlátainak ledöntésére. A gondolkodás korlátainak ledöntéséhez azonban forradalmakra van szükség. A görög Euklidész forradalma, Descartes koordináta-geometriai forradalmával kiegészülve, egészen a XIX.



19. ábra.

századig meghatározó. A paralellák problémája által okozott krízisnek azonban csak egy újabb forradalom vethetett véget, Bolyai János és Nyikolaj Lobacsevszkij forradalma, a hiperbolikus geometria megszületése: a semmiből egy ujj, más világ. *A két Bolyai - Farkas, az apa, s János, a fiú - nemcsak a nemzet értékeit számon tartó magyart s a tudomány kifejlődését nyomon kísérő matematikust érdekelheti, hanem minden művelt embert, akit öröklés és tehetség titka, a tudományos eszmék kibontakozása, a nevelés s általában az emberi sors drámái érdekelni tudnak.* (Németh László: A két Bolyai, Ponticulus Hungaricus, V. évfolyam 7–8. szám, 2001. július–augusztus).

Bolyai Farkas 1775-ben született Erdély egyik kis községében, amely családja nevét viselte. Szülei Erdély diákvárosában, Nagyenyeden neveltették. Nagyenyed után Kolozsvár és a német egyetemek következtek: Jéna és Göttingen, ahol Bolyai Farkas érdeklődése végleg a matematika felé fordult s a két évvel fiatalabb Gauss barátja és szellemi társa lett. Bolyai Farkas 1799-ben tér haza. 1804-től a marosvásárhelyi református kollégiumnak lesz közel félszázadon át matematika, fizika és kémia professzora. 1802 december 15-én születik meg fia, Bolyai János Kolozsváron. Apja korán felismeri fia matematikai tehetségét. A gimnáziumi osztályok elvégzése után ifjúkori barátjához, Gausshoz akarja küldeni; Gauss azonban, akivel már jó néhány éve megszakadt a levelezés, két egymás utáni levelére sem válaszol. Bolyai János a bécsi hadmérnöki Akadémián folytatja tanulmányait. Itt mélyed bele a parallelák problémájába is, mely egészen a nem-euklideszi geometria megteremtéséhez vezet. A felfedezésről, mint temesvári alhadnagy, 1823 őszén értesíti az apját: *A feltételem már áll, hogy mihelyt rendbe szedem, elkészítem, s mód lesz, a parallelákról egy munkát adok ki; ebbe a pillanatba nincs kitalálva, de az az út, melyen mentem, csaknem bizonyoson ígérte a cél elérésit, ha az egyébiránt lehetséges; nincs meg, de olyan fenséges dolgokat hoztam ki, hogy magam is elbámultam, s örökös kár volna elveszni hagyni; ha meglátja Édes Apám, megesmeri; most többet nem szóllhatok, csak annyit: hogy semmiből egy ujj más világot teremtettem; mindaz, valamit eddig küldöttem, csak kártyaház a toronyhoz képest.* (Bolyai János levele Bolyai Farkashoz, 1823. november 3.)

János alig tíz esztendőt tölt a hadseregnél. 1832-ben, mint nyugalmazott mérnökkari kapitány tér vissza Marosvásárhelyre. A nyugtalanabb évek, a magyar reformkor megpezsdülő levegője, melyből Erdélybe is eljut valami, Bolyai Farkas munkásságára is hatással vannak; több tankönyvet ír, köztük a matematika alapjairól szóló fő művét, a Tentament: Tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi, cum appendice triplici. I–II. k. (Kísérlet, a tanulóifjúságot a tiszta matematika elemeibe és a magasabb fejezeteibe szemléletes és éppen ezért közérthető módon bevezetni. Három függelékkel), Marosvásárhely, 1832, 1833. Ennek a függelékeként jelenik meg a fia tanulmánya, az Appendix: Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem: adiecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica (Függelék. A tér abszolút igaz tudománya: a XI. euklideszi axióma a priori soha el nem dönthető helyes, vagy téves voltától független tárgyalásban: annak téves volta esetére, a kör geometriai négyszögesítésével). A különnyomatot Farkas megküldi Gaussnak. Válasza tudománytörténeti emlék: *Most valamit Fiad munkájáról. Ha avval kezdem, hogy nem szabad dicsérnem: bizonyára megütődsz egy pillanatra. De mást nem tehetek: ha dicsérném, akkor magamat dicsérném, mivel a mű egész tartalma, az út, melyet Fiad követ és az eredmények, amelyekre jutott, majdnem végig megegyeznek részben már 30–35 év óta folytatott elmélkedéseimmel.* Bár sokan és sokféle módon interpretálják a Bolyaiak és Gauss viszonyát, vitatják, vagy épp védelmezik a prioritásokat a nem-euklideszi geometria felfedezőjének címéért vívott harcban (ld. még Nyikolaj Lobacsevszkij munkássága), maguk a Bolyaiak nemesemberhez méltón mondták ki a végső szót e viszonyt illetően Gauss 1855. február 23 –án bekövetkezett halálakor:

Bolyai Farkas búcsúverse:

„Summa et ima simul penetras vix extitit alter
Ultraque digna etiam promovit acumine eodem
Mens ingens, fulgore carens, sed lumina pollens
Quod mors frangendo fracta ipsa extinquera nequit
Atque Deo, ul Newton gandents pectore puri
Aetherer coelor pervandent ulteriores."

„Mindenek velejébe hatolt, mint senki se jobban:
Földerítette a legmélyebbet s legmagasabbat.
Ritka nagy ész, nem csillámló, de világot özönlő:
Bár elhunyt, a halál nem bírja eloltani fényét,
S Isten színe előtt, mint Newton, úgy ő is a tiszta
Lelkek közt örvend, ott jár a boldog egekben."

(Ponori Thewrewk Emil fordítása)

Bolyai János levele Apjához, Marosvásárhely, 1856. július 12: *A Gauss fátuma melyet magát jólbírása mellett még távol lévőnek reménylettem, akkora fájdalmas hatással van rám, lelkem úgy siratja és oly mélyen gyászolja... mintha egy második Atyámat vesztettem volna el!*

A szabadságharc bukása után a két Bolyai életében sem következik be pozitív fordulat. Farkas csaknem egymaga viszi a kollégium ügyeit, majd nyugdíjba vonul, s nyolcvankét éves korában hal meg. János négy évvel éli túl az édesapját: „így már nints mit tagadni a kapitány Úr nints többé" írja levelében Szőts Julianna, János szolgálója, 1860 január 27-én. Bolyai János életében egyetlen, nyomtatásban megjelent műve, az Appendix terjedelme (a szövegrészekre szorítkozva) huszonnégy oldal: a gondolkodás történetének legkiemelkedőbb huszonnégy oldala - írja G. B. Halsted, első angol fordítója. Érdemei:

- Megold egy kétezer éves geometriai problémát. Megmutatja, hogy - mai szóhasználattal élve - az V. posztulátum független a többitől, azaz segítségükkel se nem igazolható, se nem cáfolható.

- Megalkotja az abszolút geometriát, az euklideszi geometria V. posztulátumtól függetlenül igaz állításainak összességét.

- Megalkotja a hiperbolikus geometriát, mely az V. posztulátum logikai tagadását tekinti érvényes axiómának (Lobacsevszkij).

- Megmutatja, hogy a geometria nem természettudomány, hanem önálló logikai konstrukció, a valóságtól függetleníteni lehet. Ilyen értelemben a semmiből egy új, más világ semmije a tapasztalat-mentességre vonatkozik.

Az axiomatikus (Euklidész), analitikus (Descartes), illetve nemeuklideszi (Bolyai és Lobacsevszkij) geometriák után a XIX. század második fele már a legintenzívebb fejlődési szakasz: a matematikai diszciplinák szintézise és a párhuzamossági axiómák mentén tagozódó geometria újrafelfedezése. Az utolsó lépések:

- Georg Friedrich Bernhard Riemann: Hipotéziseket, amelyek a geometria alapjául szolgálnak (habilitációs ea., 1854, Göttingen)

- Az első modell és a hiperbolikus geometria relativ ellentmondásmentessége: Eugenio Beltrami, 1868

- A geometria axiomatikus megalapozásának lezárása: D. Hilbert, Die Grundlagen der Geometrie, 1899

A Kant-féle a priori szemléleti formák közül a tér fogalmának relativizálása (euklideszi és nem euklideszi terek) előrevetíti az idő fogalmának újraértelmezését a modern fizikában.

- 1905: Speciális relativitáselmélet (Einstein)

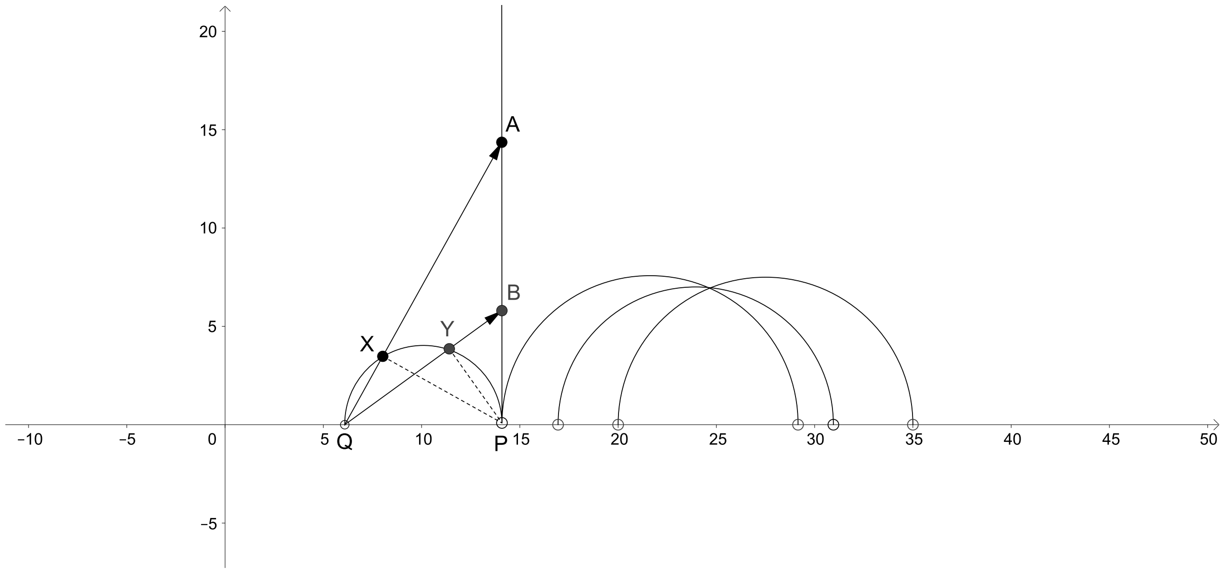
A 2002. esztendő a Bolyai-kutatás egyik mérföldköve. Bolyai János születésének bicentenáriuma alkalmából, s azt követően számos publikáció látott napvilágot, ami a jubileumnak köszönhetően átfogó és hiteles képet nyújt a Bolyaiakról. Reprezentatív példa az ún. Bolyai emlékkönyv, melynek fülszövegéből idézünk: *Bolyai János születésének kétszázadik évfordulóját 2002-ben már úgy ünnepelhettük, hogy írásainak tartalma csaknem teljes egészében ismertté vált, új színekkel gazdagodott az életéről és munkásságáról kialakult kép...* A könyv szerzői akadémikusok, egyetemi tanárok, ismert és neves Bolyai-kutatók: Benkő Samu, Weszely Tibor, Oláh-Gál Róbert, Ács Tibor, Prékopa András, Szénássy Barna, Charles Gunn, Moussong Gábor, Böröczky Károly, Abraham A. Ungar, Molnár Emil, Kiss Elemér, Gábos Zoltán, Toró Tibor, Szenthe János, Szabó Gyula, Deé Nagy Anikó, Vekerdi László.

Forrásmunkák:

- Böröczky Károly, A hiperbolikus geometria (és kapcsolata a diszkrét geometriával), Bolyai Emlékkönyv, Vince Kiadó, 2004.

- Bolyai János élete és műve, Állami Tudományos Könyvkiadó, Bukarest, 1953. 418. old.

- Dávid Lajos, Bolyai-geometria az Appendix alapján, Kolozsvár, 1944.



20. ábra.

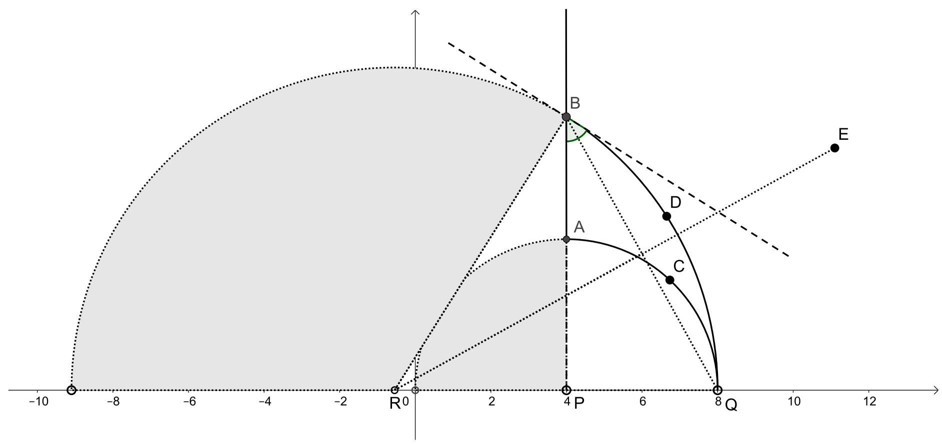
- Németh László, Sajkódi esték, Magvető Könyvkiadó–Szépirodalmi Könyvkiadó, Budapest, 1974, 147–164 old.
- Oláh-Gál Róbert: 240 éve született Gauss, e-nepujsag.ro, 2017, május 4.
- Prékopa András, Bolyai János felfedezésének előzményei és utóhatása, Bolyai Emlékkönyv, Vince Kiadó, 2004.
- Abraham A. Ungar, A hiperbolikus geometria alkalmazása a relativisztikus fizikában, Bolyai Emlékkönyv, Vince Kiadó, 2004.

Euklidész és Bolyai egy időben gigantikus (több mint kétezer éves) híd pillléreinek szimbolikus alakjai. A pillérek egyike az euklideszi, a másik pedig a nem-euklideszi (hiperbolikus) geometria. Nincs átmenet az euklideszi geometriától a nem-euklideszi geometriáig. Aki a rossz partot választotta kiindulópontnak, annak egyetlen lépést sem sikerült megtennie: ld. az V. posztulátum bizonyítási kísérleteinek történetét. Visszafelé azonban „csupán" egy határátmenetre van szükség. Az első matematikus aki ezen a hídon képes volt átkelni, Bolyai János volt. Bolyai viszont a másik partról indult el - az euklideszi geometriát a hiperbolikus geometria határgeometriájaként fogta fel. Ez több és jóval általánosabb, mint egy, az euklideszivel szemben kifejtett nem-euklideszi rendszer. Ebben a tekintetben pedig valamennyi kortársát és előfutárát (beleértve Lobacsevszkijt is) felülmúlta.

4.2. A hiperbolikus sík felső félsíkmodellje

A modell pontjai a koordinátasík $y > 0$ felső félsíkjának pontjai, egyenesei a vízszintes tengelyre merőleges euklideszi félegyenesek és olyan félkörök, melyek középpontja a vízszintes tengelyen van. Az euklideszi félegyenesek hiperbolikus koordinátázása $f(A) := k \log |PA|$, ahol $k > 0$ a hiperbolikus sík paramétere és $|PA|$ a félegyenes A pontjának a P kezdőponttól mért euklideszi távolsága (a kezdőpont nem eleme a modellnek, 20. ábra). Következésképpen

$$d(A, B) = k \left| \log \frac{|PA|}{|PB|} \right|.$$



21. ábra.

Az euklideszi félkörök hiperbolikus koordinátázása

$$f(X) := k \log \frac{|XP|}{|XQ|} \quad \Rightarrow \quad d(X,Y) = k \left| \log \frac{|XP| : |XQ|}{|YP| : |YQ|} \right|.$$

A $QPA\triangle$ és a $QXP\triangle$ háromszögek hasonlósága alapján könnyen látható, hogy

$$d(X,Y) = k \left| \log \frac{|XP| : |XQ|}{|YP| : |YQ|} \right| = k \left| \log \frac{|PA| : |PQ|}{|PB| : |PQ|} \right| = d(A,B),$$

azaz a félkör pontjainak vetítése a félérintőre távolságtartó transzformáció a hiperbolikus síkon.

7. Feladat. Igazolja, hogy az A és B pontok hiperbolikus távolsága a 0 - hoz tart, miközben a szakasz a félegyenes mentén tart a végtelenbe (az euklideszi távolság nem változik).

Útmutatás: Euklideszi távolságokkal kifejezve

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PA|}{|PA| + |AB|} \to 1$$

a szóban forgó határátmenet mellett.

Szögmérés: euklideszi (érintők szöge). Alkalmazásképpen határozzuk meg a 21. ábrán látható $CAB\angle$ és $DBA\angle$ hiperbolikus szögek mértékét. Nyilvánvaló, hogy $m(CAB\angle) = \pi/2$, hiszen az l_{AC} hiperbolikus egyeneshez, mint az euklideszi sík köréhez, az A pontban vont érintő merőleges az l_{AB} hiperbolikus egyenesre (euklideszi félegyenes). Ezzel szemben nyilvánvaló, hogy

$$m(DBA\angle) < \frac{\pi}{2},$$

ami azt is jelenti, hogy bár az V. posztulátum feltétele teljesül, azaz

$$m(CAB\angle) + m(DBA\angle) = \frac{\pi}{2} + m(DBA\angle) < \pi,$$

az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BD}$ félegyenesek mégsem metszik egymást. A $DBA\angle$ szög mértékének pontos meghatározásához vegyük észre, hogy egyrészt megegyezik a $BRQ\angle$ szög mértékével (merőleges szárú szögek), másrészt

$$\frac{m(DBA\angle)}{2} = \frac{m(BRQ\angle)}{2} = m(BRE\angle) = m(ERQ\angle) = m(PBQ\angle),$$

hiszen a $BRQ\triangle$ háromszög egyenlő szárú, $ERQ\angle$ és $PBQ\angle$ pedig merőleges szárú szögek. Bevezetve az $\alpha = m(DBA\angle)$ jelölést

$$\tan(\alpha/2) = \frac{|PQ|}{|PB|} = \frac{|PA|}{|PB|} \Rightarrow k \log \tan(\alpha/2) = -d(A,B),$$

következésképpen

$$\tan(\alpha/2) = e^{-\frac{d(A,B)}{k}}.$$

A 7. Feladatban vizsgált határátmenetet véve (melynek során a hiperbolikus távolság 0 - hoz tart):

$$\lim_{\bar{A}B\to\infty} e^{-\frac{d(A,B)}{k}} = 1,$$

ahonnan

$$\lim_{\bar{A}B\to\infty} \frac{m(DBA\angle)}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \lim_{\bar{A}B\to\infty} m(DBA\angle) = \frac{\pi}{2}$$

következik. Az euklideszi geometria ebben az értelemben a hiperbolikus geometria határgeometriája.

Hivatkozások

[1] Kovács Zoltán: Geometria (az euklideszi geometria metrikus megalapozása), Kossuth Egyetemi Kiadó, 2004.

[2] Szilasi József: Geometria I., KLTE TTK, Debrecen, 1990.