

Az euklideszi geometria alapjai

Vincze Csaba

Debreceni Egyetem

2023. szeptember 18.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető fejezetek az euklideszi geometriából	2
1.1. Paralelogramma-tételek	2
1.2. A párhuzamos szelők tételei	3
1.3. Hasonló háromszögek, arányossági tételek derékszögű háromszögben	5
2. Egybevágósági transzformációk	7
2.1. Az euklideszi sík izometriái	7
2.2. Az euklideszi tér izometriáinak vázlatos áttekintése	12
2.3. Az egybevágóság általános fogalma	17
3. Hasonlósági transzformációk	18
3.1. A hasonlóságok fixponttétele	18
3.2. Az euklideszi sík és tér hasonlóságai	19
3.3. A hasonlóság általános fogalma	20
4. Geometriai mértékelmélet	20
4.1. A kör kerülete, a körív hossza	21
4.2. Sokszögek területe	22
4.2.1. A sokszögek területmérésének axiómája	22
4.3. Jordan-mérték az euklideszi síkon, a kör területe (Jordan-mértéke)	23
4.4. A térfogatmérés axiómái, a gömb térfogata	24
4.4.1. A térfogat mérésének axiómája	24
4.4.2. A gömb térfogata	25
4.4.3. Átdarabolási problémák	26

1. Bevezető fejezetek az euklideszi geometriából

1.1. Paralelogramma-tételek

A továbbiakban feltételezzük az abszolút geometria alapjainak ismeretét, különös tekintettel az euklideszi párhuzamossági axióma és ekvivalensei témakörre [5, 17. Tétel]. Rögzítsük az euklideszi tér egy S síkját. Azt mondjuk, hogy $\{A, B, C, D\} \subset S$ egy konvex négyszög csúcsai a síkon, ha az \overline{AC} és \overline{BD} szakaszok belső pontban metszik egymást. A négyszög oldalai \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} és \overline{DA} . \overline{AB} és \overline{CD} , illetve \overline{BC} és \overline{DA} ún. szemköztes oldalak.

1. Feladat. (EPP) felhasználásával igazolja, hogy a háromszögek belső szögeinek összege π .

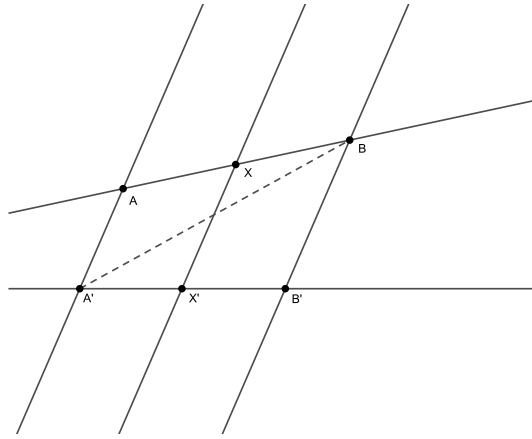
Útmutatás: Tekintsük az $ABC\triangle$ háromszöget és húzzunk párhuzamost a C csúcson keresztül a szemközti oldal tartóegyenésével. Mivel a párhuzamosság elegendő feltételei szükségesek is, ezért kongruens belső váltószögek keletkeznek, melyek a C csúcsnál lévő szöveget egyenesszöggé egészítik ki.

1. Definíció. Egy konvex négyszög paralelogramma, ha szemköztes oldalainak tartóegyenesei párhuzamosak.

1. Tétel. Egy konvex négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha az alábbi feltételek valamelyike teljesül:

- (1) szemköztes oldalai kongruensek
- (2) szemköztes szögei kongruensek
- (3) két szemköztes oldal párhuzamos és kongruens
- (4) az átlók felezik egymást
- (5) középpontosan szimmetrikus

Bizonyítás. Ha egy konvex négyszög paralelogramma, akkor az átlói két egybevágó háromszögre vágják, mivel a párhuzamosság elegendő feltételei szükségesek is: (ASA). Ebből (1), (2) és (3) azonnal, (4) pedig (1) felhasználásával következik. (4) és (5) nyilvánvalóan ekvivalens. Megfordítva, ha egy konvex négyszög szemköztes oldalai kongruensek, akkor az átlói két egybevágó háromszögre vágják: (SSS). Innen a párhuzamosság elegendő feltételei alapján a konvex négyszög paralelogramma. Ha a szemköztes szögek kongruensek, akkor a háromszögek belső szögeinek összegére vonatkozó euklideszi összefüggés alapján a közös oldalon fekvő belső szögek kiegészítő szögek, ami elegendő feltétele a szemköztes oldalak párhuzamosságának. A (3) tulajdonság teljesülése esetén tekintsük az egyik átlót, mely a párhuzamosság szükséges feltételei és a (SAS) kongruencia-axióma miatt a konvex négyszöget két egybevágó háromszögre vágja. A párhuzamosság elegendő feltételei miatt a másik két szemköztes oldal is párhuzamos. Mivel (4) és (5) ekvivalens, ezért elegendő csak az egyik feltételt vizsgálni. Ha a (4) tulajdonság igaz, akkor a (SAS) kongruencia-axióma szerint az átlók két-két egybevágó háromszögre bontják a konvex négyszöget (a csúcsszögek kongruensek). A bizonyítás a párhuzamosság elegendő feltételeire való hivatkozással fejezhető be. \square



1. ábra.

1.2. A párhuzamos szelők tételei

Tekintsük az a és b egyeneseket az S euklideszi síkban és legyen $c \subset S$ egy olyan egyenes, mely mindkettőt metszi. Azt a transzformációt, mely az a egyenes pontjait c -vel párhuzamosan a b egyenes pontjaira vetíti, párhuzamos vetítésnek nevezzük: $A \in a \rightarrow A' \in b$, ahol $l_{AA'}$ párhuzamos a c egyenessel.

2. Tétel. (A párhuzamos szelők tétele) *A párhuzamos vetítés a szakaszok arányát megtartja.*

Bizonyítás. A bizonyítás első lépésében megmutatjuk, hogy a párhuzamos vetítés rendezéstartó, azaz $A - X - B$ maga után vonja, hogy $A' - X' - B'$. Az $A = A'$, vagy $B = B'$ esetben Pasch tétele alapján $A' - X' - B'$ következik. Az $A \neq A'$ és $B \neq B'$ esetben pedig alkalmazzuk kétszer Pasch tételét (1. ábra): először az $AA'B\Delta$, majd pedig az $A'B'B'\Delta$ háromszögre - az egyenes mindkét háromszög esetében $l_{XX'}$. A második lépés egy speciális eset vizsgálata. Tegyük fel, hogy $\overline{AB} = \overline{CD}$ és tekintsük a b egyenessel párhuzamos egyeneseket rendre az A , illetve C ponton keresztül (2. ábra). Könnyű átgondolni, hogy az $ABE\Delta$ és $CDF\Delta$ háromszögek egybevágók, azaz $\overline{AE} = \overline{CF}$. A paralelogramma-tételek szerint $\overline{A'B'} = \overline{AE} = \overline{CF} = \overline{C'D'}$. (Jegyezzük meg, hogy ha a párhuzamos b - vel, akkor közvetlenül hivatkozhatunk a paralelogramma-tételekre és nincs szükség előkészítő lépésre.) Végül tekintsük az általános esetet. Osszuk fel az \overline{AB} szakaszt n egyenlő részre az

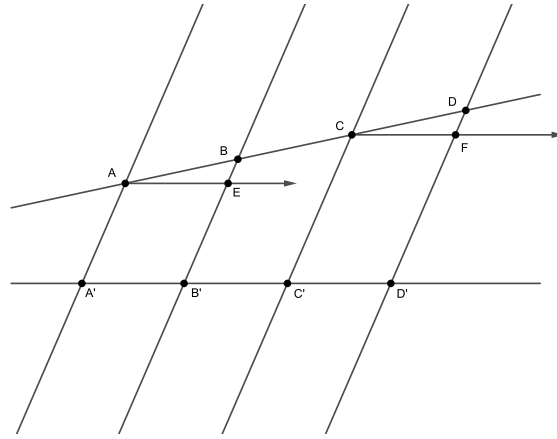
$$A = A_1 - A_2 - A_3 - \dots - A_{n+1} = B$$

osztópontokkal és mérjük fel az $\frac{\overline{AB}}{n}$ szakaszt a \overline{CD} -re ahányszor csak lehetséges:

$$k \frac{\overline{AB}}{n} \leq \overline{CD} < (k+1) \frac{\overline{AB}}{n} \Rightarrow \frac{k}{n} \leq \overline{CD} / \overline{AB} < \frac{k+1}{n}.$$

Az első és második lépés szerint $A' = A'_1 - A'_2 - A'_3 - \dots - A'_{n+1} = B'$ az $\overline{A'B'}$ szakasz n egyenlő részre osztása, továbbá

$$k \frac{\overline{A'B'}}{n} \leq \overline{C'D'} < (k+1) \frac{\overline{A'B'}}{n} \Rightarrow \frac{k}{n} \leq \overline{C'D'} / \overline{A'B'} < \frac{k+1}{n}.$$



2. ábra.

Mivel a távolság nem lehet a befoglaló intervallum hosszánál nagyobb,

$$\left| \left(\overline{CD} / \overline{AB} \right) - \left(\overline{C'D'} / \overline{A'B'} \right) \right| \leq \frac{1}{n},$$

ahonnan az $n \rightarrow \infty$ határátmenetet véve következik az állítás. \square

3. Tétel. (A párhuzamos szelők tételének megfordítása) *Ha két egyenes úgy metszi egy valódi szög szárait, hogy az egyik szögszáron keletkező, a csúcsot a metszéspontokkal összekötő szakaszok aránya megegyezik a másik szögszáron keletkező megfelelő szakaszok arányával, akkor a két egyenes párhuzamos.*

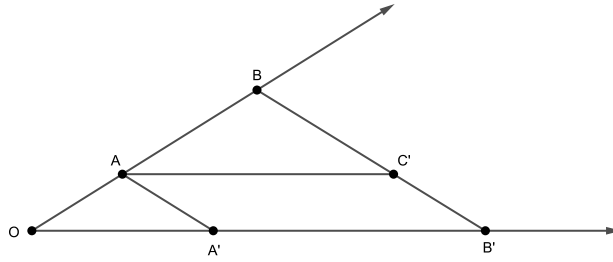
Bizonyítás. A tétel a párhuzamos egyenes unicitásának, a párhuzamos szelők és a szakaszfelmérés tételének a következménye: jelölje A, B és A', B' rendre az egyes szögszárakon keletkező metszéspontokat. Ha a B pontból az $l_{AA'}$ egyenessel párhuzamost indítunk, akkor a másik szögszáron keletkező metszésponttal kiszámított arány - a párhuzamos szelők tétele szerint - megegyezik az eredeti metszéspontokkal kiszámított aránnyal. Következésképpen az új metszéspont és az eredeti egyenlő távolságra van a szög csúcsától az $O\vec{A}'$ félegyenesen. A szakaszfelmérés tétele szerint tehát egybeesnek és $l_{AA'}$ párhuzamos $l_{BB'}$ - vel. \square

4. Tétel. (A párhuzamos szelők tételének alkalmazása) *Ha két párhuzamos egyenes metszi egy valódi szög szárait, akkor a szögszárakon keletkező, a csúcsot a metszéspontokkal összekötő szakaszok aránya megegyezik a keresztszakaszok arányával.*

Bizonyítás. Tekintsük az $AOA'\angle = BOB'\angle$ szöveget és tegyük fel, hogy $l_{AA'}$ párhuzamos az $l_{BB'}$ egyenessel. Mivel $O' = O$, csupán azt kell igazolnunk, hogy a keresztszakaszok aránya megegyezik a szögszárakon keletkező szakaszok (közös) arányával. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét az $OBB'\angle$ szögre (3. ábra):

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{BO}} = \frac{\overline{C'B'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}},$$

hiszen az A, A', B' és C' pontok egy paralelogrammát határoznak meg. \square



3. ábra.

1.3. Hasonló háromszögek, arányossági tételek derékszögű háromszögben

A párhuzamos szelők tételei, a (SAS) kongruencia-axióma és a kongruenciatételek szintézise a hasonló háromszögek elmélete. Hasonlósági axióma előírására tehát nincs szükség, bár olyan felépítés is ismert, mely a párhuzamos szelők tételét axiómaként mondja ki [1, Similarity axiom].

2. Definíció. *Két háromszöget hasonlónak mondunk, ha létezik a csúcsaik között olyan megfeleltetés, hogy az egymásnak megfelelő oldalak aránya egyenlő és a megfelelő szögek kongruensek. A megfelelő oldalak közös arányát a hasonlóság arányának nevezzük.*

1. Megjegyzés. Az egybevágó háromszögek is hasonlók; a hasonlóság aránya 1.

5. Tétel. (hasonlósági tételek) *Ha két háromszögben*

(S'AS') két-két megfelelő oldal aránya egyenlő és a közbezárt szögek kongruensek

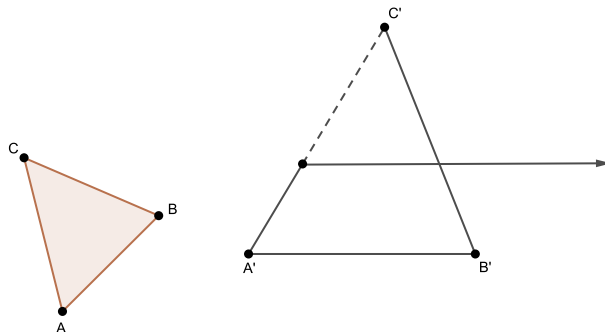
(S'S'S') a megfelelő oldalak aránya egyenlő

(S's'A) két-két megfelelő oldal aránya egyenlő és az oldalak közül a nagyobbikkal szemközti szögek kongruensek

(AAA) a megfelelő szögek kongruensek,

akkor a két háromszög hasonló.

Bizonyítás. Amennyiben a hasonlóság aránya 1, akkor (S'AS'), (S'S'S') és (S's'A) egybeesik a kongruencia-axiómával, illetve a megfelelő kongruenciatétellel. Tegyük fel, hogy az $ABC\triangle$ és az $A'B'C'\triangle$ háromszögekre teljesül (S'AS'), (S'S'S') vagy (S's'A) az $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$ és $C \rightarrow C'$ megfeleltetésnél. Mivel a hasonlóság aránya 1-től különböző, feltehetjük, hogy az $A'B'C'\triangle$ megfelelő oldalai a nagyobbak. Válasszunk ki egy olyan csúcsot, ahol a hasonlósági feltételnek eleget tevő oldalak találkoznak - csupán az (S'S'S') esetben adódnak opciók. Zsugorítsuk a háromszöget mindaddig, amíg az arány 1 lesz. A párhuzamos szelők tételének megfordítását alkalmazva, a kiválasztott csúccsal



4. ábra.

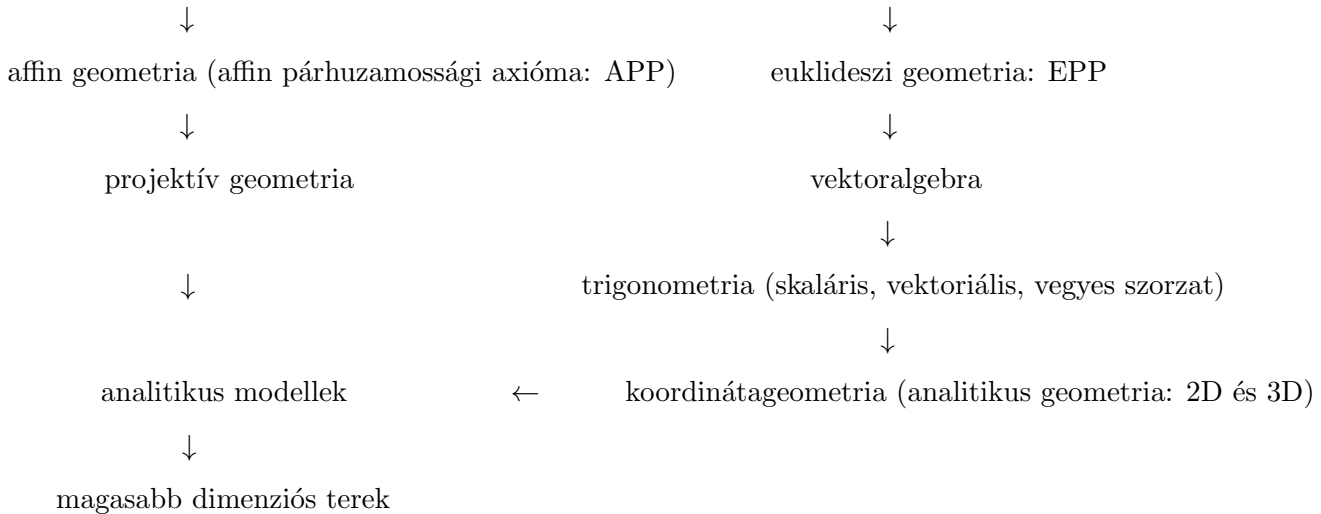
szemközti oldalegyenessel párhuzamos egyenest kapunk, ami - a párhuzamosság szükséges feltétele szerint - biztosítja a keletkező szögek egybevágóságát a csúccsal szemközti oldalon nyugvó szögekkel. A párhuzamos szelők tételének alkalmazása pedig mutatja, hogy a csúccsal szemközti oldal ugyanolyan arányban zsugorodik, mint a csúcsban találkozó bármelyike. Ez azt jelenti, hogy az eljárás egy az $A'B'C'$ Δ háromszöghöz hasonló háromszöget ad, mely a megfelelő kongruenciátétel értelmében egybevágó az ABC Δ háromszöggel. Ezért az ABC Δ és az $A'B'C'$ Δ háromszögek hasonlóak. Tegyük fel, hogy (AAA) teljesül. Ha két megfelelő oldal megegyezik, akkor az (ASA) kongruenciátétel alapján készen vagyunk (a hasonlóság aránya 1). Ha két megfelelő oldal aránya 1-től különböző, akkor mérjük fel a kisebb oldalt a nagyobbikra egy csúcsból kiindulva és húzzunk párhuzamost a csúccsal szemközti oldallal (4. ábra). A párhuzamos szelők tétele és alkalmazása szerint egy a nagyobbikhoz hasonló, a kisebbikkel pedig egybevágó háromszöget konstruáltunk. \square

6. Tétel. (arányossági tételek derékszögű háromszögben) *Jelölje a , b és c egy derékszögű háromszög befogóit, illetve átfogóját. Ha m az átfogóhoz tartozó magasság, p és q pedig rendre az a és b befogók átfogóra eső merőleges vetületének hosszát jelölik, akkor $m^2 = pq$, $a^2 = cp$ és $b^2 = cq$, $a^2 + b^2 = c^2$.*

Bizonyítás. Jelölje A , B és C a derékszögű háromszög csúcsait, T pedig a C csúcsból a szemközti átfogóra bocsátott merőleges talppontját. Mivel az ABC Δ , ACT Δ és BCT Δ háromszögek hasonlóak, a megfelelő oldalak aránya adja, hogy $m^2 = pq$ (a két kisebb háromszög hasonlósága), $a^2 = cp$ és $b^2 = cq$ (a kisebb háromszögeknek a nagyhoz való hasonlósága). Utóbbiakat összegezve $a^2 + b^2 = cp + cq = c(p + q) = c^2$. \square

2. Megjegyzés. Az iménti tételben szereplő összefüggések rendre a magasságtétel, a befogótétel és Pitagorasz tétele.

Az eddigiek alapján kidolgozható a vektoralgebra az euklideszi tér irányított szakaszain bevezetett ekvivalenciareláció segítségével. A vektorok birtokában a trigonometria alapjait, majd visszacsatolásként a vektorok skaláris, vektoriális és vegyes szorzatát tárgyalhatjuk. Ezzel párhuzamosan pedig az analitikus, vagy koordinátageometria tárgyalása is megkezdhető; a részletekért ld. [7].



2. Egybevágósági transzformációk

2.1. Az euklideszi sík izometriái

3. Definíció. Az euklideszi sík $\sigma: S \rightarrow S, A \rightarrow A' := \sigma(A)$ kölcsönösen egyértelmű leképezését izometriának nevezzük, ha távolságtartó, azaz $d(A', B') = d(A, B)$ bármely $A, B \in S$ esetén.

A továbbiakban összefoglaljuk a távolságtartó leképezések néhány nyilvánvaló tulajdonságát:

- Az euklideszi sík izometriái csoportot alkotnak a leképezéskompozíció műveletével

A háromszög-egyenlőtlenség és (SSS) azonnali következménye, hogy

- $A - B - C$ akkor és csak akkor, ha $A' - B' - C'$
- $m(ABC\angle) = m(A'B'C'\angle)$

Nyilvánvaló tehát, hogy az euklideszi sík minden izometriája egyenestartó (egyenes képe egyenes), párhuzamosságtartó (párhuzamos egyenespár képe párhuzamos egyenespár) és szögtartó. A továbbiakban gyakran felhasználjuk majd, hogy egy szakasz felező merőlegese a sík azon pontjainak halmaza, melyek a szakasz végpontjaitól egyenlő távolságra vannak - a részletek átgondolása hasznos gyakorlófeladat.

4. Definíció. Legyen $l \subset S$ egy adott egyenes; az l egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözésen olyan $\sigma_l: S \rightarrow S, X \rightarrow X' := \sigma_l(X)$ transzformációt értünk, ahol

- $X' = X$ bármely $X \in l$ esetén
- ha $X \notin l$, akkor l az $\overline{XX'}$ szakasz felező merőlegese

7. Tétel. A tengelyes tükrözések izometriák.

Bizonyítás. A távolságtartás evidens, ha A és $B \in l$, hiszen $A = A'$ és $B = B'$. Mivel a szakaszfelező merőleges azon pontok mértani helye, melyek egyenlő távolságra vannak a szakasz végpontjaitól, ezért a távolságtartás nyilvánvaló az $A \in l$, de $B \notin l$ esetben is: $d(A', B') = d(A, B) = d(A, B)$. Most tegyük fel, hogy $A \notin l$ és $B \notin l$. Ha $l_{AB} \cap l \neq \emptyset$, akkor a $d(A, B)$ távolság könnyen kifejezhető $d(A, C')$ és $d(B, C')$ segítségével, ahol $C' = C$ az l_{AB} és az l egyenesek metszéspontja. Például a $B - A - C$ rendezés esetén $d(A, B) = d(B, C) - d(A, C)$. Másfelől $B - A - C$ maga után vonja, hogy $B' - A' - C'$. Ez nyilvánvaló, amennyiben $ACA'\angle$ egyenesszög, egyébként pedig a párhuzamos szelők tételének következménye: B' a B pont képe az $ACA'\angle$ szög szárainak tükörtengelyre merőleges vetítésénél. Ennélfogva

$$d(A', B') = d(B', C') - d(A', C') = d(B', C) - d(A', C) = d(B, C) - d(A, C) = d(A, B).$$

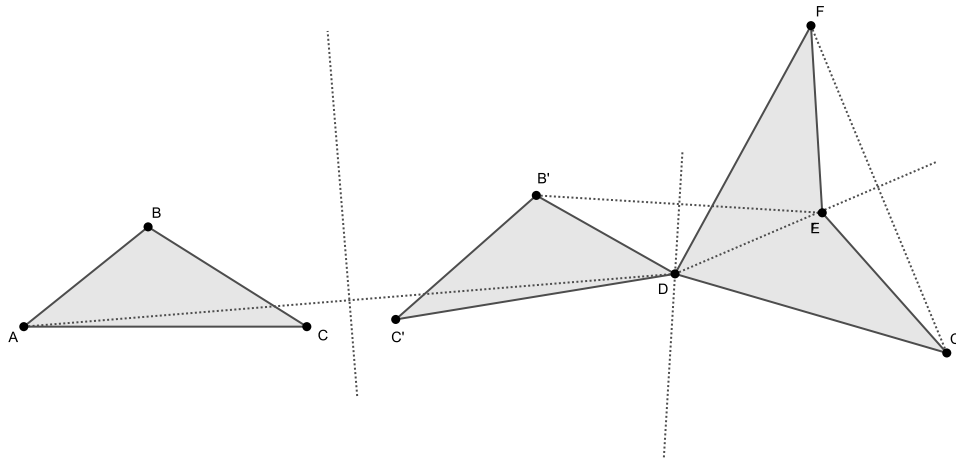
Végül vizsgáljuk azt az esetet, amikor $l_{AB} \cap l = \emptyset$ (azaz l_{AB} párhuzamos a tükörtengellyel) és hivatkozunk a paralelogramma-tételekre: $d(A, B) = d(T_A, T_B) = d(A', B')$, ahol T_A és T_B rendre az indexpontok merőleges vetületei a tükörtengelyen. \square

8. Tétel. (a síkizometriák fixponttétele) *Ha egy σ síkizometriának van két fixpontja, akkor ezek l egyenese pontonként fix és $\sigma = \sigma_l$, vagy pedig σ az identikus transzformáció. Három nem kollineáris fixpont esetén σ az identikus transzformáció.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $A = A'$, $B = B'$ és legyen X a sík egy további pontja. Ha $X \neq X'$, akkor a távolságtartás miatt

$$d(X, A) = d(X', A') = d(X', A),$$

azaz A az $\overline{XX'}$ szakasz felező merőlegesén van és ugyanez áll a B pontra is. Az $X \in l_{AB}$ esetben ez nyilvánvalóan ellentmondás, azaz $X = X'$ következik, egyébként pedig az izometria a tengelyes tükrözést definiáló tulajdonság szerint hat, feltéve, hogy az l_{AB} egyenes pontjain kívül nincs további fixpont. Végül tekintsük a $C \notin l_{AB}$ és $C' = C$ esetet. Ha X a sík egy további pontja és $X \neq X'$, akkor A , B és C szükségképpen kollineáris, hiszen rajta vannak az $\overline{XX'}$ szakasz felező merőlegesén. Az ellentmondás mutatja, hogy $X = X'$ bármely $X \in S$ esetén. \square



5. ábra.

9. Tétel. (a síkizometriák alaptétele) *Ha $ABC\Delta$ és $DEF\Delta$ egybevágó háromszögek, akkor egyértelműen létezik olyan $\sigma: S \rightarrow S$ síkizometria, melyre $\sigma(A) = D$, $\sigma(B) = E$ és $\sigma(C) = F$.*

Bizonyítás. Az egyértelműség a fixponttétel következménye, hiszen $\sigma(A) = D$, $\sigma(B) = E$ és $\sigma(C) = F$, illetve $\tilde{\sigma}(A) = D$, $\tilde{\sigma}(B) = E$ és $\tilde{\sigma}(C) = F$ maga után vonja, hogy a $\sigma := \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}$ izometriának van három nem kollineáris fixpontja. Ez azt jelenti, hogy σ az identikus transzformáció, azaz $\sigma = \tilde{\sigma}$. Az egzisztencia igazolása három lépésben történik (5. ábra). Először is legyen σ_1 az \overline{AD} szakasz felező merőlegesére vonatkozó tükrözés, amennyiben $A \neq D$; egyébként σ_1 az identikus transzformáció:

$$A' = \sigma_1(A) = D, \quad \sigma_1(B) = B', \quad \sigma_1(C) = C'. \quad (1)$$

A második lépésben legyen σ_2 a $\overline{B'E}$ szakasz felező merőlegesére vonatkozó tükrözés, amennyiben $B' \neq E$; egyébként σ_2 az identikus transzformáció. Mivel

$$d(D, E) = d(A, B) = d(A', B') = d(D, B'),$$

ezért D a tükörtengelyre esik, azaz

$$A'' = \sigma_2 \circ \sigma_1(A) = \sigma_2(A') = \sigma_2(D) = D, \quad B'' = \sigma_2 \circ \sigma_1(B) = \sigma_2(B') = E, \quad \sigma_2 \circ \sigma_1(C) = C''. \quad (2)$$

A harmadik lépésben pedig legyen σ_3 a $\overline{C''F}$ szakasz felező merőlegesére vonatkozó tükrözés, amennyiben $C'' \neq F$; egyébként σ_3 az identikus transzformáció. Mivel

$$d(D, F) = d(A, C) = d(A'', C'') = d(D, C''),$$

ezért D a tükörtengelyre esik. Hasonlóan

$$d(E, F) = d(B, C) = d(B'', C'') = d(E, C''),$$

ami azt jelenti, hogy

$$A''' = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1(A) = \sigma_3(A'') = \sigma_3(D) = D, \quad B''' = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1(B) = \sigma_3(B'') = \sigma_3(E) = E,$$

$C''' = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1(C) = \sigma_3(C'') = F$. Ezzel a bizonyítás teljes. \square

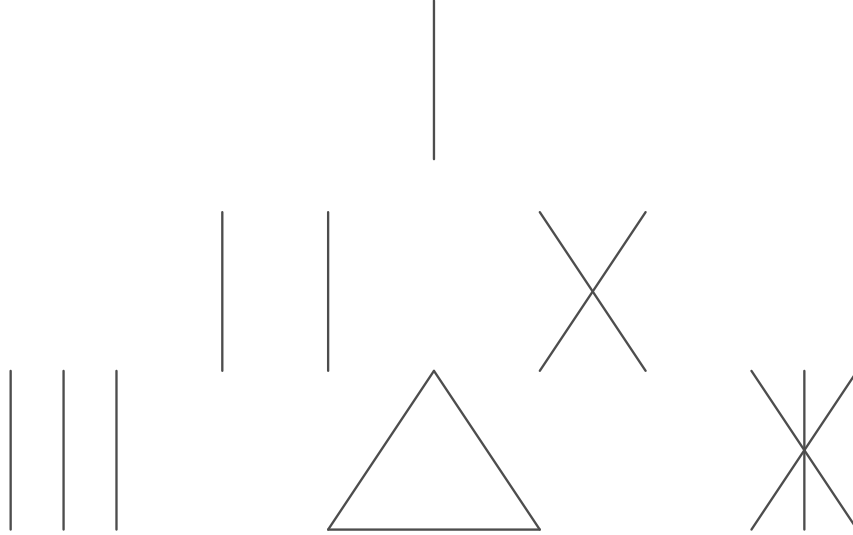
1. Következmény. *Egy síkizometriát egyértelműen meghatároz három nem kollineáris ponton vett hatása.*

2. Következmény. *Minden síkizometria legfeljebb három tengelyes tükrözés kompozíciója.*

A 6. ábra mutatja a három egyenes kölcsönös helyzetének lényegesen különböző eseteit.

5. Definíció. *Két párhuzamos egyenesre vonatkozó tükrözés kompozícióját eltolásnak nevezzük. Ha a tengelyek metszők, akkor forgásnak. A tengelyek metszéspontja a forgáscentrum. A kompozíció belső függvényéhez tartozó tengelyt belső, a külső függvényhez tartozó tengelyt pedig külső tengelynek hívjuk.*

A tengelyes tükrözések értelmezésére tekintettel bármely $\tau: S \rightarrow S$ eltolás esetén az X és a $\tau(X)$ pontok távolsága állandó, nevezetesen a tengelyek távolságának kétszerese. Továbbá mindkét tengely merőleges az X és a $\tau(X)$ pont tartóegyenesére az X pont választásától függetlenül. Utóbbi az eltolás ún. *irányát* reprezentáló egyenes.



6. ábra.

10. Tétel. (a három tengelyes tükrözés tétele I) *Három párhuzamos egyenesre vonatkozó tükrözés helyettesíthető egyetlen tengelyes tükrözéssel.*

Bizonyítás. Legyen $\sigma := \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ három párhuzamos egyenesre vonatkozó tükrözés kompozíciója és tekintsünk egy közös l merőleges egyenest, mely rendre az A_1 , A_2 és A_3 pontban metszi a tengelyeket. Nyilvánvaló, hogy a sík tetszőleges $X \in S$ pontjának képe egyértelműen meghatározott az l egyenesre vonatkozó merőleges vetületének képe által. Legyen az $f: l \rightarrow \mathbb{R}$ koordinátázásnál rendre $f(A_1) = a_1$, $f(A_2) = a_2$, $f(A_3) = a_3$ és x az X pont merőleges vetületének koordinátája. Figyelembe véve, hogy

$$\frac{x + x_1}{2} = a_1 \Rightarrow x_1 = 2a_1 - x,$$

a formula további alkalmazásával

$$x_3 = 2(a_3 - a_2 + a_1) - x \Rightarrow \frac{x + x_3}{2} = a_3 - a_2 + a_1,$$

azaz $\sigma(X)$ az X pont képe annál a tengelyes tükrözésnél, melynek tengelye az l egyenes $a_3 - a_2 + a_1$ koordinátájú pontjában emelt merőleges. \square

3. Következmény. (a szabad tengelyválasztás tétele I) *Egy eltolás tengelyes tükrözések kompozíciójaként történő előállításában az irányra merőleges belső/külső tengely tetszőlegesen megválasztható, ezek után a külső/belső tengely egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy $\tau = \sigma_2 \circ \sigma_1$ eltolást és legyen $\tilde{\sigma}$ egy az irányra merőleges tetszőleges egyenesre vonatkozó tükrözés. Ekkor $\sigma := \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_2$ tengelyes tükrözés és $\tau = \sigma_2 \circ \sigma_1 = \tilde{\sigma}_2 \circ \tilde{\sigma}_1$, ahol $\tilde{\sigma}$ tükörtengelye az irányra merőlegesen adott belső tengely. Hasonló megfontolásokkal kapjuk külső tengelyként a $\sigma := \tilde{\sigma} \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ típusú leképezéskompozíció segítségével: $\sigma := \tilde{\sigma} \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = \tilde{\sigma}_1$ tengelyes tükrözés és $\tau = \sigma_2 \circ \sigma_1 = \tilde{\sigma} \circ \tilde{\sigma}_1$, ahol $\tilde{\sigma}$ tükörtengelye az irányra merőlegesen adott külső tengely. \square

A tengelyes tükrözések értelmezésére tekintettel bármely O centrumú $\rho: S \rightarrow S$ forgás esetén az $XOX' \angle$ szög mértéke állandó, nevezetesen a tengelyek szögének kétszerese. A forgásirány a tengelyek sorrendjétől függ.

11. Tétel. (a három tengelyes tükrözés tétele II) *Három közös pontra illeszkedő egyenesre vonatkozó tükrözés helyettesíthető egyetlen tengelyes tükrözéssel.*

Bizonyítás. Legyen $\sigma := \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ három közös pontra illeszkedő egyenesre vonatkozó tükrözés kompozíciója és jelölje O a közös pontot. Tekintsük az O középpontú egységkört, mely rendre az A_1, A_2 és A_3 , illetve a megfelelő átellenes pontokban metszi a tengelyeket. Nyilvánvaló, hogy a sík tetszőleges $X \in S \setminus \{O\}$ pontjának képe egyértelműen meghatározott a körre eső vetületének képe által. Legyen a szögmérőn az egyeneseket meghatározó szög radiánban kifejezett mértéke rendre

$$m(A_1) = a_1 \pmod{\pi}, \quad m(A_2) = a_2 \pmod{\pi}, \quad m(A_3) = a_3 \pmod{\pi}$$

és x az X pont körre eső vetületének radiánban kifejezett mértéke - utóbbi $(\text{mod } 2\pi)$ értendő. Figyelembe véve, hogy

$$\frac{x + x_1}{2} \equiv a_1 \pmod{\pi} \Rightarrow x_1 \equiv 2a_1 - x \pmod{2\pi},$$

a formula további alkalmazásával

$$x_3 \equiv 2(a_3 - a_2 + a_1) - x \pmod{2\pi} \Rightarrow \frac{x + x_3}{2} \equiv a_3 - a_2 + a_1 \pmod{\pi},$$

azaz $\sigma(X)$ az X pont képe annál a tengelyes tükrözésnél, melynek tengelye az O körüli egységkört az $a_3 - a_2 + a_1 \pmod{\pi}$ mértékű szöggel meghatározott átellenes pontpárban metszi. \square

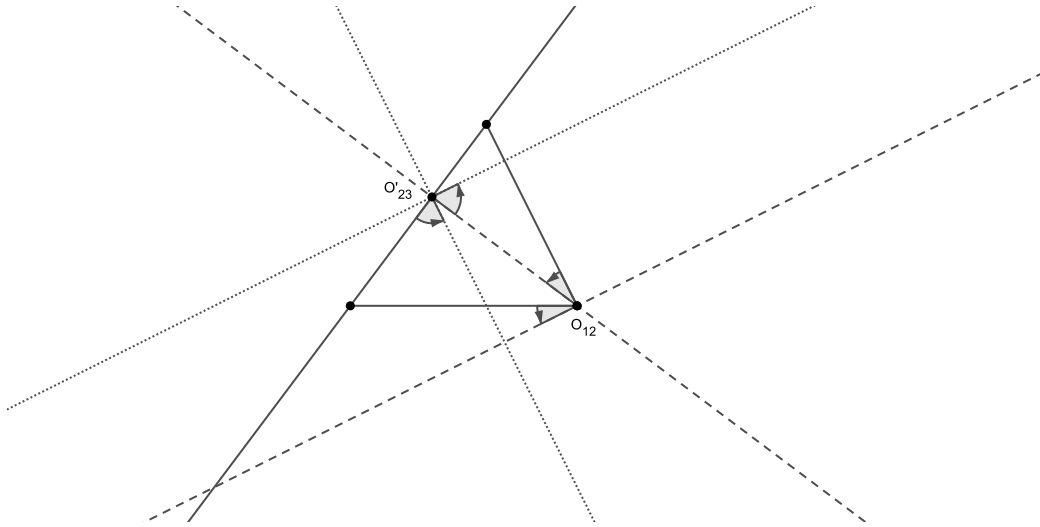
4. Következmény. (a szabad tengelyválasztás tétele II) *Egy forgás tengelyes tükrözések kompozíciójaként történő előállításában a forgáscentrumra illeszkedő belső/külső tengely tetszőlegesen megválasztható, ezek után a külső/belső tengely egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy $\rho = \sigma_2 \circ \sigma_1$ forgást és legyen $\tilde{\sigma}$ egy a centrumra illeszkedő tetszőleges egyenesre vonatkozó tükrözés. Ekkor $\sigma := \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_2$ tengelyes tükrözés és $\rho = \sigma_2 \circ \sigma_1 = \tilde{\sigma}_2 \circ \tilde{\sigma}$, ahol $\tilde{\sigma}$ tükörtengelye a centrumra illeszkedő adott belső tengely. Hasonló megfontolásokkal kapjuk külső tengelyként a $\sigma := \tilde{\sigma} \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ típusú leképezéskompozíció segítségével: $\sigma := \tilde{\sigma} \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = \tilde{\sigma}_1$ tengelyes tükrözés és $\rho = \sigma_2 \circ \sigma_1 = \tilde{\sigma} \circ \tilde{\sigma}_1$, ahol $\tilde{\sigma}$ tükörtengelye a centrumra illeszkedő adott külső tengely. \square

6. Definíció. *Egy tükrözés és egy tengelyirányú eltolás kompozícióját csúsztatva tükrözésnek nevezzük.*

3. Megjegyzés. A csúsztatva tükrözés definíciójában a tükrözés és az eltolás sorrendje közömbös.

12. Tétel. (a síkizometriák osztályozása) *Egy síkizometria identikus leképezés, tengelyes tükrözés, eltolás, forgás, vagy csúsztatva tükrözés.*



7. ábra.

Bizonyítás. Csupán azt kell igazolnunk, hogy ha a három tengely se nem párhuzamos, se nem illeszkedik közös pontra, akkor a $\sigma := \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ izometria csúsztatva tükrözés. Az általánosság sérelme nélkül feltehető, hogy az l_1 és l_2 belső tengelyek metszők (ellenkező esetben tekintsük σ inverzét). Jelölje O_{12} a metszéspontot és tekintsük a $\rho = \sigma_2 \circ \sigma_1$ forgást, amit előállíthatunk az O_{12} pontból az l_3 egyenesre bocsátott merőleges egyenes, mint külső tengely segítségével. Szemléletesen szólva mereven elforgatjuk a metsző egyenespárt O_{12} körül mindaddig, amíg l_2 merőleges nem lesz az l_3 egyenesre. Sem a forgáscentrum, sem a forgásszög, sem pedig a forgásirány (a tengelyek sorrendje) nem változik:

$$\sigma = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_3 \circ \sigma_{2'} \circ \sigma_{1'},$$

ahol l'_2 merőleges az l_3 egyenesre. Jelölje O'_{23} a metszéspontot. Tekintsük most a $\rho' = \sigma_3 \circ \sigma_{2'}$ forgást, amit előállíthatunk az O'_{23} pontból az l'_1 egyenesre bocsátott merőleges egyenes, mint külső tengely segítségével. Szemléletesen szólva mereven elforgatjuk a metsző egyenespárt O'_{23} körül mindaddig, amíg l_3 merőleges nem lesz az l'_1 egyenesre. Sem a forgáscentrum, sem a forgásszög, sem pedig a forgásirány (a tengelyek sorrendje) nem változik:

$$\sigma = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_3 \circ \sigma_{2'} \circ \sigma_{1'} = \sigma_{3'} \circ \sigma_{2''} \circ \sigma_{1''},$$

ahol l'_3 közös merőlegese a másik két egyenesnek, azaz a transzformáció csúsztatva tükrözés (7. ábra).

□

2.2. Az euklideszi tér izometriáinak vázlatos áttekintése

7. Definíció. Az euklideszi tér $\sigma: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}, A \rightarrow A' := \sigma(A)$ kölcsönösen egyértelmű leképezését izometriának nevezzük, ha távolságtartó, azaz $d(A', B') = d(A, B)$ bármely $A, B \in \mathbb{E}$ esetén.

A továbbiakban összefoglaljuk a távolságtartó leképezések néhány nyilvánvaló tulajdonságát:

- Az euklideszi tér izometriái csoportot alkotnak a leképezéskompozíció műveletével

A háromszög-egyenlőtlenség és (SSS) azonnali következménye, hogy

- $A - B - C$ akkor és csak akkor, ha $A' - B' - C'$

- $m(ABC\angle) = m(A'B'C'\angle)$

Nyilvánvaló tehát, hogy minden izometria egyenestartó (egyenes képe egyenes), síktartó, párhuzamos-ságtartó (párhuzamos egyenespár képe párhuzamos egyenespár, párhuzamos síkpár képe párhuzamos síkpár) és szögtartó. A továbbiakban gyakran felhasználjuk majd, hogy egy szakasz felező merőleges síkja azon pontok halmaza, melyek a szakasz végpontjaitól egyenlő távolságra vannak - a részletek átgondolása hasznos gyakorlófeladat.

8. Definíció. Legyen $S \subset \mathbb{E}$ egy adott sík; az S síkra vonatkozó tükrözésen olyan $\sigma_S: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}, X \rightarrow X' := \sigma_S(X)$ transzformációt értünk, ahol

- $X' = X$ bármely $X \in S$ esetén
- ha $X \notin S$, akkor S az $\overline{XX'}$ szakasz felező merőleges síkja

13. Tétel. *A síkra tükrözések izometriák.*

Bizonyítás. A távolságtartás evidens, ha A és $B \in S$, hiszen $A = A'$ és $B = B'$. Mivel a szakaszfelező merőleges sík azon pontok mértani helye a térben, melyek egyenlő távolságra vannak a szakasz végpontjaitól, ezért a távolságtartás nyilvánvaló az $A \in S$, de $B \notin S$ esetben is: $d(A', B') = d(A, B) = d(A, B)$. Most tegyük fel, hogy $A \notin S$ és $B \notin S$. Ha $l_{AB} \cap S \neq \emptyset$, akkor a $d(A, B)$ távolság könnyen kifejezhető $d(A, C)$ és $d(B, C)$ segítségével, ahol $C' = C$ az l_{AB} egyenes és az S sík metszéspontja. Például a $B - A - C$ rendezés esetén $d(A, B) = d(B, C) - d(A, C)$. Másfelől $B - A - C$ maga után vonja, hogy $B' - A' - C'$. Ez nyilvánvaló, amennyiben $ACA'\angle$ egyenesszög, egyébként pedig a párhuzamos szelők tételének következménye az $ACA'\angle$ által kifeszített síkban: B' a B pont képe az $ACA'\angle$ szög szárainak tükörsíkra merőleges vetítésénél. Ennélfogva

$$d(A', B') = d(B', C') - d(A', C') = d(B', C) - d(A', C) = d(B, C) - d(A, C) = d(A, B).$$

Végül vizsgáljuk azt az esetet, amikor $l_{AB} \cap S = \emptyset$ (azaz l_{AB} párhuzamos a tükörsíkkal) és hivatkozunk a paralelogramma-tételekre: $d(A, B) = d(T_A, T_B) = d(A', B')$, ahol T_A és T_B rendre az indexpontok merőleges vetületei a tükörsíkon. \square

Követve az előző alfejezetben látott felépítést és bizonyítási módszereket, igazolható, hogy bármely térizometria legfeljebb négy síkra vonatkozó tükrözés kompozíciója. A részletek átgondolását az olvasóra bízunk.

9. Definíció. *Két párhuzamos síkra vonatkozó tükrözés kompozícióját eltolásnak nevezzük. Ha a síkok metszők, akkor tengely körüli forgásnak. A síkok metszésvonala a forgástengely. A kompozíció belső függvényéhez tartozó síkot belső, a külső függvényéhez tartozó síkot pedig külső tükörsíknak hívjuk.*

A síkra tükrözések értelmezésére tekintettel bármely $\tau: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eltolás esetén az X és a $\tau(X)$ pontok távolsága állandó, nevezetesen a síkok távolságának kétszerese. Továbbá mindkét sík merőleges az X és a $\tau(X)$ pont tartóegyenesére az X pont választásától függetlenül. Utóbbi az eltolás ún. *irányát* reprezentáló egyenes.

14. Tétel. (a három síkra tükrözés tétele I) *Három párhuzamos síkra vonatkozó tükrözés helyettesíthető egyetlen síkra vonatkozó tükrözéssel.*

Bizonyítás. Legyen $\sigma := \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ három párhuzamos síkra vonatkozó tükrözés kompozíciója és tekintsünk egy közös l merőleges egyenest, mely rendre az A_1 , A_2 és A_3 pontban metszi a tükrősíkokat. Nyilvánvaló, hogy a tér tetszőleges $X \in \mathbb{E}$ pontjának képe egyértelműen meghatározott az l egyenesre vonatkozó merőleges vetületének képe által. Legyen az $f: l \rightarrow \mathbb{R}$ koordinátázásnál rendre $f(A_1) = a_1$, $f(A_2) = a_2$, $f(A_3) = a_3$ és x az X pont merőleges vetületének koordinátája. Figyelembe véve, hogy

$$\frac{x + x_1}{2} = a_1 \Rightarrow x_1 = 2a_1 - x,$$

a formula további alkalmazásával

$$x_3 = 2(a_3 - a_2 + a_1) - x \Rightarrow \frac{x + x_3}{2} = a_3 - a_2 + a_1,$$

azaz $\sigma(X)$ az X pont képe annál a síkra vonatkozó tükrözésnél, melynek síkja az l egyenes $a_3 - a_2 + a_1$ koordinátájú ponjában emelt merőleges sík. \square

5. Következmény. (a szabad síkválasztás tétele I) *Egy eltolás síkra vonatkozó tükrözések kompozíciójaként történő előállításában az irányra merőleges belső/külső sík tetszőlegesen megválasztható, ezek után a külső/belső sík egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy $\tau = \sigma_2 \circ \sigma_1$ eltolást és legyen $\tilde{\sigma}$ egy az irányra merőleges tetszőleges síkra vonatkozó tükrözés. Ekkor $\sigma := \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_2$ síkra vonatkozó tükrözés és $\tau = \sigma_2 \circ \sigma_1 = \tilde{\sigma}_2 \circ \tilde{\sigma}$, ahol $\tilde{\sigma}$ tükrősíkja az irányra merőlegesen adott belső sík. Hasonló megfontolásokkal kapjuk külső síkként a $\sigma := \tilde{\sigma} \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ típusú leképezéskompozíció segítségével: $\sigma := \tilde{\sigma} \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = \tilde{\sigma}_1$ síkra vonatkozó tükrözés és $\tau = \sigma_2 \circ \sigma_1 = \tilde{\sigma} \circ \tilde{\sigma}_1$, ahol $\tilde{\sigma}$ tükrősíkja az irányra merőlegesen adott külső sík. \square

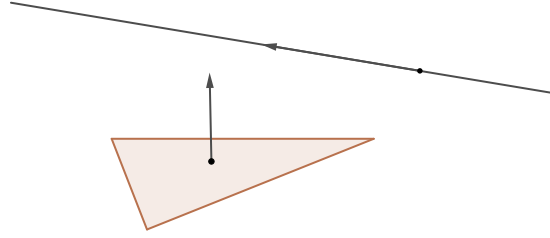
A síkra tükrözések értelmezésére tekintettel bármely l tengelyű $\rho: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ forgás esetén az $XOX' \angle$ szög mértéke állandó, nevezetesen a síkok szögének kétszerese, ahol O az X pontnak a forgástengelyre eső merőleges vetülete. A forgásirány a síkok sorrendjétől függ.

15. Tétel. (a három síkra tükrözés tétele II) *Három közös egyenesre illeszkedő síkra vonatkozó tükrözés helyettesíthető egyetlen síkra vonatkozó tükrözéssel.*

Bizonyítás. Legyen $\sigma := \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ három közös egyenesre illeszkedő síkra vonatkozó tükrözés kompozíciója és jelölje l a közös egyenest. Nyilvánvaló, hogy egy a tengelyre merőleges tetszőleges síkra megszorítva, σ három tengelyes tükrözés kompozícióját adja. Alkalmazva a bizonyítandó tétel síkbeli megfelelőjét, ez egyetlen tengelyes tükrözésre redukálódik a síkban. Az így kapott tükrötengely és a forgástengely által meghatározott síkra vonatkozó tükrözés helyettesíti a három síkra vonatkozó tükrözés kompozícióját a térben. \square

6. Következmény. (a szabad síkválasztás tétele II) *Egy forgás síkra vonatkozó tükrözések kompozíciójaként történő előállításában a forgástengelyre illeszkedő belső/külső sík tetszőlegesen megválasztható, ezek után a külső/belső sík egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy $\rho = \sigma_2 \circ \sigma_1$ térbeli forgást és legyen $\tilde{\sigma}$ egy a forgástengelyre illeszkedő tetszőleges síkra vonatkozó tükrözés. Ekkor $\sigma := \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_2$ síkra vonatkozó tükrözés és $\rho = \sigma_2 \circ \sigma_1 = \tilde{\sigma}_2 \circ \tilde{\sigma}$, ahol $\tilde{\sigma}$ tükrősíkja a forgástengelyre illeszkedő adott belső sík. Hasonló megfontolásokkal kapjuk külső síkként a $\sigma := \tilde{\sigma} \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ típusú leképezéskompozíció segítségével: $\sigma := \tilde{\sigma} \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = \tilde{\sigma}_1$ tengelyes tükrözés és $\rho = \sigma_2 \circ \sigma_1 = \tilde{\sigma} \circ \tilde{\sigma}_1$, ahol $\tilde{\sigma}$ tükrősíkja a forgástengelyre illeszkedő adott külső sík. \square



8. ábra.

10. Definíció. Egy síkra vonatkozó tükrözés és egy a síkkal párhuzamos irányú eltolás kompozícióját csúsztatva tükrözésnek nevezzük. Egy síkra vonatkozó tükrözés és egy a síkra merőleges egyenes körüli forgatás kompozícióját forgatva tükrözésnek nevezzük.

4. Megjegyzés. A csúsztatva, illetve forgatva tükrözés definíciójában a tükrözés és az eltolás, illetve a tükrözés és a forgás sorrendje közömbös.

2. Feladat. Igazolja, hogy ha három egyenes páronként egy síkban van, de mindhárman nincsenek ugyanabban a síkban, akkor az egyenesek párhuzamosak, vagy közös pontban futnak össze.

16. Tétel. Három se nem párhuzamos, se közös egyenesre nem illeszkedő síkra vonatkozó tükrözés kompozíciója csúsztatva, vagy forgatva tükrözés.

Bizonyítás. Az általánosság sérelme nélkül feltehető, hogy az S_1 és S_2 belső tükörsíkok metszők - ellenkező esetben tekintsük a $\sigma = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ transzformáció inverzét. Jelölje l_{12} a metszésvonalat és tekintsük a $\rho = \sigma_2 \circ \sigma_1$ forgást, amit előállíthatunk az l_{12} forgástengelyre illeszkedő és az S_3 tükörsíkra merőleges sík¹, mint külső tükörsík segítségével. Szemléletesen szólva mereven elforgatjuk a metsző síkpárt az l_{12} tengely körül mindaddig, amíg S_2 merőleges nem lesz az S_3 síkra. Sem a forgástengely, sem a forgásszög, sem pedig a forgásirány (a síkok sorrendje) nem változik:

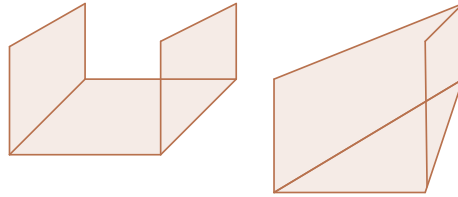
$$\sigma = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_3 \circ \sigma_{2'} \circ \sigma_{1'},$$

ahol $S_{2'}$ merőleges az S_3 síkra. Jelölje l'_{23} a metszésvonalat. Tekintsük most a $\rho' = \sigma_3 \circ \sigma_{2'}$ forgást, amit előállíthatunk az l'_{23} forgástengelyre illeszkedő és az S_1' síkra merőleges sík, mint külső tükörsík segítségével. Szemléletesen szólva mereven elforgatjuk a metsző síkpárt l'_{23} körül mindaddig, amíg S_3 merőleges nem lesz az S_1' síkra. Sem a forgáscentrum, sem a forgásszög, sem pedig a forgásirány (a síkok sorrendje) nem változik:

$$\sigma = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_3 \circ \sigma_{2'} \circ \sigma_{1'} = \sigma_{3'} \circ \sigma_{2''} \circ \sigma_{1''},$$

ahol S_3' közös merőlegese az S_2'' és az S_1'' síknak. Ha a két sík párhuzamos, akkor csúsztatva tükrözésről, ha pedig metsző, akkor forgatva tükrözésről van szó (9. ábra). \square

¹Ezt a síkot a térelemek általános helyzete esetén az l_{12} egyenes és az S_3 síkra eső merőleges vetülete feszíti ki. Koordinátageometriai nyelven megfogalmazva [7]: az l_{12} egyenesre illeszkedő és az S_3 sík normálvektorával párhuzamos síkról van szó (8. ábra).



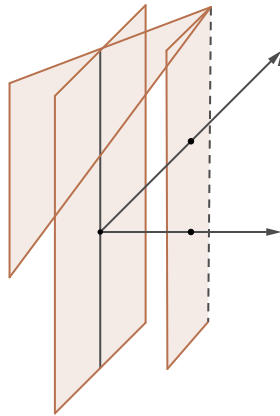
9. ábra.

11. Definíció. *Egy tengely körüli forgatás és egy a tengellyel párhuzamos irányú eltolás kompozícióját csavarmozgásnak nevezzük.*

5. Megjegyzés. A csavarmozgás definíciójában a forgatás és az eltolás sorrendje közömbös.

17. Tétel. (a térizometriák osztályozása) *Egy térizometria identikus leképezés, síkra vonatkozó tükrözés, eltolás, tengely körüli forgás, csúsztatva, vagy forgatva tükrözés, illetve csavarmozgás.*

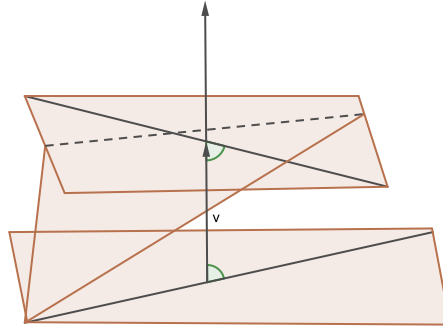
A bizonyítás két lemmára épül. Ezeknek az igazolása során pedig vektoralgebrai ismereteinkre támaszkodunk [7].



10. ábra.

1. Lemma. *Egy tengely körüli forgás és egy eltolás kompozíciója csavarmozgás.*

Bizonyítás. Ha az eltolóvektor párhuzamos a tengellyel, akkor nincs mit bizonyítanunk. Egyébként pedig bontsuk fel az eltolóvektort egy tengellyel párhuzamos és egy arra merőleges vektor összegére. Ha a merőleges komponenssel történő eltolás és a tengely körüli forgás előállításához ugyanazt a síkot használjuk váltott pozíciókban (belső-külső), akkor csavarmozgást kapunk (10. ábra). \square



11. ábra.

2. Lemma. *Két kitérő egyenes körüli forgatás kompozíciója csavarmozgás.*

Bizonyítás. Legyen $\sigma = \rho_2 \circ \rho_1$ két kitérő egyenes körüli forgatás kompozíciója. Alkalmazzunk egy eltolást a közös normáltranszverzális szakasz által reprezentált vektor kétszeresével: $\tau_{2v} \circ \sigma = \tau_{2v} \circ \rho_2 \circ \rho_1$. Az előző lemma értelmében $\tau_{2v} \circ \rho_2$ csavarmozgás, mivel azonban az eltolóvektornak nincs a forgástengellyel párhuzamos komponense, ezért $\tau_{2v} \circ \rho_2$ tengely körüli forgatás, a forgástengely pedig metszi a ρ_1 forgástengelyét (11. ábra; a konstrukció ugyanaz, mint az 1. Lemma bizonyítása esetében). Ha azonban a tengelyek közös síkban vannak, akkor síkjukat felhasználhatjuk a forgások előállításához váltott pozíciókban (belső-külső). Ez azt jelenti, hogy a szereplő tükrözések száma kettőre redukálható: tengely körüli forgás, vagy eltolás. Mivel metsző egyenesekről van szó (a metszéspont fixpont), ezért $\tau_{2v} \circ \rho_2 \circ \rho_1 = \rho_3$ tengely körüli forgás. Végül pedig $\rho_2 \circ \rho_1 = \tau_{-2v} \circ \rho_3$, ahol a jobb oldal csavarmozgás az előző lemma értelmében. \square

Most tekintsük négy síkra vonatkozó tükrözés kompozícióját: $\sigma = \sigma_4 \circ \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$. Általános esetben, azaz ha a kompozícióban szereplő tükrözések száma nem redukálható, $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ csúsztatva, vagy forgatva tükrözés. Csúsztatva tükrözés esetén a következő esetek lehetségesek. A csúsztatva tükrözés tükörsíkja párhuzamos az S_4 tükörsíkkal, azaz eltolások kompozícióját kapjuk, ami ugyancsak eltolás. Ez ellentmondás, hiszen feltételeztük, hogy a tükrözések száma nem redukálható. Amennyiben viszont a csúsztatva tükrözés tükörsíkja metszi az S_4 síkot, akkor az 1. Lemma alapján készen vagyunk. Forgatva tükrözés esetén a következő esetek lehetségesek. A forgatva tükrözés tükörsíkja párhuzamos az S_4 tükörsíkkal, azaz csavarmozgásról van szó. Amennyiben viszont a forgatva tükrözés tükörsíkja metszi az S_4 síkot, akkor a 2. Lemmára hivatkozhatunk.

2.3. Az egybevágóság általános fogalma

12. Definíció. *Az euklideszi sík, illetve tér két alakzata egybevágó, ha van olyan sík-, illetve térizometria, mely egyiket a másikba viszi.*

6. Megjegyzés. A síkizometriák alaptétele mutatja, hogy az egybevágóság fogalmának kiterjesztése a permanencia elvét figyelembe véve történik.

Az n -dimenziós euklideszi tér egybevágóságairól ld. [3, 11. fejezet], [6].

3. Hasonlósági transzformációk

13. Definíció. Az euklideszi sík, illetve a tér egy kölcsönösen egyértelmű önmagára való leképezését k -arányú hasonlóságnak nevezzük, ha $d(A', B') = kd(A, B)$ a sík, illetve a tér bármely A és B pontja esetén, ahol $k > 0$ adott pozitív szám.

Minden izometria hasonlóság a $k = 1$ választás mellett.

3.1. A hasonlóságok fixponttétele

18. Tétel. Ha egy hasonlóság nem izometria, akkor pontosan egy fixpontja van.

Bizonyítás. Az egyértelműség nyilvánvaló, hiszen $A \neq B$ fixpontok esetén

$$d(A', B') = d(A, B) = kd(A, B) \implies k = 1$$

következik, ami azt jelenti, hogy a leképezés izometria. Ha $k \neq 1$, akkor az általánosság sérelme nélkül feltehető, hogy $0 < k < 1$. A $k > 1$ esetben térjünk át az $(1/k)$ -arányú inverz hasonlóság vizsgálatára. Tekintsük a következő rekurzív sorozatot: legyen A_0 tetszőleges pont a síkon (illetve a térben), $A_{n+1} := A'_n$ bármely $n = 1, 2, \dots$ természetes szám esetén. Ekkor

$$d(A_1, A_2) = d(A'_0, A'_1) = kd(A_0, A_1),$$

$$d(A_2, A_3) = d(A'_1, A'_2) = kd(A_1, A_2) = k^2d(A_0, A_1), \dots$$

Teljes indukció segítségével:

$$d(A_n, A_{n+1}) = k^n d(A_0, A_1).$$

Legyen most $m > n$ és alkalmazzuk a töröttvonal-egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} d(A_n, A_m) &\leq d(A_n, A_{n+1}) + \dots + d(A_{m-1}, A_m) = d(A_0, A_1) (k^n + \dots + k^{m-1}) = \\ &= \frac{d(A_0, A_1)}{k} (k^{n+1} + \dots + k^m). \end{aligned}$$

Ha $0 < k < 1$, akkor a k kvóciensű végtelen mértani sor konvergens, ami azt jelenti, hogy a részletösszegeiből képzett $s_n = 1 + k + \dots + k^n$ sorozat konvergens; határértéke pedig

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1-k}.$$

Ismert, hogy minden konvergens sorozat egyben Cauchy-sorozat, ami azt jelenti, hogy az

$$s_m - s_n = k^{n+1} + \dots + k^m$$

differentia tetszőleges kicsivé tehető. Ennélfogva ugyanez áll a $d(A_n, A_m)$ távolságra elegendően nagy $m > n$ indexek választása esetén. A_n tehát egy Cauchy-sorozat az euklideszi síkon, illetve a térben. Koordinátageometriai ismereteink birtokában [7] a sík a rendezett valós számpárok, a tér pedig a rendezett valós számhármassok terével azonosítható be, ellátva őket a szokásos

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}, \quad \text{illetve} \quad d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

metrikákkal (v.ö. Pitagorasz tétele). Mivel a valós számok teljes metrikus teret alkotnak, ugyanez áll az euklideszi síkra, illetve a térre is. Ez azt jelenti, hogy minden Cauchy sorozat konvergens, azaz létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ határérték. A bizonyítást lezárandó megmutatjuk, hogy A a transzformáció fixpontja. Mivel egy hasonlósági transzformáció nyilvánvalóan folytonos (a pontok távolságával a képpontok távolsága felülről korlátozható, v.ö. Lipschitz tulajdonság), azt kapjuk, hogy

$$A' = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} A'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n+1} = A,$$

azaz valóban fixpontról van szó. \square

7. Megjegyzés. A bizonyítás során elegendő azt feltételezni, hogy a transzformáció kontrakció, azaz $d(A', B') \leq kd(A, B)$ valamely $0 < k < 1$ univerzális konstans mellett. Teljesen analóg érveléssel adódik, hogy egy teljes metrikus tér minden kontrakciójának pontosan egy fixpontja van. Ez az ún. Banach-féle fixponttétel.

3.2. Az euklideszi sík és tér hasonlóságai

14. Definíció. Legyen O egy rögzített pont és $\lambda \neq 0$ egy adott valós szám. Az O centrumú, λ előjeles arányú középpontos hasonlóságon azt a $\sigma_{\lambda, O}$ transzformációt értjük, melynek O fixpontja, azaz

$$\sigma_{\lambda, O}(O) = O$$

és bármely $X \neq O$ esetén $X' := \sigma_{\lambda, O}(X)$ az az egyértelműen meghatározott pont, melyre

$$\frac{d(O, X')}{d(O, X)} = |\lambda|$$

és $X' \in \overrightarrow{OX}$, ha $\lambda > 0$, illetve $X' - O - X$, ha $\lambda < 0$.

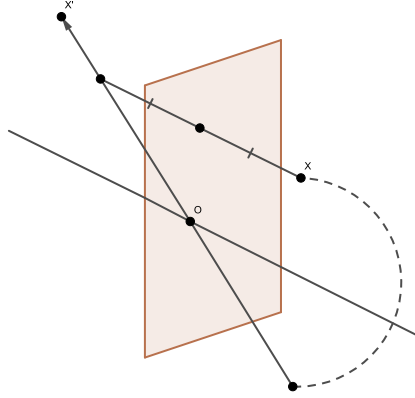
7. Következmény. Ha $\sigma_{\lambda, O}$ középpontos hasonlóság, akkor $d(A', B') = kd(A, B)$, ahol k az előjeles arány abszolút értéke.

Bizonyítás. Észrevételünk a párhuzamos szelők tételének alkalmazása segítségével azonnal következik a $\lambda > 0$ esetben. Ha $\lambda < 0$, akkor pedig alkalmazzunk egy O centrumú középpontos tükrözést (izometria). \square

15. Definíció. Tükrözve nyújtáson egy középpontos hasonlóság és egy tükrözés kompozícióját értjük, ahol a tükrötengely, illetve a tükrősík illeszkedik a hasonlóság centrumára. A forgatva nyújtás egy középpontos hasonlóság és egy forgatás kompozíciója, ahol a forgáscentrum egybeesik a hasonlóság centrumával, illetve a hasonlóság centruma illeszkedik a forgástengelyre.

8. Megjegyzés. Mind a tükrözve, mind pedig a forgatva nyújtás esetén a leképezéskompozícióban szereplő transzformációk sorrendje közömbös.

19. Tétel. (az euklideszi sík hasonlóságainak osztályozása) Az euklideszi sík minden hasonlósága izometria, középpontos hasonlóság, forgatva nyújtás, vagy tükrözve nyújtás.



12. ábra.

Bizonyítás. Ha egy $k > 0$ arányú σ hasonlóság nem izometria, akkor egyértelműen létezik fixpontja. Tekintsük a $\sigma_{O,1/k} \circ \sigma$ leképezéskompozíciót, ahol O a hasonlóságok közös fixpontja. Ez nyilvánvalóan egy $k = 1$ arányú hasonlóság, azaz izometria, melynek O továbbra is a fixpontja. A síkizometriák osztályozási tétele szerint viszont a fixponttal rendelkező izometriák: az identitás (σ középpontos hasonlóság), tengelyes tükrözés (σ tükrözve nyújtás), vagy forgatás (σ forgatva nyújtás). \square

Azt a tény, hogy a középpontos hasonlóságok negatív (előjeles) aránnyal is felléphetnek, az euklideszi tér hasonlóságainak leírásánál kamatoztatjuk.

20. Tétel. (az euklideszi tér hasonlóságainak osztályozása) *Az euklideszi tér minden hasonlósága izometria, középpontos hasonlóság, vagy forgatva nyújtás.*

Bizonyítás. A bizonyítás alap gondolata ugyanaz, mint a síkbeli esetben: ha $k \neq 1$, akkor $\sigma_{O,1/k} \circ \sigma$ olyan térizometria, melynek O fixpontja. A térizometriák osztályozási tétele szerint tehát identitás (σ középpontos hasonlóság), síkra tükrözés, forgatás (σ forgatva nyújtás), vagy forgatva tükrözés. Tekintsük először a síkra tükrözés esetét. Állítsunk az O pontban merőlegest az S tükörsíkra és tegyünk egy ρ félfordulatot a tengely körül (12. ábra). Bármely X pont esetén

$$\sigma(X) = \sigma_{O,k} \circ \sigma_S(X) = \sigma_{O,-k} \circ \rho(X),$$

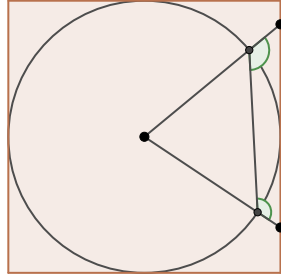
azaz a transzformáció forgatva nyújtás. Fogatva tükrözés esetén az O pont nyilvánvalóan a forgástengely és a tükörsík metszéspontja. Ha a forgás-részt egy (közös tengelyű) félfordulattal kiegészítjük, akkor még mindig forgatva nyújtásról van szó, ahogy az előző gondolatmenet mutatja. \square

3.3. A hasonlóság általános fogalma

16. Definíció. *Az euklideszi sík, illetve tér két alakzata hasonló, ha van olyan hasonlósági transzformáció, mely egyiket a másikba viszi.*

4. Geometriai mértékelmélet

A témakörök elmélyült és részletesebb tanulmányozásához az [2] szakirodalom ajánlott.



13. ábra.

4.1. A kör kerülete, a körív hossza

17. Definíció. Egy körbe írt töröttvonalon a kör pontjainak $A_0, A_1, \dots, A_n = A_0$ sorozatából képzett olyan töröttvonalat értünk, melyre

- A_0, A_1, \dots, A_{n-1} különböző pontok,
- ha $n > 3$, akkor az A_0 ponttal átellenes érintőre való vetítésnél $A'_{i-1} - A'_i - A'_{i+1}$ teljesül minden $i = 2, \dots, n-1$ esetén

3. Lemma. A körbe írt töröttvonalak hosszának halmaza felülről korlátos.

Bizonyítás. Vetítsük a kör középpontjából a körbe írt töröttvonal pontjait egy a kör köré írt négyzet oldalaira. Az általánosság sérelme nélkül feltehető - szükség esetén kiegészítve további pontokkal a körbe írt töröttvonalat -, hogy az A_i pont vetülete az A_{i+1} vetületével közös oldalra esik. Mivel az $A_i \bar{A}_{i+1}$ szakasznak a kör középpontjával átellenes oldalán derékszögnél nagyobb szögek keletkeznek, ezért a vetületi szakasz hossza a nagyobb. Ebből pedig következik, hogy a körbe írt töröttvonal hossza kisebb, mint a körülírt négyzet kerülete. \square

9. Megjegyzés. Hasonló eredmény kapható körülírt szabályos n -szögek segítségével.

18. Definíció. A beírt töröttvonalak hosszának pontos felső korlátja a kör kerülete.

21. Tétel. A kör kerülete $2r\pi$.

Bizonyítás. A kör K kerülete - definíció szerint - nagyobb, mint a körbe írt szabályos n -szög kerülete:

$$K \geq 2rn \sin(\alpha_n/2) = 2r\pi \frac{\sin(\alpha_n/2)}{(\alpha_n/2)}, \text{ ahol } \alpha_n = \frac{2\pi}{n}$$

a teljes szög n -edrészre. Másfelől a 9. Megjegyzés szerint a kör kerülete kisebb, mint a köré írt szabályos n -szög kerülete:

$$K \leq 2rn \tan(\alpha_n/2) = 2r\pi \frac{\tan(\alpha_n/2)}{(\alpha_n/2)}.$$

Véve az $n \rightarrow \infty$ határátmenetet, kapjuk, hogy $K = 2r\pi$, hiszen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ és $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$.
 \square

10. Megjegyzés. Hasonló gondolatmenet segítségével kapjuk, hogy a kör α mértékű középponti szögéhez tartozó körív hossza $r\alpha$.

4.2. Sokszögek területe

A továbbiakban az euklideszi tér rögzített S síkjában dolgozunk.

19. Definíció. *Sokszögtartományon véges sok, közös belső pont nélküli háromszöglemez unióját értjük.*

4.2.1. A sokszögek területmérésének axiómája

Legyen \mathbb{P} a sík sokszögtartományainak halmaza. Egyértelműen létezik olyan $t: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ (ún. területmérő-függvény), melyre

(t1) $t(P) > 0$ bármely $P \in \mathbb{P}$ esetén

(t2) ha P_1 és P_2 egybevágó sokszögek, akkor $t(P_1) = t(P_2)$

(t3) ha $P_1 \cap P_2$ belseje üres, akkor $t(P_1 \cup P_2) = t(P_1) + t(P_2)$

(t4) a téglalap területe az oldalai hosszának szorzata

A $t(P)$ számot a P sokszögtartomány területének nevezzük.

3. Feladat. A területmérés axiómái alapján vezesse le a paralelogramma, a háromszög és a trapéz területének képletét.

4. Feladat. Adott kerületű téglalapok közül, melyiknek legnagyobb a területe?

Útmutatás. Mivel a kerület állandó, ezért a félkerület is az. A mértani és számtani közepek közötti egyenlőtlenséget figyelembe véve

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow t \leq \frac{s^2}{4}, \text{ ahol } s = a+b$$

a félkerület. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b$, azaz a téglalap szabályos (négyzet).

5. Feladat. Adott kerületű háromszögek közül, melyiknek legnagyobb a területe?

Útmutatás. Mivel a kerület állandó, ezért a félkerület is az. Héron képlete szerint

$$t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), \text{ ahol } s = \frac{a+b+c}{2}$$

a félkerület. Elegendő tehát az $(s-a)(s-b)(s-c)$ szorzatot maximalizálni. A mértani és számtani közepek közötti egyenlőtlenséget figyelembe véve

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3}\right)^3 = \frac{s^3}{27} \Rightarrow t^2 \leq \frac{s^4}{27}$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $s-a = s-b = s-c$, azaz a háromszög szabályos.

4.3. Jordan-mérték az euklideszi síkon, a kör területe (Jordan-mértéke)

20. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $K \subset S$ részhalmaz korlátos, ha lefedhető sokszögtartománnyal. Korlátos halmaz esetén a lefedő sokszögek területének pontos alsó korlátját a halmaz külső Jordan-féle mértékének nevezzük:

$$\bar{\mu}(K) = \inf\{t(P) \mid K \subset P \in \mathbb{P}\}.$$

A tartalmazott sokszögek mértékének pontos felső korlátja pedig a K halmaz belső Jordan-féle mértéke:

$$\underline{\mu}(K) = \sup\{t(P) \mid K \supset P \in \mathbb{P}\}.$$

Ha K nem tartalmaz sokszöget, akkor $\underline{\mu}(K) := 0$. Azt mondjuk, hogy K Jordan-mérhető halmaz, ha belső és külső Jordan-féle mértéke megegyezik. E közös értéket a K halmaz Jordan-féle mértékének nevezzük: $\mu(K) = \underline{\mu}(K) = \bar{\mu}(K)$.

Nyilvánvaló, hogy minden sokszögtartomány Jordan-mérhető és mértéke megegyezik a területével. Ha K Jordan-mérhető és L egybevágó K -val, akkor L is Jordan-mérhető és mértékük egyenlő, hiszen K tartalmazott (lefedő) sokszögei izometria segítségével L tartalmazott (lefedő) sokszögeibe vihetők át. Ha K Jordan-mérhető és L hasonló a K halmazhoz, akkor L is Jordan-mérhető és $\mu(L) = k^2\mu(K)$, ahol k a hasonlóság aránya. Nem Jordan-mérhető halmaz például az egységnyi négyzet racionális koordinátájú pontjainak halmaza: $K := [0, 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$. Nyilvánvaló, hogy $\bar{\mu}(K) = 1$, de $\underline{\mu}(K) = 0$. Ha a sokszögtartománnyal (azaz véges sok háromszöglemez közös belső pont nélküli uniójával) történő lefedés helyett megengedünk megszámlálhatóan végtelen lefedéseket is, akkor a K halmaz külső mértéke már tetszőleges $\varepsilon > 0$ pozitív számnál kisebbé tehető. Tekintettel arra, hogy a racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen, ugyanez áll az önmagával vett Descartes szorzatára is. Rendezzük tehát a K halmaz elemeit sorozatba és válasszunk egy olyan $0 < q < 1$ számot, melyre

$$\frac{q}{1-q} < \varepsilon.$$

Mivel $q \rightarrow 0$ esetén a bal oldal nullához tart, ilyen pozitív szám - folytonossági érvelés alapján - van. Fedjük le most a K halmaz elemeiből képzett pontsorozat n -dik elemét egy q^n -nél kisebb területű sokszöggel. Nyilvánvaló, hogy a lefedő sokszögek uniójának területe kisebb, mint

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} < \varepsilon.$$

Ennélfogva a külső mérték egyetlen lehetséges értéke a 0, ami megegyezik a belső mértékkel. Ez azonban már nem a halmaz Jordan-mértéke, hanem a Lebesgue-mérték². K Lebesgue-szerint nullmértékű.

22. Tétel. A kör területe/Jordan-mértéke $r^2\pi$.

Bizonyítás. A belső Jordan-mértéket a beírt szabályos n -szögek

$$A_n = n \frac{r^2 \sin \alpha_n}{2} = r^2 \pi \frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n}$$

²C. Jordan (1838-1922), H. L. Lebesgue (1875-1941).

területével becsljük alulról, ahol $\alpha_n = \frac{2\pi}{n}$: $\mu(K) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = r^2\pi$, hiszen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. A körülírt szabályos sokszögek területének segítségével pedig felső becslést kapunk a külső Jordan-mértékre:

$$\bar{\mu}(K) \leq n \frac{2r^2 \tan(\alpha_n/2)}{2} = r^2\pi \frac{\tan(\alpha_n/2)}{(\alpha_n/2)}$$

és a jobb oldal határértéke $r^2\pi$. Kapjuk tehát, hogy $r^2\pi \leq \underline{\mu}(K) \leq \bar{\mu}(K) \leq r^2\pi$, azaz a kör Jordan-mérhető és $\mu(K) = r^2\pi$. \square

11. Megjegyzés. Hasonló gondolatmenet segítségével kapjuk, hogy a kör α mértékű középponti szögéhez tartozó körcikk területe/Jordan-mértéke $\frac{r^2\alpha}{2}$.

4.4. A térfogtmérés axiómái, a gömb térfogata

4.4.1. A térfogat mérésének axiómája

Legyen \mathbb{V} korlátos térbeli ponthalmazok családja (térfogattal rendelkező halmazok), $\mu: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy leképezés (az ún. térfogatmérő függvény), mely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

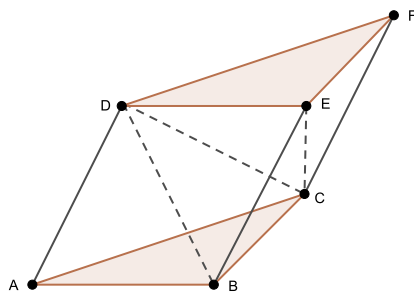
- (V1) $\mu(M) \geq 0$ bármely $M \in \mathbb{V}$ esetén
- (V2) minden korlátos, konvex ponthalmaz rendelkezik térfogattal
- (V3) két térfogattal rendelkező halmaz metszete, uniója és különbsége szintén térfogattal rendelkező halmaz
- (V4) μ monoton, azaz $\mu(M) \leq \mu(N)$, feltéve, hogy M, N térfogattal rendelkező halmazok és $M \subset N$
- (V5) μ additív, azaz $\mu(M \cup N) = \mu(M) + \mu(N)$, feltéve, hogy M, N térfogattal rendelkező halmazok és $\mu(M \cap N) = 0$
- (V6) egy paralelepipedon térfogata egy lapja területének és a hozzá tartozó magasságnak a szorzata
- (V7) ha M térfogattal rendelkező halmaz és N egybevágó az M halmazzal, akkor N is rendelkezik térfogattal és $\mu(M) = \mu(N)$
- (V8) (Cavalieri-elv) ha M és N térfogattal rendelkező halmazok, továbbá valamely rögzített síkkal párhuzamos megfelelő metszeteiknek van területe (Jordan-mértéke) és ezek egymással egyenlők, akkor $\mu(M) = \mu(N)$, azaz térfogatuk megegyezik

4. Lemma. *Ha M térfogattal rendelkező, korlátos síkbeli halmaz, akkor $\mu(M) = 0$.*

Bizonyítás. Mivel M korlátos síkbeli halmaz, nyilvánvalóan van olyan paralelepipedon, melynek egyik lapja tartalmazza M -et, a hozzá tartozó magasság pedig tetszőlegesen kicsinek választható. Ez (V6) szerint azt jelenti, hogy a paralelepipedon térfogata tetszőlegesen kicsi lehet. A térfogatmérő függvény monotonitása miatt tehát $\mu(M) = 0$. \square

5. Lemma. *Egy hasáb térfogata alapterületének és a hozzá tartozó magasságnak a szorzata.*

Bizonyítás. A térfogatmérő függvény additivitása miatt elegendő a bizonyítást háromszögalapú hasábra elvégezni. A háromszöget paralelogrammává kiegészítve, a háromszögalapú hasábot paralelepipedonná egészíthetjük ki. Mivel a paralelepipedon két egybevágó háromszögalapú hasáb uniója, a térfogatmérés additivitása és (V6) alapján következik az állítás. \square



14. ábra.

8. Következmény. *Egy henger térfogata alapterületének és a hozzá tartozó magasságnak a szorzata.*

Bizonyítás. Tekintsük a henger (egyik) alaplajának a síkját. Eltolást alkalmazva nyilvánvaló, hogy a henger e síkkal párhuzamos metszeteinek Jordan-mértéke ugyanaz; megegyezik az alap Jordan-mértékével. Ugyanez áll a síkon nyugvó sokszögalapú hasábra, melynek alapja a henger alapjának Jordan-mértékével egyező területű sokszög és magasságuk is egyenlő. A Cavalieri-elv alapján következik az állítás. \square

6. Lemma. *Egy gúla térfogata az alapterület és a hozzá tartozó magasság szorzatának harmada.*

Bizonyítás. A térfogatmérő függvény additivitása miatt elegendő a bizonyítást háromszögalapú gúlára, azaz tetraéderre elvégezni. Először is vegyük észre, hogy ha két tetraéder rendelkezik azonos területű alappal és a megfelelő magasság is ugyanakkora, akkor a két tetraéder térfogata egyenlő. Ez a Cavalieri-elv következménye: az azonos területű alappal szemköztes csúcsból alkalmazott középpontos hasonlóság előállítja az alap síkjával párhuzamos síkmetszetet és a terület csupán a metsző síknak és a hasonlóság centrumának távolságától függ. Most egészítsük ki a tetraéderünket egy háromszögalapú hasábbá a 14. ábrának megfelelően és alkalmazzuk a térfogatmérő függvény additivitását és az előző észrevételünket - jegyezzük meg, hogy a tetraéderek páronként közös alappal rendelkeznek, melyekhez ugyanakkora magasság tartozik. \square

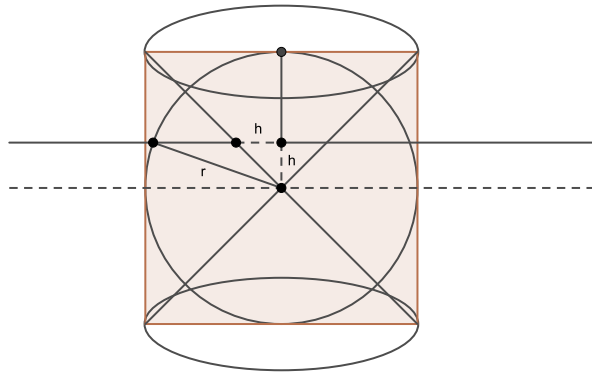
9. Következmény. *Egy kúp térfogata az alapterület és a hozzá tartozó magasság szorzatának harmada.*

Bizonyítás. A bizonyítás a 8. Következmény mintájára végezhető el. \square

4.4.2. A gömb térfogata

23. Tétel. *A gömb térfogata $\frac{4r^3\pi}{3}$.*

Bizonyítás. Írjunk egy egyenes H körhengert a G gömb köré és tekintsük a gömb középpontja és a henger alsó és felső alapköre által meghatározott K kettős kúpot. Igazolni fogjuk, hogy G és $H \setminus K$



15. ábra.

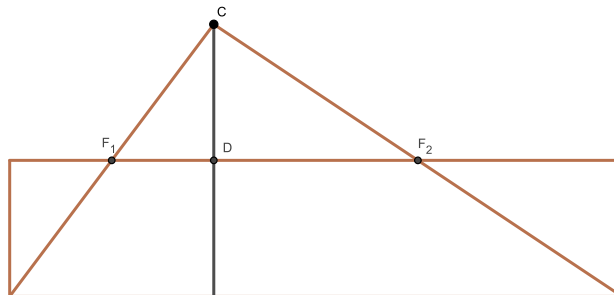
a henger alapjával párhuzamos síkmetszetei egyenlő területűek. Nyilvánvalóan elegendő a kettős kúp egyik felével foglalkoznunk. Mivel a kúp keresztmetszetkörének sugara a gömb középpontjától mérve h magasságban éppen h , a $H \setminus K$ megfelelő síkmetszetének területe $(r^2 - h^2)\pi$. A megfelelő gömbi metszeté - Pitagorasz tétele alapján - ugyanennyi (15. ábra). Alkalmazva a Cavalieri-elvet

$$V(G) = V(H \setminus K) = V(H) - V(K) = 2r^3\pi - 2\frac{r^3\pi}{3} = \frac{4r^3\pi}{3},$$

ami bizonyítandó volt. \square

4.4.3. Átdarabolási problémák

A témakör részletesebb és elmélyült tanulmányozásához a [3] szakirodalom ajánlott.



16. ábra.

A 16. ábra szerint egy háromszög átdarabolható téglalapba a $CDF_1\Delta$ és a $CDF_2\Delta$ háromszögeknek az F_1 és F_2 oldalfelező pontokra vonatkozó centrális tükrözése segítségével. Tekintettel a területmérés

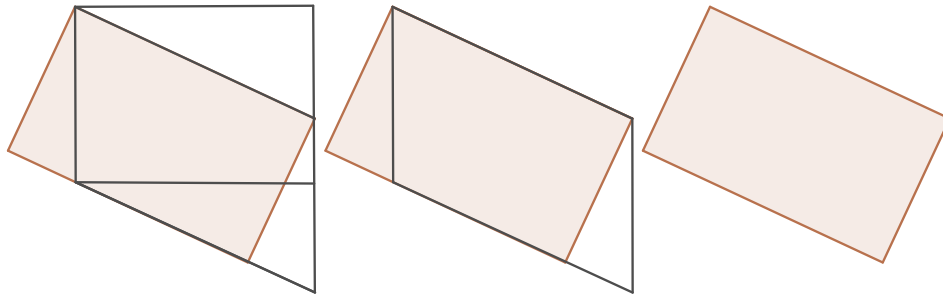
axiómáira, ez azt jelenti, hogy egy háromszög területe mindig az alap és a hozzá tartozó magasság szorzatának a fele. Egy másik következménye az átdarabolhatóságnak az, hogy a területmérő függvényt a (t1) - (t4) tulajdonságok egyértelműen meghatározzák. Ennél általánosabb eredmény bizonyítása megtalálható a [3, 7. fejezet] szakirodalomban, ahol negyedik tulajdonságként csupán azt követeljük meg, hogy az egységnyi oldalú négyzet területe 1 legyen.

21. Definíció. [3, 7. fejezet] *Két sokszög geometriai értelemben átdarabolható egymásba, ha felírhatók egymásba nem nyúló, páronként egybevágó sokszögek uniójaként.*

A Wallace - Bolyai³ - Gerwien tétel szerint két egyenlő területű sokszög mindig átdarabolható egymásba. Ennél pontosabb állítás is megfogalmazható: két egyenlő területű sokszög mindig átdarabolható egymásba eltolások és centrális tükrözések (félfordulatok) segítségével [3, 7. fejezet]. A bizonyítás első lépése annak belátása, hogy az átdarabolhatóság ekvivalenciareláció. Ha a P sokszöget felbontjuk közös belső pont nélküli háromszögekre és ezeket téglalapba daraboljuk a 16. ábra szerint (itt felhasználjuk a centrális tükrözéseket), akkor már csupán az összeillesztési problémát kell megoldanunk. Megmutatjuk, hogy bármely két azonos területű téglalap egymásba darabolható eltolások segítségével. Ez azt jelenti, hogy a sokszög háromszögekre bontása és azok átdarabolása során keletkezett téglalapokat azonos oldalhosszúságú téglalapokba darabolhatjuk át, melyek már összeilleszthetők téglalappá. Utóbbi területe nyilván megegyezik a P sokszög területével. Az ekvivalenciareláció tranzitivitási tulajdonságára hivatkozva fejezzük be a tétel bizonyítását.

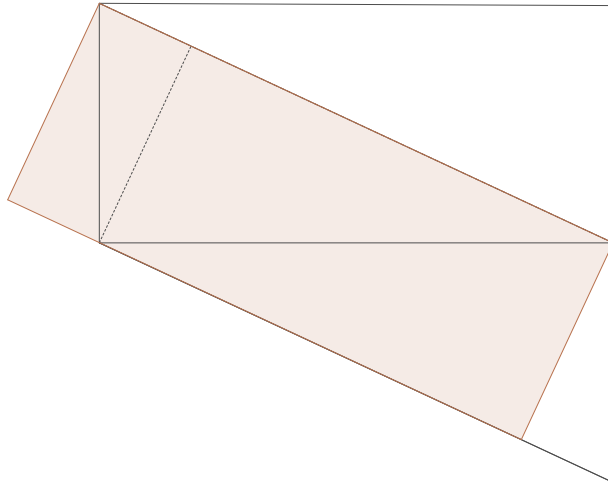
7. Lemma. *Rögzítve két egymásra merőleges irányt a síkon, bármely téglalap átdarabolható eltolások segítségével vele egyező területű, tengelypárhuzamos téglalapba.*

Bizonyítás. Legyen adva egy téglalap, melynek oldalai rendre $a \geq b$. A 17. ábra mutatja a

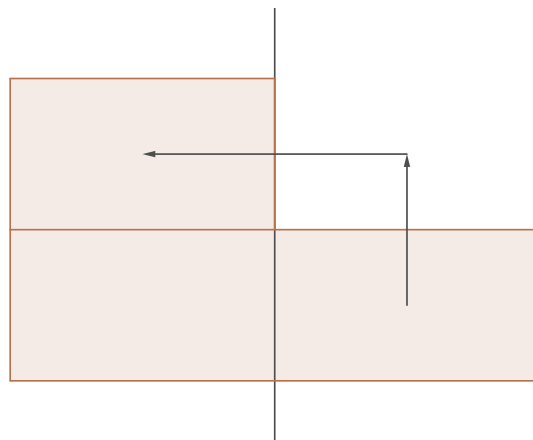


17. ábra.

téglalap átdarabolását előbb egy paralelogrammává, majd pedig egy tengelypárhuzamos téglalappá. A 18. ábrán a határhelyzetet látjuk: ha a téglalap szélessége tovább csökken, akkor az eljárást nem lehet végrehajtani. Talesz tétele alapján a szélesség további csökkenése a $b < a/2$ relációhoz vezetne, míg $b \geq a/2$ elegendő feltétele az átdarabolhatóságnak. Induljunk most ki egy $a \times b$ méretű téglalapról és tegyük fel, hogy $a > 2b$. Vágással és eltolással a téglalap átdarabolható egy $a_1 = a/2$



18. ábra.

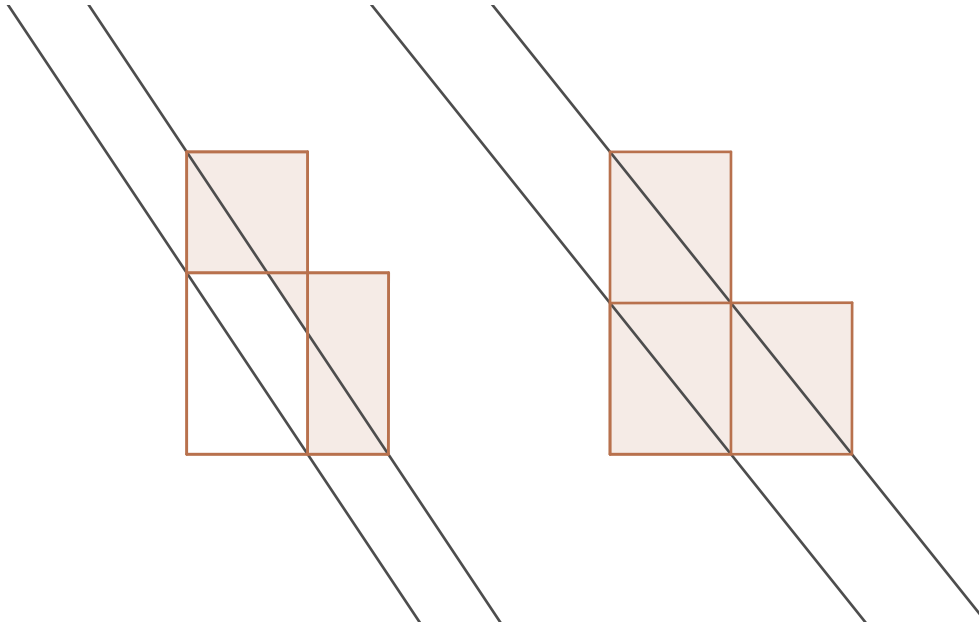


19. ábra.

és egy $b_1 = 2b$ oldalú téglalapba (19. ábra). Az $a_1 > 2b_1$ esetben ismétljük az eljárást - ez véges sok lépésben lehetséges csupán, hiszen $a_n = a/2^n$ szigorúan monoton csökkenő nullsorozat, $b_n = 2^n b$ pedig szigorúan monoton növekvő divergens sorozat. Összegezve az eddigieket: bármely téglalap átdarabolható eltolások segítségével vele egyező területű, tengelypárhuzamos téglalapba. \square

8. Lemma. *Bármely két azonos területű tengelypárhuzamos téglalap átdarabolható egymásba eltolások segítségével.*

Bizonyítás. Tekintsük az $a_1 \times b_1$ és $a_2 \times b_2$ méretű tengelypárhuzamos téglalpokat a 20. ábra bal oldalán látható elrendezésben, ahol $a_1 < a_2$. Ha a területük egyenlő, akkor a párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt a feltüntetett darabolóegyenesek párhuzamosak és az álló téglalapot átdarabolják a fekvő téglalapba. Mivel a darabolóegyenesek párhuzamossága valójában ekvivalens a területek egyenlőségével, az ábra jobb oldalán a határhelyzetet látjuk: ha a fekvő téglalap szélessége tovább csökken, akkor az eljárást nem lehet végrehajtani. A probléma azonban az előző lemmában látottakhoz hasonlóan kezelhető. \square



20. ábra.

Természetes módon vetődik fel a kérdés, hogy az egyező területű sokszögek átdarabolásánál szorítkozhatunk-e csupán eltolásokra. A válasz tagadó, ugyanis egyetlen háromszög sem darabolható át téglalapba eltolások segítségével [3, 7. fejezet]. Legyenek ugyanis az $ABC\Delta$ háromszög csúcsai az óramutató járásával ellentétes (pozitív) irányban felsorolva. A bizonyítás alapgondolata egy a sokszögek halmazán értelmezett additív és eltolás-invariáns f függvény értelmezése, melynek téglalapokon felvett értékei különböznek az $ABC\Delta$ háromszögon felvett értékétől. Ha a P sokszög $V_0, V_1, \dots, V_n = V_0$ csúcsai az óramutató járásával ellentétes (pozitív) irányban vannak felsorolva, akkor legyen

$$f(P) := \sum_{i=1}^n \varepsilon_i d(P_{i-1}, P_i),$$

³Bolyai Farkas (1775-1856)

ahol $\varepsilon_i = 0$, ha a megfelelő oldal nem párhuzamos a háromszög \overline{AB} oldalával, míg párhuzamosság esetén $\varepsilon_i = \pm 1$ aszerint, hogy az (A, B) irányított szakasz ekvivalens-e a (P_{i-1}, P_i) irányított szakasszal, vagy sem [7]. Nyilvánvaló, hogy $f(ABC\Delta) = d(A, B)$, míg bármely R téglalapra $f(R) = 0$ vagy triviálisan, ha a téglalagnak nincs az \overline{AB} -vel párhuzamos oldala, vagy pedig azért, mert az \overline{AB} -vel párhuzamos oldalak ellentétesen irányítottak.

12. Megjegyzés. A Wallace-Bolyai-Gerwien tétel térbeli analogonjának problémáját már Bolyai Farkas is felvetette 1830 körül, kiemelve az azonos térfogatú kocka és tetraéder átdarabolhatóságának speciális esetét. Utóbbi Hilbert harmadik problémájaként vált ismertté 1900-ban. Egy évvel később Max Dehn bebizonyította, hogy a szabályos tetraéder nem darabolható át sem kockába, sem pedig téglalattestbe. A bizonyítás alap gondolata ugyanaz, mint amit a síkon az eltolások segítségével történő átdarabolás kapcsán is láttunk: egy additív és izometriával szemben invariáns függvény konstrukciója, mely a szabályos tetraéderen nullától különböző értéket vesz fel, míg téglalattesteken 0; a részletekkel kapcsolatban ld. [3, 7. fejezet]

Hivatkozások

- [1] John Roe: Elementary Geometry, Oxford University Press, 1993.
- [2] Kovács Zoltán: Geometria (az euklideszi geometria metrikus megalapozása), Kossuth Egyetemi Kiadó, 2004.
- [3] Laczkovich Miklós: Sejtés és bizonyítás, Typotex, 1998.
- [4] Szilasi József: Geometria I., KLTE TTK, Debrecen, 1990.
- [5] Vincze Csaba: Az abszolút geometria alapjai, kézirat, 2023.
<http://math.unideb.hu/media/vincze-csaba/Absgeom.pdf>
- [6] Vincze Csaba: Euklideszi vektorterek, kézirat, 2019.
http://math.unideb.hu/media/vincze-csaba/oktatas/Euc_vectorter.pdf
- [7] Vincze Csaba: Trigonometria és Koordinátageometria, Kossuth Egyetemi Kiadó, 2008.