A funkcionálanalízis elemei
Matematika 3, Villamosmérnök BSc

Vincze Csaba

Debreceni Egyetem

2023. szeptember 19.

Tartalomjegyzék

1. Pre-Hilbert és Hilbert terek

1.1. Bevezetés

A véges dimenziós valós vektorterek prototípusa az

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

halmaz, ellátva az összeadás

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

műveletével és a

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

skalárral való szorzással ($\lambda \in \mathbb{R}$). Hasonlóan értelmezhető az összeadás, illetve a skalárral való szorzás a $\mathbb{C}^n$ halmaz elemei között; skalártartományként $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ is választható. A továbbiakban $\mathbb{K}$ a valós, vagy a komplex számok testét jelöli. Az összeadás tulajdonságai:

(A1) asszociatív,

(A2) rendelkezik zéruselemmel (ún. zérusvektor): $\mathbf{0} := (0, \ldots, 0)$,

(A3) az x elem (additív) inverze $-x := (-x_1, \ldots, -x_n)$,

(A4) kommutatív.

Tömörebben fogalmazva, az elemek az összeadásra nézve egy kommutatív csoportot alkotnak. A skalárral való szorzás pedig eleget tesz a következő tulajdonságoknak:

(SM1) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$,

(SM2) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,

(SM3) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

(SM4) $1 \cdot x = x$.

A vektortér olyan V halmaz, melynek elemei között értelmezve van az összeadás művelete, illetve a skalárral való szorzás úgy, hogy az összeadásra nézve kommutatív csoport, azaz teljesül (A1)-(A4), a skalárral való szorzás pedig eleget tesz az (SM1)-(SM4) tulajdonságoknak. A vektortér elemeit vektoroknak nevezzük. Az összeadás és a skalárral való szorzás véges sokszor történő alkalmazása a szereplő elemek ún. lineáris kombinációja:

$$v = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_m w_m.$$

A vektortér végesen generált, ha bármely eleme előáll (véges sok) $w_1, \ldots, w_m$ elem lineáris kombinációjaként; $w_1, \ldots, w_m$ a vektorér generátorrendszere. Egy végesen generált vektortér bázisán olyan generátorrendszert értünk, melynek tagszáma minimális[1]. A bázis tagszáma pedig a vektortér dimenziója. A vektorterek geometriája az ún. belső szorzat segítségével alapozható meg:

$$(v, w) \in V \times V \to \langle v, w \rangle \in \mathbb{K}$$

úgy, hogy

(IP1) additív az első változóban: $\langle v + w, z \rangle = \langle v, z \rangle + \langle w, z \rangle$,

(IP2) homogén az első változóban: $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$,

[1]Ekvivalens módon: bármely elem egyértelműen írható fel a generátorrendszer tagjainak lineáris kombinációjaként. Nyilvánvaló, hogy egy minimális generátorrendszer egyik tagja sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. Az ilyen tulajdonságú renszereket lineárisan függetlennek nevezzük. Egy bázis tehát lineárisan független generátorrendszer.

(IP3) érvényes a konjugált szimmetria: $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$,

(IP4) pozitív definit: $\langle v, v\rangle \geq 0$ és $\langle v, v\rangle = 0$ akkor és csak akkor, ha v a zérusvektor.

Jegyezzük meg, hogy a konjugált szimmetria miatt egyrészt

$$\langle v, w+z\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, z\rangle \text{ és } \langle v, \lambda w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle \text{ (konjugált homogenitás),}$$

másrészt pedig bármely vektor önmagával vett belső szorzata valós szám; ha a skalártartományt megszorítjuk a valsó számokra, akkor egyszerűen $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ írható. A belső szorzat birtokában bevezethető az elemek hossza (vagy normája):

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle},$$

mérni tudjuk a távolságot:

$$d(v, w) := \|v - w\|,$$

továbbá (legalábbis valós vektorterek esetén) a szöget.

1. Tétel. (Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-féle egyenlőtlenség)

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a vektorok arányosak, azaz egyikük a másik skalárszorosa.

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy ha w a zérusvektor, akkor az egyenlőtlenség nyilvánvaló. Tegyük fel tehát, hogy $w \neq \mathbf{0}$. Mivel bármely $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

$$0 \leq \|v - \lambda w\|^2 = \langle v - \lambda w, v - \lambda w\rangle = \|v\|^2 - \bar{\lambda}\langle v, w\rangle - \lambda\overline{\langle v, w\rangle} + |\lambda|^2\|w\|^2 =$$

$$\|v\|^2 + \left(\lambda\|w\| - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|}\right)\left(\bar{\lambda}\|w\| - \frac{\overline{\langle v, w\rangle}}{\|w\|}\right) - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\|w\|^2} = \|v\|^2 + \left|\lambda\|w\| - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|}\right|^2 - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\|w\|^2},$$

a

$$\lambda_0 = \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2} \tag{1}$$

helyettesítéssel adódik az egyenlőtlenség. Egyenlőség pedig akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$0 \leq \|v - \lambda w\|^2 = \left|\lambda\|w\| - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|}\right|^2$$

teljesül minden $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén. Ez azt jelenti, hogy

$$\|v - \lambda_0 w\|^2 = 0,$$

azaz $v = \lambda_0 w$, ami bizonyítandó volt. □

1. Megjegyzés. A valós Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-féle egyenlőtlenség alapján a

$$\cos\alpha = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

formula értelmes módon adja a v, w (nemzérus) vektorok szögét, ahonnan átrendezéssel a belső szorzat jól ismert geometriai értelmezése következik: két vektor belső szorzata a két vektor hosszának és a közbezárt szög koszinuszának szorzatával egyenlő. Egy véges dimenziós valós vektorteret *Euklideszi vektortér*nek nevezünk, ha el van látva egy belső szorzattal.

1.2. Pre-Hilbert és Hilbert terek

1. Definíció. *Egy nem feltétlenül véges dimenziós valós, vagy komplex vektortér pre-Hilbert tér, ha el van látva egy belső szorzattal.*

2. Definíció. *Egy pre-Hilbert tér v és w vektorát ortogonálisnak nevezzük, ha belső szorzatuk zérus.*

2. Megjegyzés. A valós esetben a

$$\cos\alpha = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

formula alapján az következik, hogy ortogonális vektorok szöge $\alpha = 90°$.

1. Feladat. Tekintsük a v és a $w \neq \mathbf{0}$ vektorokat egy belső szorzattal ellátott valós, vagy komplex vektortérben és állítsuk elő a v vektort egy w-vel arányos és egy w-re merőleges komponens összegeként.

Útmutatás: tegyük fel, hogy az előállítás sikerült, azaz

$$v = \lambda_0 w + w^{\perp}$$

valamely λ_0 skalár és $w^{\perp}$ vektor esetén, ahol $\langle w^{\perp}, w\rangle = 0$. Véve mindkét oldal belső szorzatát (jobbról) a w vektorral

$$\langle v, w\rangle = \lambda_0 \|w\|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2},$$

a v vektor w-re vonatkozó ún. *Fourier-együttható*ja, v.ö. (1). A w-re merőleges komponens tehát

$$w^{\perp} = v - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2} w. \tag{2}$$

A (2) formula szukcesszív alkalmazásán alapszik az ún. Gram-Schmidt-féle ortogonalizálási eljárás.

1.2.1. A Gram-Schmidt-féle ortogonalizálás

3. Definíció. *Egy pre-Hilbert tér $z_1, \ldots, z_m, \ldots$ vektorrendszerét ortogonális vektorrendszernek nevezzük, ha tagjai páronként ortogonális nemzérus vektorok.*

1. Következmény. *Egy ortogonális vektorrendszer lineárisan független.*

A Gram-Schmidt-féle ortogonalizálási eljárás egy tetszőleges, lineárisan független $w_1, \ldots, w_m, \ldots$ vektorrendszerből hoz létre egy $z_1, \ldots, z_m, \ldots$ ortogonális rendszert úgy, hogy a

z_1
z_1, z_2
z_1, z_2, z_3
$\ldots$
$z_1, z_2, \ldots, z_m$ stb.

részrendszerek által generált lineáris alterek[2] rendre megegyeznek az eredeti

w_1

[2]Ekvivalens módon: a megadott vektorok lineáris kombinációjaként előállítható vektorok összessége.

w_1, w_2
w_1, w_2, w_3
$\ldots$
$w_1, w_2, \ldots, w_m$ stb.
részrendszerek által generált lineáris alterekkel. Az első lépésben $z_1 := w_1$, majd a második lépésben

$$z_2 := w_2 - \frac{\langle w_2, z_1\rangle}{\|z_1\|^2} z_1$$

és így tovább:

$$z_{m+1} = w_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle w_{m+1}, z_i\rangle}{\|z_i\|^2} z_i,$$

azaz az aktuális vektorból levonjuk a már megkonstruált vektorokra eső merőleges vetületeit (v.ö. 1 Feladat.)

1.2.2. Egy optimalizálási probléma: a Fourier-együtthatók minimum-tulajdonsága

Tekintsük a $z_1, \ldots, z_m$ ortogonális vektorrendszert. Legyen z egy tetszőleges további vektor és határozzuk meg a z vektor legjobb approximációját az ortogonális rendszer által kifeszített altérben. A feladat matematikailag precíz megfogalmazása

$$\min_{\lambda_1, \ldots, \lambda_m} d(z, \lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_m z_m) = \min_{\lambda_1, \ldots, \lambda_m} \|z - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i\|.$$

Mivel nemnegatív kifejezés minimumát keressük, ezért áttérhetünk a négyzetének a minimalizálására:

$$\min_{\lambda_1, \ldots, \lambda_m} \|z - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i\|^2,$$

ahol (az ortogonalitást figyelembe véve)

$$\|z - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i\|^2 = \langle z - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i, z - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i\rangle = \|z\|^2 - \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \langle z, z_i\rangle - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overline{\langle z, z_i\rangle} + \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i|^2 \|z_i\|^2 =$$

$$\|z\|^2 + \sum_{i=1}^{m} \left(\bar{\lambda}_i \|z_i\| - \frac{\overline{\langle z, z_i\rangle}}{\|z_i\|}\right) \left(\lambda_i \|z_i\| - \frac{\langle z, z_i\rangle}{\|z_i\|}\right) - \sum_{i=1}^{m} \frac{|\langle z, z_i\rangle|^2}{\|z_i\|^2} =$$

$$\|z\|^2 + \sum_{i=1}^{m} \left|\lambda_i \|z_i\| - \frac{\langle z, z_i\rangle}{\|z_i\|}\right|^2 - \sum_{i=1}^{m} \frac{|\langle z, z_i\rangle|^2}{\|z_i\|^2},$$

ami azt jelenti, hogy az összeget a

$$\lambda_1 = \frac{\langle z, z_1\rangle}{\|z_1\|^2}, \ldots, \lambda_m = \frac{\langle z, z_m\rangle}{\|z_m\|^2}$$

Fourier-együtthatók minimalizálják. A legjobb approximáció tehát

$$z \approx \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle z, z_i\rangle}{\|z_i\|^2} z_i$$

és az is következik, hogy

$$0 \leq \|z - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i\|^2 = \|z\|^2 + \sum_{i=1}^{m} \left| \lambda_i \|z_i\| - \frac{\langle z, z_i\rangle}{\|z_i\|} \right|^2 - \sum_{i=1}^{m} \frac{|\langle z, z_i\rangle|^2}{\|z_i\|^2}$$

bármely $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ esetén. A Fourier-együtthatók helyettesítése a

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{|\langle z, z_i\rangle|^2}{\|z_i\|^2} \leq \|z\|^2$$

egyenlőtlenséghez vezet. Az $m \to \infty$ határátmenettel

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\langle z, z_i\rangle|^2}{\|z_i\|^2} \leq \|z\|^2;$$

ez az ún. Bessel-féle egyenlőtlenség. Ha a $z_1, \ldots, z_m, \ldots$ ortogonális rendszer által generált lineáris altér sűrű a vektortérben, azaz topologikus lezártja[3] a teljes tér, akkor egyenlőség érvényes:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\langle z, z_i\rangle|^2}{\|z_i\|^2} = \|z\|^2;$$

ez az ún. Parseval-formula, a Pitagorász-tétel általánosítása.

1.2.3. Hilbert terek

Emlékeztetünk a Cauchy-sorozat fogalmára: azt mondjuk, hogy a V pre-Hilbert tér elemeiből képzett $v_1, \ldots, v_m, \ldots$ sorozat Cauchy-féle sorozat, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$d(v_n, v_m) = \|v_n - v_m\| < \varepsilon$$

teljesül véges sok indextől eltekintve, azaz van olyan N küszöbszám, hogy

$$d(v_n, v_m) = \|v_n - v_m\| < \varepsilon \quad (m, n > N).$$

4. Definíció. *Egy pre-Hilbert tér Hilbert tér, ha teljes a belső szorzatból származó metrikára nézve, azaz minden Cauchy-sorozat konvergens.*

Tekintsük a valós (vagy komplex) rendezett szám n-esek

$$\mathbb{K}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid \ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}\}$$

részhalmazát ellátva a

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$$

belső szorzattal (valós esetben a konjugálás művelete elhagyható).

[3]Egy halmaz lezártja a halmazt tartalmazó legszűkebb zárt halmaz. Nyilvánvaló, hogy a halmaz elemeit a torlódási pontjaival kiegészítve megkapjuk a lezártját. Egy másik lehetséges megfogalmazás szerint, egy halmaz lezártja a halmazt tartalmazó összes zárt halmaz metszete. A topológiai alapfogalmakat illetően ld. [3].

2. Tétel. *Egy véges dimenziós valós, vagy komplex koordinátatér Hilbert tér.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy $x^1, \ldots, x^k, \ldots$ Cauchy-féle sorozatot:

$$x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1),\ x^2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2),\ \ldots,\ x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k), \ldots$$

Bármely i indexre a megfelelő koordinátákból képzett $x_i^1, \ldots, x_i^k, \ldots$ sorozat is Cauchy-sorozat, hiszen

$$|x_i^k - x_i^l| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i^k - x_i^l|^2} = \|x^k - x^l\| = d(x^k, x^l) < \varepsilon,$$

feltéve, hogy k és l elegendően nagy. Ennélfogva

$$x_i^* = \lim_{k\to\infty} x_i^k$$

írható (mind $\mathbb{R}$, mind pedig $\mathbb{C}$ teljes). Ha $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, akkor

$$\|x^k - x^*\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i^k - x_i^*|^2}$$

és a $k \to \infty$ határátmenetet véve

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - x^*\| = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy az $x^1, \ldots, x^k, \ldots$ sorozat konvergens és határértéke $x^* \in \mathbb{K}^n$. $\square$

Tekintsük a valós (vagy komplex) sorozatok

$$l_2 := \{x = (x_1, \ldots, x_m, \ldots) \mid \ x_1, \ldots, x_m, \ldots \in \mathbb{K},\ \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < \infty\}$$

részhalmazát ellátva a véges esethez analóg összeadás műveletével, illetve skalárral való szorzással és legyen

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^\infty x_i \bar{y}_i$$

(valós esetben a konjugálás művelete elhagyható).

2. Feladat. Igazolja, hogy l_2-beli elemek esetén a $\sum x_i \bar{y}_i$ sor konvergens.

Útmutatás: A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-féle egyenlőtlenség alapján

$$\sum_{i=1}^m |x_i \bar{y}_i| = \sum_{i=1}^m |x_i| \cdot |y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m |x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^m |y_i|^2} < \infty,$$

ahonnan a $\sum x_i \bar{y}_i$ sor abszolút konvergenciájára következtethetünk.

3. Tétel. *A valós, vagy komplex l_2-tér teljes, azaz Hilbert tér.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy $x^1, \ldots, x^k, \ldots$ Cauchy-féle sorozatot:

$$x^1 = (x^1_1, x^1_2, \ldots, x^1_m, \ldots),\ x^2 = (x^2_1, x^2_2, \ldots, x^2_m, \ldots),\ \ldots,\ x^k = (x^k_1, x^k_2, \ldots, x^k_m, \ldots), \ldots$$

Nyilvánvaló, hogy bármely K pozitív egész választása esetén

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{K} |x^k_i - x^l_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x^k_i - x^l_i|^2} = \|x^k - x^l\| = d(x^k, x^l) < \varepsilon, \tag{3}$$

feltéve, hogy k és l elegendően nagy. Speciálisan bármely i indexre a megfelelő koordinátákból képzett $x^1_i, \ldots, x^k_i, \ldots$ sorozat Cauchy-sorozat, azaz

$$x^*_i = \lim_{k\to\infty} x^k_i$$

írható (mind $\mathbb{R}$, mind pedig $\mathbb{C}$ teljes). A (3) egyenlőtlenség-sorozat bal oldalán az $l \to \infty$ határátmenetet véve

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{K} |x^k_i - x^*_i|} < \varepsilon,$$

majd $K \to \infty$ és

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x^k_i - x^*_i|^2} < \varepsilon \tag{4}$$

következik, feltéve, hogy a k index elegendően nagy. Ez azt jelenti, hogy az $x^1, \ldots, x^k, \ldots$ sorozat az

$$x^* := (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_m, \ldots)$$

elemhez konvergál. A (4) egyenlőtlenség szerint pedig (egy elegendően nagy k index választása mellett)

$$x^k - x^* \in l_2,$$

azaz $x^* = x^k - (x^k - x^*) \in l_2$. $\square$

Tekintsük az $[a, b]$ intervallumon értelmezett valós, vagy komplex értékű folytonos függvények

$$C[a, b] := \{f\colon [a, b] \to \mathbb{K} \mid f \text{ folytonos}\}$$

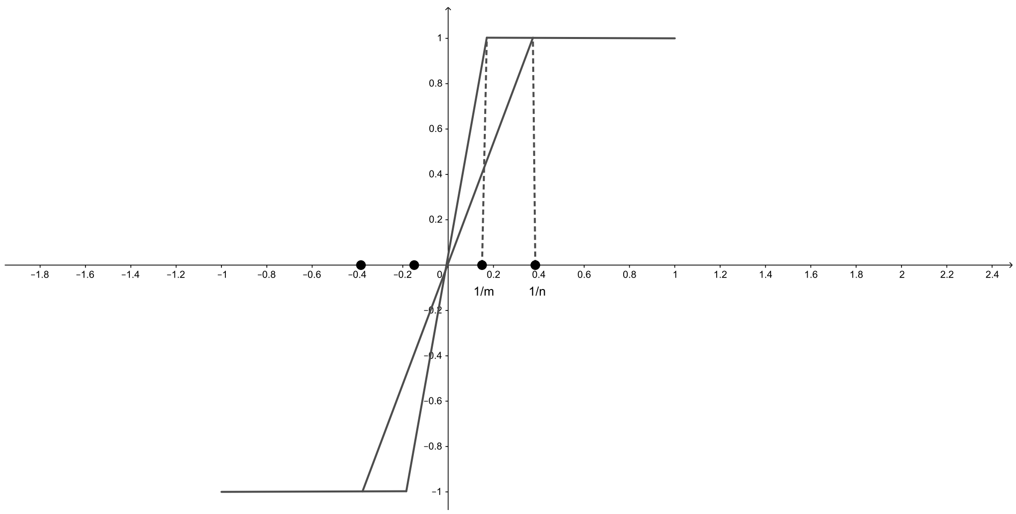
halmazát ellátva a pontonkénti elv alapján végzendő

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \quad \text{illetve} \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t)$$

összeadás műveletével, illetve skalárral való szorzással és legyen

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(t)\bar{g}(t)\, dt$$

(valós esetben a konjugálás művelete elhagyható).



1. ábra. Egy Cauchy-sorozat

Annak belátásához, hogy a folytonos függvények tere nem teljes, elegendő egy olyan Cauchy-sorozatot konstruálnunk, melynek határfüggvénye nem folytonos. A pusztán technikai jellegű részleteket kerülendő, legyen $[a,b]=[-1,1]$ és tekintsük az

$$f_n(t)=\begin{cases} 1 & \text{ha } 1/n \le t \le 1 \\ \\ nt & \text{ha } -1/n \le t \le 1/n \\ \\ -1 & \text{ha } -1 \le t \le -1/n. \end{cases}$$

függvénysorozatot. Az ábráról leolvasható, hogy

$$d(f_m,f_n)=\|f_m-f_n\|=\sqrt{\int_{-1}^{1}|f_m(t)-f_n(t)|^2\,dt}=\sqrt{\int_{-1/n}^{1/n}|f_m(t)-f_n(t)|^2\,dt}$$

feltéve, hogy $m>n$. Mivel a szóban forgó intervallumon a függvények különbsége 1-nél nem nagyobb, ezért

$$|f_m(t)-f_n(t)|^2 \le |f_m(t)-f_n(t)| \quad (-1/n \le t \le 1/n),$$

azaz

$$d(f_m,f_n)=\|f_m-f_n\| \le \sqrt{\int_{-1/n}^{1/n}|f_m(t)-f_n(t)|\,dt}=\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}},$$

figyelembe véve az ábra centrálisan tükrös háromszögeinek területösszegét. Elegendően nagy indexek választása mellett tehát

$$d(f_m,f_n)=\|f_m-f_n\|<\varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy Cauchy-féle sorozatról van szó. Ennek dacára nincs olyan folytonos g függvény, mely az f_n sorozat határértéke lenne: indirekte tegyük fel ugyanis, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}|f_n(t)-g(t)|^2\,dt=0.$$

Mivel az integrandus nemnegatív és folytonos, ezért $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = g(t)$ bármely $t \in [-1, 1]$ esetén[4]. Ez azt jelenti, hogy bármely pozitív t-re

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) = 1,$$

míg negatív t-re

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) = -1.$$

A g függvénynek ezért szakadási helye van a 0-ban, ami ellentmondás. Az $L_2[a, b]$ Hilbert tér a folytonos függvények pre-Hilbert terének ún. teljes metrikus lezártja, azaz a legszűkebb olyan Hilbert tér, melynek $C[a, b]$ izometrikusan (távolságtartóan) beágyazott lineáris altere. Speciálisan $C[a, b]$ sűrű az $L_2[a, b]$ térben. Weierstass approximációs tétele szerint viszont, ha $f \in C[a, b]$, akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan (valós, vagy komplex együtthatós) p polinom, melyre

$$|f(t) - p(t)| < \varepsilon \qquad (a \leq t \leq b).$$

Ez azt jelenti, hogy a polinomok halmaza sűrű a $C[a, b]$, s ennélfogva az $L_2[a, b]$ térben is. A következő szakaszban ortogonális polinomrendszerekre adunk néhány klasszikus példát a Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás segítségével.

1.3. Valós ortogonális polinomrendszerek

Tekintsük a $[-1, 1]$ intervallumon értelmezett valós értékű folytonos függvények terét és a

$$p_0(t) = 1,\ p_1(t) = t,\ p_2(t) = t^2, \ldots, p_m(t) = t^m, \ldots \tag{5}$$

monomokból álló vektorrendszert.

1.3.1. Legendre polinomok

Az (5) rendszerből a

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\, dt$$

belső szorzat segítségével végrehajtott Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció az ún. *Legendre polinomok*at adja. Paritási okokból nyilvánvaló, hogy amennyiben a hatványkitevők összege páratlan, akkor

$$\int_{-1}^{1} t^{2m+1}\, dt = 0$$

miatt a megfelelő monomok ortogonálisak egymásra. Páros összeg esetén

$$\int_{-1}^{1} t^{2m}\, dt = \frac{2}{2m+1};$$

speciálisan

$$\|p_m\|^2 = \frac{2}{2m+1}.$$

[4]Ellenkező esetben folytonossági érveléssel garantálható olyan pozitív mértékű intervallum létezése, melyen az integrandus nem azonosan nulla, s ennélfogva élesen pozitív.

Következésképpen

$$l_0(t) = p_0(t) = 1,\ l_1(t) = p_1(t) - \frac{\langle p_1, l_0\rangle}{\|l_0\|^2} l_0(t) = p_1(t),$$

hiszen $\langle p_1, l_0\rangle = \langle p_1, p_0\rangle = 0$, mert a hatványkitevők összege $0+1=1$. Folytatva az eljárást

$$l_2(t) = p_2(t) - \frac{\langle p_2, l_1\rangle}{\|l_1\|^2} l_1(t) - \frac{\langle p_2, l_0\rangle}{\|l_0\|^2} l_0(t) = p_2(t) - \frac{\langle p_2, l_0\rangle}{\|l_0\|^2} l_0(t) = p_2(t) - \frac{\frac{2}{2+1}}{\frac{2}{0+1}} l_0(t) = t^2 - \frac{1}{3},$$

hiszen $\langle p_2, l_1\rangle = \langle p_2, p_1\rangle = 0$, mert a kitevők összege $2+1=3$ stb.

3. Feladat. Számítsa ki a harmadfokú Legendre polinomot.

Útmutatás:

$$l_3(t) = p_3(t) - \frac{\langle p_3, l_2\rangle}{\|l_2\|^2} l_2(t) - \frac{\langle p_3, l_1\rangle}{\|l_1\|^2} l_1(t) - \frac{\langle p_3, l_0\rangle}{\|l_0\|^2} l_0(t),$$

ahol

$$\langle p_3, l_2\rangle = 0, \quad \langle p_3, l_1\rangle = \frac{2}{4+1} = \frac{2}{5}, \quad \langle p_3, l_0\rangle = 0 \ \text{ és } \ \|l_1\|^2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3},$$

azaz

$$l_3(t) = t^3 - \frac{3}{5} t.$$

1.3.2. Elsőfajú Csebisev polinomok

Az (5) rendszerből a

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t) g(t) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

belső szorzat segítségével végrehajtott Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció az ún. *elsőfajú Csebisev polinomok*at adja. A $t = \sin s$ helyettesítéssel

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\sin s) g(\sin s) \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 s}} \cos(s)\, ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\sin s) g(\sin s)\, ds.$$

Paritási okokból nyilvánvaló, hogy amennyiben a hatványkitevők összege páratlan, akkor

$$\int_{-1}^{1} t^{2m+1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2m+1} s\, ds = 0$$

miatt a megfelelő monomok ortogonálisak egymásra. Páros összeg esetén

$$\int_{-1}^{1} t^{2m} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2m}(s) \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(s)}} \cos(s)\, ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2m}(s)\, ds.$$

Utóbbi kiszámítása a parciális integrálás módszerével történhet:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2m}(s)\, ds = -\left[\cos s \sin^{2m-1} s\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + (2m-1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 s \sin^{2m-2} s\, ds =$$

$$(2m-1)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2 s)\sin^{2m-2} s\, ds,$$

ahonnan

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^{2m}(s)\, ds = \frac{2m-1}{2m}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^{2(m-1)} s\, ds. \tag{6}$$

Amit kaptunk, valójában egy rekurziós formula, melynek ismételt alkalmazásával

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^{2m}(s)\, ds = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2(m-1)-1}{2(m-1)}\cdot\ldots\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}1\, ds = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi.$$

4. Feladat. Határozza meg a Csebisev polinomokat a harmadfokú taggal bezárólag.

Útmutatás:

$$C_0(t)=1,\ C_1(t)=p_1(t)-\frac{\langle p_1,C_0\rangle}{\|C_0\|^2}C_0(t)=p_1(t),\ C_2(t)=p_2(t)-\frac{\langle p_2,C_1\rangle}{\|C_1\|^2}C_1(t)-\frac{\langle p_2,C_0\rangle}{\|C_0\|^2}C_0(t),$$

ahol

$$\langle p_2,C_1\rangle=0,\quad \langle p_2,C_0\rangle=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2(s)\, ds=\frac{\pi}{2}\quad \text{(ld. rekurziós formula: } 2m=2\text{)}\ \text{ és }\ \|C_0\|^2=\pi,$$

azaz

$$C_2(t)=t^2-\frac{1}{2}=\frac{2t^2-1}{2}.$$

Végül

$$C_3(t)=p_3(t)-\frac{\langle p_3,C_2\rangle}{\|C_2\|^2}C_2(t)-\frac{\langle p_3,C_1\rangle}{\|C_1\|^2}C_1(t)-\frac{\langle p_3,C_0\rangle}{\|C_0\|^2}C_0(t),$$

ahol

$$\langle p_3,C_2\rangle=0,\quad \langle p_3,C_1\rangle=\frac{3}{8}\pi\quad \text{(ld. rekurziós formula: } 2m=4\text{)},\quad \langle p_3,C_0\rangle=0\ \text{ és }\ \|C_1\|^2=\frac{\pi}{2},$$

azaz

$$C_3(t)=t^3-\frac{3}{4}t=\frac{4t^3-3t}{4}.$$

A szakirodalomban leggyakrabban a $T_n(1)=1$ feltétellel normalizált Csebisev-rendszerrel találkozunk:

$$T_0(t)=1,\ T_1(t)=t,\ T_2(t)=2t^2-1,\ T_3(t)=4t^3-3t,\ldots$$

3. Megjegyzés. Az (5) rendszerből a

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(t)g(t)\sqrt{1-t^2}\, dt$$

belső szorzat segítségével végrehajtott Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció az ún. *másodfajú Csebisev polinomok*at adja.

1.3.3. Jacobi polinomok

Az (5) rendszerből a

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\,dt \quad (\alpha > -1, \beta > -1)$$

belső szorzat segítségével végrehajtott Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció az ún. *Jacobi polinomok*at adja.

4. Megjegyzés. Az (5) rendszerből a

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-t^2}\,dt$$

belső szorzat segítségével végrehajtott Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció az ún. *Hermite polinomok*at adja. Az

$$\langle f, g\rangle = \int_{0}^{\infty} f(t)g(t)e^{-t}\,dt$$

belső szorzatra nézve ortogonalizálva pedig az ún. *Laguerre polinomok*at kapjuk.

2. Fourier-sorok: a klasszikus trigonometrikus rendszer

A klasszikus Fourier rendszer (a trigonometrikus rendszer) tagjai:

$$1,\ \cos t,\ \sin t,\ \cos(2t),\ \sin(2t), \dots,\ \cos(mt),\ \sin(mt), \dots \tag{7}$$

Tekintsük a $[-\pi, \pi]$ intervallumon értelmezett valós értékű folytonos függvények terét, ellátva a

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$$

belső szorzattal. Paritásra és periodicitásra tekintettel

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin t\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t\,dt = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\cos(lt)\,dt = 0$$

bármely k és l nemnegatív egész esetén. A $\sin(kt)\sin(lt)$, illetve $\cos(kt)\cos(lt)$ szorzatok integrálásához alakítsuk át az integrandust összeggé az addíciós tétel segítségével:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \Rightarrow \quad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$$

ahonnan összeadással

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$$

következik, azaz

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(lt)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left((k+l)t\right) + \cos\left((k-l)t\right)\,dt,$$

ahol

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left((k+l)t\right) + \cos\left((k-l)t\right)\, dt = \left[\frac{\sin\left((k+l)t\right)}{k+l}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{\sin\left((k-l)t\right)}{k-l}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

feltéve, hogy $k \neq l$ nemnegatív egészek. A $k = l$ esetben

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kt)\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2kt) + 1\, dt = \pi + \left[\frac{\sin(2kt)}{4k}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

feltéve, hogy $k \neq 0$. Végül a $k = l = 0$ eset vizsgálata:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 = 2\pi.$$

Hasonlóan adódik a szinuszos tagok ortogonalitása és normanégyzete a

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x \sin y$$

azonosság alapján[5]. A többé-kevésbé szokásos jelölések mellett egy $f \in C[-\pi, \pi]$ függvénynek a trigonometrikus rendszerre vonatkozó Fourier-együtthatói

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt, \quad \alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\, dt, \;\; \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\, dt.$$

A függvény *formális Fourier-sora*

$$f \approx \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt).$$

4. Tétel. *Legyen f egy 2π-szerint periodikus, kétszer folytonosan differenciálható függvény; ekkor*

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt)$$

és a konvergencia egyenletes.

Bizonyítás. A bizonyítás első lépése az

$$s_n(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt)$$

részletösszeg-sorozat egyenletes konvergenciájának igazolása. Alkalmazva a parciális integrálás szabályát:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\, dt = \left[\frac{f(t)\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin(kt)\, dt = -\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin(kt)\, dt =$$

[5] A vegyes szorzatokat is összeggé alakíthatjuk a szinuszfüggvényre vonatkozó addíciós tétel segítségével:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \Rightarrow \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

Ezek az átalakítások hasznosak, ha az integrálási tartomány nem egy origóra szimmetrikus (paritás), periódusnyi hosszúságú (periodicitás) intervallum.

$$\frac{1}{k}\left[\frac{f'(t)\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)\cos(kt)\,dt = -\frac{1}{k^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)\cos(kt)\,dt,$$

ahonnan

$$|\alpha_k| = \frac{1}{\pi k^2}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)\cos(kt)\,dt\right| \le \frac{M}{\pi k^2}$$

írható az $M := \max_{t\in[-\pi,\pi]} |f''(t)|$ jelölés mellett. Hasonlóan kapjuk, hogy $|\beta_k| \le \frac{M}{\pi k^2}$, ami azt jelenti, hogy az $s_n(t)$ részletösszeg-sorozat abszolút konvergens. Mivel a majoráló konvergens sor

$$|\alpha_0| + \frac{2M}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

részletösszege független a t paramétertől, az is következik, hogy az s_n részletösszeg-sorozat egyenletesen konvergál az összegfüggvényéhez.

A második lépésben egy zárt képletet vezetünk le az $s_n(t)$ részletösszegre; ez az ún. *Dirichlet-formula.*

$$s_n(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cos(kt) + \beta_k\sin(kt) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,ds +$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos(ks)\,ds\cos(kt) + \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin(ks)\,ds\sin(kt) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,ds + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left(\cos(ks)\cos(kt) + \sin(ks)\sin(kt)\right)\,ds =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,ds + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos\left(k(s-t)\right)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,ds + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(r+t)\cos(kr)\,dr$$

az $r = s - t$ helyettesítést követően, figyelembe véve az integrandus periodicitását is az integrálási tartomány eltolásának mellőzésével. Kapjuk tehát, hogy

$$s_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,ds + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(r+t)\cos(kr)\,dr =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(r+t)\left(\frac{1}{2} + \cos(r) + \cos(2r) + \ldots + \cos(nr)\right)\,dr.$$

Az integrandusban szereplő összeget kiszámítva

$$\frac{1}{2} + \cos(r) + \cos(2r) + \ldots + \cos(nr) = -\frac{1}{2} + \Re\left(1 + e^{ir} + e^{i2r} + \ldots + e^{inr}\right) =$$

$$-\frac{1}{2} + \Re\frac{e^{i(n+1)r} - 1}{e^{ir} - 1} = -\frac{1}{2} + \Re\frac{e^{i(n+1)r} - 1}{e^{ir} - 1}\cdot\frac{e^{-ir} - 1}{e^{-ir} - 1} = -\frac{1}{2} + \Re\frac{e^{inr} - e^{i(n+1)r} - e^{-ir} + 1}{|e^{ir} - 1|^2} =$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{\cos(nr) - \cos\left((n+1)r\right) - \cos r + 1}{2(1-\cos r)} = \frac{\cos(nr) - \cos\left((n+1)r\right)}{2(1-\cos r)}.$$

Felhasználva a

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$$

azonosságot, az
$$\alpha = \frac{x+y}{2}, \quad \beta = \frac{x-y}{2}$$
helyettesítésekkel kapjuk a szorzattá alakítás szabályát:
$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$
Következésképpen
$$\cos(nr) - \cos\left((n+1)r\right) = -2\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)r\right)\sin\left(-\frac{r}{2}\right),$$
$$1-\cos r = \cos 0 - \cos r = -2\sin\left(\frac{r}{2}\right)\sin\left(-\frac{r}{2}\right),$$
azaz
$$s_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(r+t)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)r\right)}{2\sin\left(\frac{r}{2}\right)}\,dr. \tag{8}$$
A bizonyítás harmadik lépéseként pedig megmutatjuk, hogy az $s(t)$ összegfüggvény maga $f(t)$. Alkalmazzuk a (8) Dirichlet-formulát az azonosan 1 függvényre:
$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)r\right)}{2\sin\left(\frac{r}{2}\right)}\,dr, \tag{9}$$
ahonnan
$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)r\right)}{2\sin\left(\frac{r}{2}\right)}\,dr,$$
következésképpen
$$|s_n(t)-f(t)| = \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(r+t)-f(t)}{2\sin\left(\frac{r}{2}\right)}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)r\right)\,dr\right|.$$
Rögzített t paraméter mellett tekintsük a
$$g(r) := \frac{f(r+t)-f(t)}{2\sin\left(\frac{r}{2}\right)}$$
függvényt a
$$g(0) := \lim_{r\to 0} g(r) = f'(t) \quad \text{(L' Hospital-szabály)}$$
folytonos kiterjesztéssel. További számításokkal igazolható, hogy $g'(0) = f''(t)$. Alkalmazva a parciális integrálás szabályát
$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(r+t)-f(t)}{2\sin\left(\frac{r}{2}\right)}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)r\right)\,dr = \int_{-\pi}^{\pi} g(r)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)r\right)\,dr =$$
$$-\left|\frac{g(r)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)r\right)}{n+\frac{1}{2}}\right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_{-\pi}^{\pi} g'(r)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)r\right)\,dr =$$

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_{-\pi}^{\pi} g'(r)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)r\right)\,dr.$$

Következésképpen

$$|s_n(t)-f(t)| \leq \frac{1}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_{-\pi}^{\pi}|g'(r)|\,dr \leq \frac{2K}{n+\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

ahol $K = \max\limits_{r\in[-\pi,\pi]}|g'(r)|$. Az $n\to\infty$ határátmenetet véve kapjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} s_n(t) = f(t)$, ami bizonyítandó volt[6]. $\square$

Egy függvényt szakaszonként folytonosnak mondunk, ha értelmezési tartománya véges sok pontjától eltekintve folytonos és a szakadási helyeken léteznek a (véges) bal-, illetve jobboldali határértékek.

5. Tétel. *Legyen f egy 2π-szerint periodikus, folytonos és egy perióduson belül szakaszonként folytonosan differenciálható függvény; ekkor*

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\cos(kt) + \beta_k\sin(kt)$$

és a konvergencia egyenletes.

Még tovább gyengítve a feltételeken, ha a függvény (s nem csupán a deriválfüggvénye) is csak szakaszonként folytonos, akkor a Fourier-sor minden folytonossági pontban előállítja a függvényértéket, míg a szakadási helyeken összegfüggvénye a bal-, illetve jobboldali határérték átlagát veszi fel:

$$s(t) = \frac{\lim_{s\to 0^+} f(t+s) + \lim_{s\to 0^+} f(t-s)}{2};$$

ez az ún. Dirichlet-Jordan-féle tétel. A Fourier-sorok konvergenciájával kapcsolatos eredmények részletes kifejtése megtalálható - többek között - a klasszikus [1] szakirodalomban; történeti megjegyzések és a trigonometrikus sorok elméletének fejlődését motiváló fizikai példák is szerepelnek (a rezgő húr problémája, a hővezetés egyenlete). A formula illusztrációjaképpen tekintsük az

$$f(t) = \begin{cases} \pi & \text{ha } t = -\pi \\ \\ t & \text{ha } -\pi < t \leq \pi. \end{cases}$$

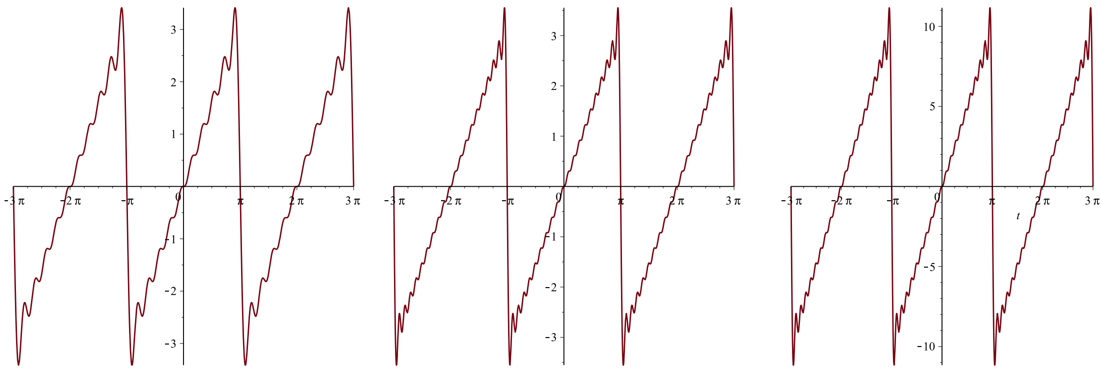
függvény 2π-periodikus kiterjesztését. Mivel egyetlen ponttól eltekintve páratlan függvényről van szó a Fourier-féle sorfejtés tisztán szinuszos, amiből egyfelől az következik, hogy $\alpha_0 = 0$ és $\alpha_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, másfelől pedig

$$\frac{\lim_{s\to 0^+} f(\pi+s) + \lim_{s\to 0^+} f(\pi-s)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0.$$

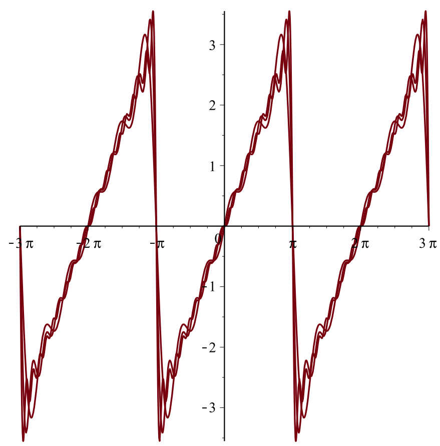
Némi számolással

$$\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(kt)\,dt = -\left[\frac{t\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)\,dt =$$

[6] Jegyezzük meg, hogy a (10) egyenlőtlenség csupán pontonkénti konvergenciát igazol, hiszen g, s ennélfogva a felső becslésben szereplő K konstans is függ a t paramétertől. Az első lépésben azonban az egyenletes konvergenciát már igazoltuk.



2. ábra. Az $s_5(t)$, $s_{10}(t)$ és az $s_{20}(t)$ részletösszegek I



3. ábra. Az $s_5(t)$, $s_{10}(t)$ és az $s_{20}(t)$ részletösszegek II

$$-\left|\frac{t\cos(kt)}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} = -2\pi\frac{\cos(k\pi)}{k} = -2\pi\frac{(-1)^k}{k} = 2\pi\frac{(-1)^{k+1}}{k},$$

figyelembe véve az integrandus páratlanságát és az origóra szimmetrikus integrálási tartományt. Ennélfogva

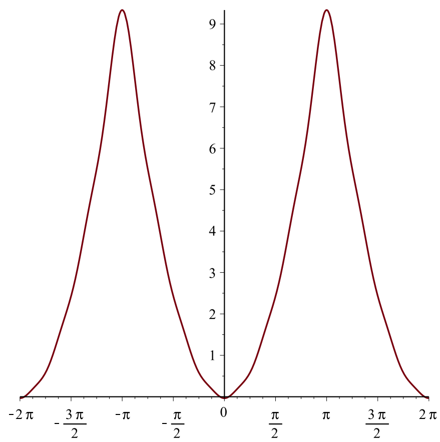
$$\beta_k = 2\frac{(-1)^{k+1}}{k}. \tag{11}$$

Az ábrák az $s_5(t)$, $s_{10}(t)$ és az $s_{20}(t)$ részletösszegeket mutatják külön-külön, majd pedig egy koordinátarendszerben.

5. Feladat. Határozza meg az $f\colon t \in [-\pi, \pi] \to f(t) = t^2$ függvény Fourier-sorát.

Útmutatás. Mivel a függvény páros, a Fourier-sor tisztán koszinuszos:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{\pi^2}{3},$$



4. ábra. Az $s_7(t)$ részletösszeg

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(kt)\,dt = 4\frac{(-1)^k}{k^2},$$

hiszen

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(kt)\,dt = \left[\frac{t^2\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(kt)\,dt = -\frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(kt)\,dt =$$

$$-4\pi\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = 4\pi\frac{(-1)^k}{k^2}$$

felhasználva a (11) formulához vezető eredményt is. Mivel a (2π)-periodikus kiterjesztés folytonos és szakaszonként folytonosan differenciálható, ezért

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kt).$$

Az ábra az $s_7(t)$ részletösszeget mutatja. Speciálisan $(t=\pi)$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \dots.$$

2.1. Komplex Fourier-sorok

A komplex értékű függvények esetéhez adaptálva a formális Fourier-sor az

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2} + \beta_k\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i} = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k - i\beta_k}{2}e^{ikt} + \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2}e^{-ikt}$$

alakot ölti. Bevezetve a $c_0 := \alpha_0$,

$$c_k := \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{e^{ikt}}\,dt$$

és

$$c_{-k} = \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{e^{-ikt}}\,dt$$

jelöléseket

$$f \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

írható, ahol a fellépő együtthatók a függvény Fourier-együtthatói a komplex

$$\ldots, e^{-imt}, \ldots, e^{-it}, 1, e^{it}, \ldots, e^{imt}, \ldots$$

ortogonális rendszerre vonatkozóan a (komplex)

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{g}(t)\,dt$$

belső szorzatra nézve. Az elemek normanégyzete egységesen $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-ikt}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dt = 2\pi$.

1. Példa. Tekintsük az $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, az origótól eltekintve komplex értelemben differenciálható függvényt. A Laurent-féle sorfejtés szerint

$$f(z) = \ldots + c_{-2}\frac{1}{z^2} + c_{-1}\frac{1}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots,$$

ahol az együtthatók kiszámíthatók a $f(w)/w^{k+1}$ hányadosfüggvény origó középpontú, egységsugarú körön vett integrálja segítségével a

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{i(k+1)t}}e^{it}i\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\overline{e^{ikt}}\,dt$$

formula szerint [3]. A Laurent-sor tehát az $f(e^{it})$ függvény (komplex) Fourier-sorába megy át, ahonnan az is következik, hogy a Fourier-sor konvergens és összege

$$f(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}.$$

3. Integráltranszformációk és alkalmazásaik

3.1. Fourier-transzformáció

The Fourier integral may be regarded as the formal limit of the Fourier series as the period tends to the infinity [2]. A továbbiakban röviden összefoglaljuk a Fourier-integrálhoz (Fourier-transzformált) vezető formális határátmenet lépéseit; a témakör elmélyült és részletes tanulmányozásához a [1] szakirodalom ajánlott.

Legyen f egy $2L$-szerint periodikus függvény és tekintsük a $s = Lt/\pi$ helyettesítést, ami a $[-\pi, \pi]$ intervallumot a $[-L, L]$ intervallumra képezi és a 2π-szerint periodikus $f_\pi(t) = f(s)$ függvényt adja. A formális Fourier-sor komplex alakja szerint

$$f_\pi(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad \text{ahol} \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\pi(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\pi(t)\overline{e^{ikt}}\,dt.$$

Helyettesítéses integrálással

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\pi(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(s)e^{-i\omega_k s}\,ds = \frac{1}{2L}g_L(\omega_k)$$

írható az

$$\omega_k = \frac{k\pi}{L} \quad \text{és} \quad g_L(\omega) := \int_{-L}^{L} f(s)e^{-i\omega s}\,ds$$

jelölések mellett. Kapjuk tehát, hogy

$$f(s) = f_\pi(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L}g_L(\omega_k)e^{i\omega_k s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}g_L(\omega_k)e^{i\omega_k s}\Delta\omega_k, \text{ ahol } \Delta\omega_k := \omega_{k+1} - \omega_k.$$

A formális $L \to \infty$ határátmenettel finomítva az ,,integrálközelítő összeghez" tartozó beosztást

$$f(s) \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega s}\,d\omega,$$

ahol

$$g(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega s}\,ds$$

a függvény formális Fourier-transzformáltja (Fourier-integrál). Összegezve és finomítva az eddigieket: legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ egy adott függvény úgy, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty. \tag{12}$$

A szokásos jelölésekkel az f függvény *Fourier-transzformált*ja

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt.$$

A Fourier-transzformált képzése lineáris művelet, azaz összeg transzformáltja a transzformáltak összege és skalárszoros transzformáltja a transzformált skalárszorosa (ez megfelel az integrálás alaptulajdonságainak):

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t) + g(t))\,e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}\,dt,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

Amennyiben h az f függvény eltoltja, azaz $h(t) = f(t - t_0)$, akkor

$$\hat{h}(\omega) = e^{-i\omega t_0}\hat{f}(\omega),$$

ugyanis

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-i\omega t}\,dt = e^{-i\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-i\omega(t-t_0)}\,dt = e^{-i\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega s}\,ds$$

az $s = t-t_0$ helyettesítést követően. Az $s = t/\alpha$ helyettesítéssel pedig kiszámíthatjuk a $h(t) = f(t/\alpha)$ függvény Fourier-transzformáltját:

$$\hat{h}(\omega) = \alpha\hat{f}(\alpha\omega)$$

feltéve, hogy $\alpha > 0$ valós szám (elkerülendő az integrálási határok felcserélődését). A deriváltfüggvény transzformáltjának kiszámítási formulája pedig

$$\hat{f'}(\omega) = \left[f(t)e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}(-i\omega)\,dt = i\omega\hat{f}(\omega);$$

mivel f differenciálható (s ennélfogva folytonos), a (12) feltétel implikálja, hogy $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$. Hasonlóan

$$\hat{f''}(\omega) = i\omega\hat{f'}(\omega) = (i\omega)^2\hat{f}(\omega) = -\omega^2\hat{f}(\omega)$$

stb. A deriváltfüggvény Fourier-transzformáltjára vonatkozó összefüggést figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy a transzformáció a

$$h(t) = f'(t)$$

differenciálegyenletet a $\hat{h}(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)$ algebrai egyenletté alakítja, ahonnan a függvény az

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

ún *inverz Fourier-transzformáció*val nyerhető vissza.

6. Feladat. Határozza meg a

$$h(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{ha } 0 \le t \\ \\ 0 & \text{ha } t < 0. \end{cases}$$

függvény Fourier transzformáltját, ahol $a > 0$ rögzített pozitív szám.

Útmutatás: nyilvánvaló, hogy $\lim_{t\to\pm\infty} h(t) = 0$. Másfelől

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt = \int_0^{\infty} e^{-at}\,dt = -\left[\frac{e^{-at}}{a}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{a} - \lim_{t\to\infty}\frac{e^{-at}}{a} = \frac{1}{a} < \infty.$$

Alkalmazva a definiáló formulát

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}\,dt = -\lim_{s\to\infty}\left[\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{a+i\omega}\right]_0^s =$$

$$-\frac{1}{a+i\omega}\left(\lim_{s\to\infty} e^{-(a+i\omega)s} - 1\right) = \frac{1}{a+i\omega},$$

mivel

$$\lim_{s\to\infty} e^{-(a+i\omega)s} = \lim_{s\to\infty}\frac{e^{-i\omega s}}{e^{as}} = 0$$

tekintettel arra, hogy a számláló korlátos: $|e^{-i\omega s}| = 1$. Eljárhatunk úgy is, hogy a függvényt az

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{ha } 0 \le t \\ \\ 0 & \text{ha } t < 0. \end{cases}$$

csillapítottjának tekintjük: $h(t) = f(at)$. A megfelelő formula alapján

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Az f függvény Fourier-transzformáltja

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(1+i\omega)t}\,dt = -\lim_{s\to\infty}\left[\frac{e^{-(1+i\omega)t}}{1+i\omega}\right]_0^s =$$

$$-\frac{1}{1+i\omega}\left(\lim_{s\to\infty} e^{-(1+i\omega)s} - 1\right) = \frac{1}{1+i\omega}.$$

7. Feladat. Határozza meg az

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } -1 \le t \le 1 \\ \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

függvény Fourier-transzformáltját.

Útmutatás: közvetlen számolással

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}\,dt = -\frac{1}{i\omega}\left[e^{-i\omega t}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{i\omega} = 2\frac{\sin\omega}{\omega}.$$

3.1.1. Filter és konvolúció

Legyen $f(t)$ egy időben változó jel, melynek a frekvenciatartományon értelmezett megfelelője az $\hat{f}(\omega)$ Fourier-transzformált. Filteren egy $\hat{H}(\omega)$ alakú függvényt értünk, melynek zérushelyei kiszűrik a nem kívánt frekvenciájú rezgéseket (zajok). Matematikailag feltéve a kérdést, milyen időben változó $g(t)$ jelet kell kibocsátanunk ahhoz, hogy a frekvenciatartományon a

$$\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{H}(\omega)$$

összefüggés teljesüljön? A megoldást az ún. konvolúció művelete írja le:

$$g(t) = f * H(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(s)H(t-s)\,ds.$$

A g függvény Fourier-transzformáltja

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(s)H(t-s)\,dt\,ds =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-s)}e^{-i\omega s} f(s)H(t-s)\,dt\,ds = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega r}e^{-i\omega s} f(s)H(r)\,dr\,ds$$

az $r = t - s$ helyettesítéssel. Következésképpen

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s} f(s)\,ds \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega r} H(r)\,dr = \hat{f}(\omega)\hat{H}(\omega).$$

3.2. Laplace-transzformáció

Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *Laplace-transzformált*ján a

$$L(f)(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-ts}\,dt \tag{13}$$

függvényt értjük. Értelmezési tartománya azokból a pozitív számokból áll, melyekre a (13) improprius integrál létezik:

$$\int_0^\infty f(t)e^{-ts}\,dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(t)e^{-ts}\,dt.$$

A határérték létezésének egyik klasszikus elegendő feltétele a folytonosság és az exponenciális rendűség.

5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f függvény exponenciális rendű, ha*

$$|f(t)|e^{-tc} \le M \quad (t > t_0)$$

teljesül bizonyos c, M és t_0 pozitív konstansok esetén.

Egy folytonos, exponenciális rendű függvény esetében a Laplace-transzformált létezik bármely $s > c$ esetén, hiszen

$$\int_0^R \left|f(t)e^{-ts}\right|\,dt \le \int_0^R |f(t)|e^{-ts}\,dt = \int_0^{t_0} |f(t)|e^{-ts}\,dt + \int_{t_0}^R |f(t)|e^{-ts}\,dt \le$$

$$\int_0^{t_0} |f(t)|e^{-ts}\,dt + M\int_{t_0}^R e^{t(c-s)}\,dt = \int_0^{t_0} |f(t)|e^{-ts}\,dt + M\int_{t_0}^R e^{-t(s-c)}\,dt,$$

ahol

$$\lim_{R\to\infty} \int_{t_0}^R e^{-t(s-c)}\,dt = -\frac{1}{s-c}\lim_{R\to\infty}\left[e^{-t(s-c)}\right]_0^R = -\frac{1}{s-c}\lim_{R\to\infty} e^{-R(s-c)} - e^{-t_0(s-c)} = \frac{e^{-t_0(s-c)}}{s-c},$$

feltéve, hogy $s > c$.

2. Példa. Mind a polinomiális, mind pedig a korlátos függvények exponenciális rendű függvények és a Laplace-transzformált értelmezési tartománya a pozitív számok halmaza. Ezzel szemben az $f(t) = e^{t^2}$ függvény nem exponenciális rendű.

Korlátos függvények exponenciális rendűsége nyilvánvaló bármely $c > 0$ konstans esetén, hiszen

$$\lim_{t\to\infty} |f(t)|e^{-tc} = 0.$$

A L' Hospital szabály véges sokszori alkalmazásával igazolható, hogy

$$\lim_{t\to\infty} |f(t)|e^{-tc} = |\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-tc}| = 0$$

minden polinomiális függvényre. Ezzel szemben

$$\lim_{t\to\infty} e^{t^2}e^{-tc} = \lim_{t\to\infty} e^{t(t-c)} = \infty.$$

A Laplace-transzformált képzése lineáris művelet, azaz összeg transzformáltja a transzformáltak összege és skalárszoros transzformáltja a transzformált skalárszorosa (ez megfelel az integrálás alaptulajdonságainak):

$$\int_0^\infty (f(t)+g(t))\, e^{-ts}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-ts}\,dt + \int_0^\infty g(t)e^{-ts}\,dt,$$

$$\int_0^\infty \alpha f(t)e^{-ts}\,dt = \alpha \int_0^\infty f(t)e^{-ts}\,dt.$$

Az $s = t/\alpha$ helyettesítéssel pedig kiszámíthatjuk a $h(t) = f(t/\alpha)$ függvény Laplace-transzformáltját:

$$L(h)(s) = \alpha L(f)(\alpha s)$$

feltéve, hogy $\alpha > 0$ valós szám (elkerülendő az integrálási határok felcserélődését). A deriváltfüggvény Laplace-transzformáltjának kiszámítási formulája pedig

$$L(f')(s) = \left[f(t)e^{-ts}\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)e^{-ts}(-s)\,dt = sL(f)(s) - f(0)$$

feltéve, hogy $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-ts} = 0$ (ld. korlátos, polinomiális, illetve exponenciális rendű függvények[7]). Hasonlóan

$$L(f'')(s) = sL(f')(s) - f'(0) = s^2L(f)(s) - sf(0) - f'(0)$$

stb. Általában

$$L(f^n)(s) = sL(f^{n-1}) - f^{n-1}(0) = s\left(sL(f^{n-2}) - f^{n-2}(0)\right) - f^{n-1}(0) = \dots,$$

feltéve, hogy

$$\lim_{t\to\infty} f^k(t)e^{-ts} = 0 \quad (k = 0, \dots, n-1).$$

8. Feladat. Határozza meg az $f(t) = \sin t$ függvény Laplace-transzformáltját.

Útmutatás:

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-ts}\sin t\,dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-ts}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\,dt =$$

$$\frac{1}{2i(i-s)}\lim_{R\to\infty}\left[e^{t(i-s)}\right]_0^R + \frac{1}{2i(i+s)}\lim_{R\to\infty}\left[e^{-t(i+s)}\right]_0^R = -\left(\frac{1}{2i(i-s)} + \frac{1}{2i(i+s)}\right) = \frac{1}{s^2+1},$$

hiszen

$$\lim_{R\to\infty} e^{R(i-s)} = \lim_{R\to\infty}\frac{e^{Ri}}{e^{Rs}} = 0, \quad \lim_{R\to\infty} e^{-R(i+s)} = \lim_{R\to\infty}\frac{e^{-Ri}}{e^{Rs}} = 0$$

tekintettel arra, hogy a számlálók korlátosak: $|e^{Ri}| = |e^{-Ri}| = 1$. Néhány további függvény Laplace-transzformáltja:

---

[7] Ha $s > c$, akkor

$$|f(t)|e^{-ts} = |f(t)|e^{-tc}e^{-t(s-c)} \le Me^{-t(s-c)} \to 0$$

a $t \to \infty$ határátmenet mellett.

$f(t)$	$L(f)(s)$	értelmezési tart.
1	$\frac{1}{s}$	$s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s>a$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s>0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s>0$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s>a$
$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$s>a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$s>a$

9. Feladat. Oldja meg a $2y'(t) - y(t) = \sin(t)$ differenciálegyenletet az $y(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

Útmutatás: az írásmunkát egyszerűsítendő, vezessük be az $Y(s) = L(y)(s)$ jelölést. Mindkét oldal Laplace-transzformáltját véve

$$2sY(s) - 2y(0) - Y(s) = \frac{1}{s^2+1},$$

ahonnan

$$Y(s) = \frac{1}{(2s-1)(s^2+1)}$$

következik. A nevezőben szereplő polinom azonban redukcibilis (ld. Laplace-transzformáltak táblázata), ezért parciális törtekre bontjuk:

$$Y(s) = \frac{1}{(2s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{2s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{(A+2B)s^2 + (2C-B)s + A - C}{(2s-1)(s^2+1)},$$

azaz

$$A + 2B = 0, \quad 2C - B = 0, \quad A - C = 1.$$

A lineáris egyenletrendszert megoldva: $A = 4/5$, $B = -2/5$ és $C = -1/5$. Következésképpen

$$Y(s) = \frac{2}{5}\frac{1}{s-(1/2)} - \frac{2}{5}\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{5}\frac{1}{s^2+1}.$$

A Laplace-transzformáltak táblázatát figyelembe véve: $y(t) = \frac{2}{5}e^{t/2} - \frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t$.

10. Feladat. Oldja meg a $2y'(t) - y(t) = \sin(t)$ differenciálegyenletet az $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

Útmutatás: mindkét oldal Laplace transzformáltját véve

$$Y(s) = \frac{2}{2s-1} + \frac{1}{(2s-1)(s^2+1)} = \frac{7}{5}\frac{1}{s-(1/2)} - \frac{2}{5}\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{5}\frac{1}{s^2+1},$$

felhasználva az előző feladat eredményét is. A megoldás: $y(t) = \frac{7}{5}e^{t/2} - \frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t$.

3.2.1. Másodrendű, állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek

Tekintsük a

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = 0$$

differenciálegyenletet. Mindkét oldal Laplace transzformáltját véve

$$(s^2 + ps + q)Y(s) = y(0)s + py(0) + y'(0);$$

$s^2 + ps + q$ a differenciálegyenlet ún. karakterisztikus polinomja. Amennyiben irreducibilis a valós számok teste felett, akkor

$$s^2 + ps + q = (s-a)^2 + b^2,$$

ahol

$$a = -p/2 \text{ és } b^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0.$$

Jegyezzük meg, hogy $a \pm bi$ a karakterisztikus polinom két (konjugált) komplex gyöke. Mivel a Laplace transzformált

$$Y(s) = A\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} + B\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

alakba írható, a megoldás

$$y(t) = Ae^{at}\cos(bt) + Be^{at}\sin(bt),$$

ahol A és B a kezdeti feltételek által meghatározott konstansok. Esetünkben

$$A = y(0) \text{ és } B = \frac{y'(0) - ay(0)}{b}.$$

11. Feladat. Diszkutálja az egybeeső, és a különböző valós gyökök esetét.

Útmutatás: ha a karakterisztikus polinomnak egybeeső valós gyökei vannak (egy valós gyök kétszeres multiplicitással), akkor

$$s^2 + ps + q = (s-a)^2,$$

ahol

$$a = -p/2 \;\text{ és }\; b^2 = q - \frac{p^2}{4} = 0.$$

Következésképpen

$$Y(s) = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{(s-a)^2}$$

írható és a megoldás

$$y(t) = Ae^{at} + Bte^{at},$$

ahol A és B a kezdeti feltételek által meghatározott konstansok. Ha két különböző valós gyök lép fel, akkor a karakterisztikus polinom gyöktényezős alakja

$$s^2 + ps + q = (s-r_1)(s-r_2).$$

Következésképpen

$$Y(s) = \frac{A}{s-r_1} + \frac{B}{s-r_2},$$

írható és a megoldás

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t},$$

ahol A és B a kezdeti feltételek által meghatározott konstansok.

12. Feladat. Oldja meg az $y''(t) - 2y'(t) + 3y(t) = e^t$ másodrendű, állandó együtthatós, inhomogén differenciálegyenletet az $y(0) = y'(0) = 0$ kezdeti feltételek mellett.

Útmutatás: véve mindkét oldal Laplace transzformáltját

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2-2s+3)},$$

ahol $s^2 - 2s + 3 = (s-1)^2 + 2$ a valós számtest felett irreducibilis polinom. A parciális törtekre bontás formulája tehát

$$\frac{1}{(s-1)(s^2-2s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2-2s+3} = \frac{(A+B)s^2 + (C-2A-B)s + 3A - C}{(s-1)(s^2-2s+3)},$$

$$A + B = 0, \quad C - 2A - B = 0, \quad 3A - C = 1,$$

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2},$$

ahonnan

$$Y(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{s-1}{(s-1)^2+2} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^t\cos(\sqrt{2}t).$$

Hivatkozások

[1] Szőkefalvi - Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok, Polygon Kiadó, Szeged, 2002.

[2] M. J. Lighthill: An introduction to Fourier analysis and generalized functions, Cambridge University Press, 1962.

[3] Vincze Csaba: Komplex függvénytan, kézirat, 2023.