Komplex függvénytan
Matematika 3, Villamosmérnök BSc

Vincze Csaba

Debreceni Egyetem

2023. szeptember 19.

Tartalomjegyzék

1. Komplex számok

1.1. Bevezetés

Jelölje $\mathbb{N}$ a természetes számok, $\mathbb{Z}$ az egész számok, $\mathbb{Q}$ pedig a racionális számok halmazát. Irracionális számra $\sqrt{2}$ a klasszikus példa. Másképp fogalmazva: az $x^2 - 2 = 0$ egyenletnek nincs racionális gyöke. Indirekte tegyük fel ugyanis, hogy a $\sqrt{2}$ felírható az m és n egészek hányadosaként.

Négyzetre emeléssel $m^2 = 2n^2$, ahol a jobb oldal prímbontásában a 2 páratlan, míg a bal oldalon páros kitevővel áll. Mivel a prímtényezős felbontás (sorrendtől eltekintve) egyértelműen meghatározott, ez nyilvánvalóan ellentmondás. A bizonyítás elve hasonló bármely prímszám gyöke esetén.

Az irracionális számokat racionális számsorozatok határértékeként foghatjuk fel. A $\sqrt{2}$ - höz konvergáló racionális számsorozatot pl. a következőképpen konstruálhatunk.

- Mivel $1 < \sqrt{2} < 2$, legyen $x_1 := \frac{1+2}{2} = 3/2$, azaz a befoglaló intervallum középpontja.
- Állapítsuk meg a nagyságrendi viszonyt $\sqrt{2}$ és $3/2$ között négyzetre emeléssel: $\sqrt{2} < 3/2$.
- Mivel $1 < \sqrt{2} < 3/2$, legyen $x_2 := \frac{1+(3/2)}{2} = 5/4$, azaz a befoglaló intervallum középpontja.
- Állapítsuk meg a nagyságrendi viszonyt $\sqrt{2}$ és $5/4$ között négyzetre emeléssel: $\sqrt{2} > 5/4$.
- Mivel $5/4 < \sqrt{2} < 3/2$, legyen $x_3 := \frac{(5/4)+(3/2)}{2} = 11/8$, azaz a befoglaló intervallum középpontja.

A becslés hibája az intervallum

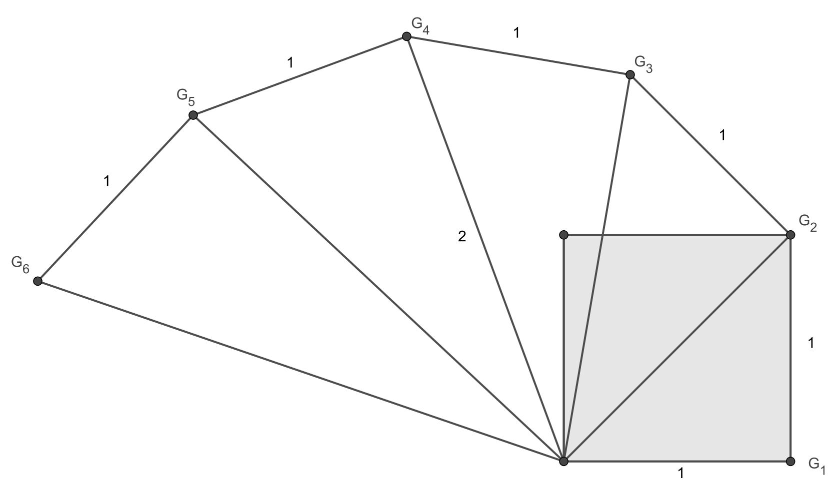
$$\frac{3}{2} - \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$$

hosszának fele, hiszen x_3 a felezőpont:

$$|x_3 - \sqrt{2}| < 1/8 = 1/2^3.$$

Az eljárást folytatva, az x_n racionális szám $1/2^n$ - nél kisebb hibával közelíti a $\sqrt{2}$ értékét.

1. Feladat. Igazolja, hogy az 1. Ábrán szereplő négyzet bal csúcsától a G_n pontig futó szakasz hossza éppen $\sqrt{n}$.



1. ábra. A gyökspirál

Egy további példaként megmutatjuk, hogy az

$$e := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Euler-féle szám irracionális. Indirekte tegyük fel, hogy $e = p/q$ bizonyos p és q pozitív egészek esetén. Mivel

$$q!e = \frac{q!}{0!} + \frac{q!}{1!} + \ldots + \frac{q!}{(q-1)!} + 1 + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!},$$

indirekt feltevésünkre tekintettel $M := \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}$ egész szám. Könnyen látható azonban, hogy

$$\frac{q!}{(q+1)!} = \frac{1}{q+1} \leq \frac{1}{2}, \ \frac{q!}{(q+2)!} = \frac{1}{(q+1)(q+2)} < \frac{1}{4}, \ldots$$

hiszen q pozitív egész. A végtelen mértani sor

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1)$$

összegképlete szerint

$$0 < M = \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

ami nyilván ellentmond annak, hogy M pozitív egész. A $\sqrt{2}$ - vel ellentétben az Euler-féle szám nem gyöke egyetlen (nem azonosan zérus) racionális együtthatós polinomnak sem, azaz a $\sqrt{2}$ algebrai, míg az e nem algebrai szám a racionális számok teste felett. További irracionalitási bizonyítások találhatók a [3] szakirodalomban.

A racionális és irracionális számok uniójaként áll elő az $\mathbb{R}$ valós számtest. Ahhoz azonban, hogy a polinomok mindegyikének legyen gyöke, a számfogalom további kiterjesztésére van szükség, ahogy az $x^2 + 1 = 0$ egyenlet mutatja (nincs valós gyök). A problémát a komplex számok bevezetése oldja meg az algebra alaptétele szerint: minden komplex együtthatós, legalább elsőfokú polinomnak van (komplex) gyöke. Ennek értelmében a polinom fokszámának redukciójával a

$$p(z) = c(z - z_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z - z_k)^{m_k} \tag{1}$$

előállításhoz jutunk, ahol $c \neq 0$, $z_1, \ldots, z_m$ komplex számok és az $m_1 + \ldots + m_k$ összeg a polinom fokával egyenlő. Egy **valós együtthatós** $p(x)$ polinom z_1 **komplex** gyöke esetén a konjugálás műveletének elvégzése mutatja, hogy $\bar{z}_1$ szintén gyöke a polinomnak. Tekintettel arra, hogy

$$(x - z_1)(x - \bar{z}_1) = x^2 - (z_1 + \bar{z}_1)\, x + z_1 \bar{z}_1$$

valós együtthatós másodfokú polinom, az (1) előállítás a

$$p(x) = r(x - r_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x - r_l)^{\alpha_l} \cdot (x^2 + p_{l+1}x + q_{l+1})^{\alpha_{l+1}} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_m x + q_m)^{\alpha_m} \tag{2}$$

alakot ölti, ahol $r \neq 0$, $r_1, \dots, r_l$, $p_{l+1}, \dots, p_m$, $q_{l+1}, \dots, q_m$ valós számok és a másodfokú polinomoknak már nincs valós gyöke, azaz irreducibilisek a valós számtest felett. Ezt az előállítást vesszük alapul racionális törtfüggvények parciális törtekre bontásánál (ld. még racionális törtfüggvények integrálása):

$$\frac{1}{x^3-3x^2+7x-5} = \frac{1}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+5} =$$

$$\frac{(A+C)x^2+(D-C-2A)x+5A-D}{(x-1)(x^2-2x+5)}.$$

Az

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ D-C-2A &= 0 \\ 5A-D &= 1 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert megoldva: $A = 1/4$, $C = -1/4$ és $D = 1/4$, azaz

$$\frac{1}{x^3-3x^2+7x-5} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2-2x+5}\right),$$

ahonnan

$$\int \frac{1}{x^3-3x^2+7x-5}\,dx = \frac{1}{4}\left(\log|x-1| - \frac{1}{2}\log\left(x^2-2x+5\right)\right) + \text{const.}$$

2. Feladat. Oldja meg az $x^2-2x-5=0$ és az $x^2-2x+5=0$ másodfokú egyenleteket a komplex számok halmazán.

1.2. A komplex számsík

Jelölje $\mathbb{C}$ a komplex számok halmazát. A $z \in \mathbb{C}$ komplex szám kanonikus alakja $z = a + bi$, ahol a és b valós számok (valós és képzetes rész), i pedig az ún. képzetes egység, melyre $i^2 = -1$.
$\mathbb{C}$ a valós számtest bővítése, ami - durván szólva - azt jelenti, hogy a valós számok megszokott műveleti tulajdonságai korlátlanul érvényben maradnak a komplex összeadásra és szorzásra nézve is (permanencia-elv): ha $z_1 = a_1 + b_1 i$ és $z_2 = a_2 + b_2 i$, akkor

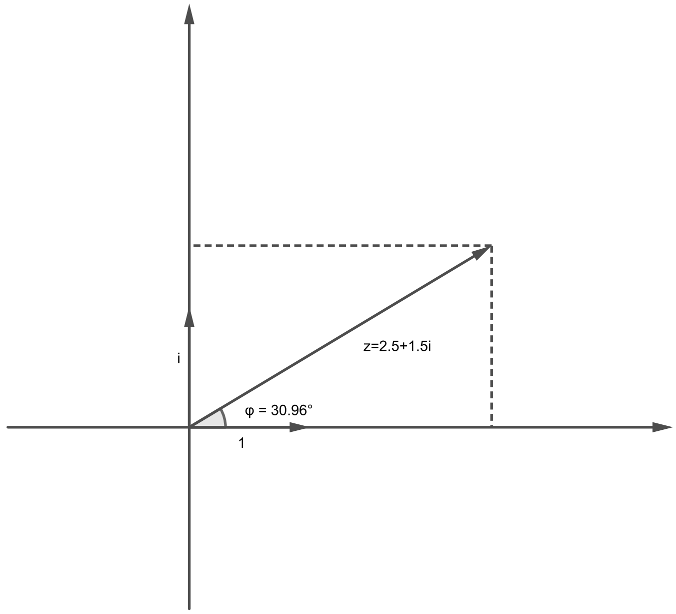
$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i, \quad z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i;$$

számolástechnikai szempontból az egyetlen további szabály a képzetes egységre vonatkozó összefüggés. Az osztás elvégzéséhez az ún. gyöktelenítési eljárásnál is használt technikát hívjuk segítségül:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i}\frac{a_2-b_2 i}{a_2-b_2 i} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{a_2^2+b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2+b_2^2} i.$$

Tömörebb írásmódot és megfogalmazást tesz lehetővé, ha bevezetjük az egyváltozós konjugálás műveletét: $\bar{z} = a - bi$. Könnyen látható, hogy a konjugálás felcserélhető mind az összeadás, mind pedig a szorzás műveletével, továbbá

$$|z|^2 = z\bar{z} = a^2 + b^2 \text{ (Pitagorász tétele, ld. 2. Ábra)} \quad \Rightarrow \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$



2. ábra. A komplex számsík

Geometriai szempontból az összeadás művelete az eltolásnak, a konjugálás művelete pedig a valós tengelyre vonatkozó tükrözésnek felel meg. A komplex számok szorzása mögötti geometriai tartalom felderítéséhez - a Descartes-féle derékszögű koordináták helyett - használjuk a polár koordinátákat:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \Rightarrow \quad a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi,$$

ahol $r = |z|$ a komplex szám hossza, míg φ a valós félegyenessel bezárt pozitív forgásszög. Az ún. trigonometrikus alakban szereplő paraméterek segítségével

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right),$$

hiszen

$$\cos(\varphi_1+\varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2, \quad \sin(\varphi_1+\varphi_2) = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2 \tag{3}$$

(addíciós tételek). Egy rögzített komplex számmal való szorzás tehát forgatva nyújtás az origó körül, ahol a nyújtás aránya a szám hossza, a forgatás szöge pedig a valós félegyenessel bezárt φ szög.

3. Feladat. Írja át a $z = 1 - \sqrt{3}i$ komplex számot trigonometrikus alakba.

Útmutatás. Pitagorász tétele alapján a szám hossza

$$r = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2.$$

A forgásszög meghatározásához az első lépésben ábrázoljuk a számot a komplex síkon: mivel a valós rész pozitív, de a képzetes rész negatív, a negyedik kvadránsban vagyunk. Eltekintve a pozitív forgásszög előállításához szükséges 270° - os fordulattól,

$$\sin\alpha = \frac{1}{2},\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

írható a képzetes tengellyel bezárt α szögre. Ezek bármelyikéből következik, hogy $\alpha = 30°$, hiszen egyelőre csupán egy hegyesszöget keresünk. A teljes forgászszög: $\varphi = 270° + 30° = 300°$. A trigonometrikus alak tehát $z = 2(\cos 300° + i \sin 300°)$. Ekvivalens módon

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right).$$

A hatványozás és a gyökvonás műveletét leíró képletek:

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)), \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right) \quad (k = 0, \dots n-1).$$

A gyökvonás eredménye tehát nem egyetlen szám, hanem egy szám n-es. Tekintettel arra, hogy a képletekben a trigonometrikus függvények periódusa radiánban szerepel, a φ forgásszög is radiánban helyettesítendő (dimenziópróba). Bevezetve az

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

rövidítést, a z komplex szám ún. exponenciális alakja $z = re^{i\varphi}$. Ismételt hivatkozással az addíciós tételekre,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

1. Megjegyzés. (Az osztás, mint geometriai transzformáció) Az exponenciális alak segítségével kifejezve

$$\bar{z} = re^{-i\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{re^{-i\varphi}} = \frac{1}{r}e^{i\varphi} = \frac{1}{r^2}z \quad \text{és} \quad \left|z \cdot \frac{1}{\bar{z}}\right| = 1.$$

A $z \mapsto \dfrac{1}{\bar{z}}$ megfeleltetés tehát az origó középpontú, egységnyi sugarú körre vonatkozó ún. inverzió hozzárendelési szabályának komplex leírása. Ez a transzformáció fontos szerepet játszik a nemeuklideszi geometriában [2] és [4].

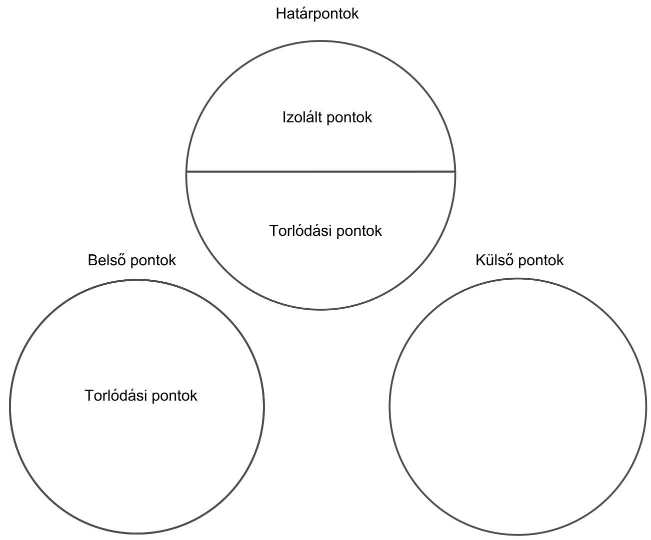
1.3. A komplex számsík topológiája

Legyen $r > 0$ pozitív valós szám és $D_r := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < r\}$, azaz D_r az origó középpontú, r sugarú nyílt körlap (disk). A z középpontú r sugarú nyílt körlap a $z + D_r$ halmaz, azaz a megfelelő origó középpontú nyílt körlap eltoltja. A z és w komplex számok távolsága $d(z, w) := |z - w|$. Nyilvánvaló, hogy $w \in z + D_r$, akkor és csak akkor, ha $w - z \in D_r$, azaz

$$|w - z| < r \quad \Rightarrow \quad |w - z|^2 < r^2 \quad \Rightarrow \quad (x - u)^2 + (y - v)^2 < 1,$$

ahol $z = u + vi$, $w = x + yi$. A következőkben a sík pontjainak helyzetét írjuk le egy adott halmazhoz viszonyítva. A legegyszerűbb halmazelméleti osztályozás szerint bármely pont "eleme", vagy "nem eleme" a halmaznak. Ennél finomabb fogalmi rendszerrel dolgozik a topológia.

1. Definíció. *Legyen $E \subset \mathbb{C}$ a komplex számsík részhalmaza. Azt mondjuk, hogy z belső pontja az E - nek, ha van olyan $r > 0$ pozitív szám, melyre $z + D_r \subset E$, azaz a z pontot egy nyílt környezetével együtt tartalmazza a halmaz. Külső ponton a halmaz komplementerének belső pontját értjük, azaz van olyan $r > 0$ pozitív szám, melyre $z + D_r \cap E = \emptyset$. A se nem belső, se nem külső pontokat határpontoknak nevezzük.*



3. ábra. Topológiai alapfogalmak

4. Feladat. Igazolja, hogy z pontosan akkor határpont, ha bármely $r > 0$ esetén a $z + D_r$ nyílt körlapnak van közös eleme E - vel és a komplementerével is.

2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy z torlódási pontja E - nek, ha bármely $r > 0$ esetén $z+D_r$ tartalmaz z - től különböző E - beli pontot, azaz z approximálható nem triviális E - beli sorozattal.*

5. Feladat. Igazolja, hogy ha z határpont, de nem torlódási pont, akkor van olyan $r > 0$ pozitív szám, melyre $z+D_r \cap E = \{z\}$. Az ilyen tulajdonságú pontokat a halmaz izolált pontjainak nevezzük.

1. Példa. *A valós számok testében az irracionális elemek a racionális számok halmazának torlódási pontjai.*

3. Definíció. *Az $E \subset \mathbb{C}$ halmaz nyílt, ha minden pontja belső pont. Zárt, ha a komplementere nyílt.*

1. Lemma. *Egy halmaz pontosan akkor zárt, ha tartalmazza az összes torlódási pontját.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy E zárt és z torlódási pontja E - nek. Ha $z \notin E$, akkor E komplementerében van, mely - E zártságára tekintettel - nyílt halmaz. Ennélfogva z a komplementernek belső, az E halmaznak tehát külső és nem torlódási pontja, ami ellentmondás. Megfordítva, ha az összes torlódási pont eleme E - nek, akkor a komplementer pontjai nem approximálhatók E - beli sorozatokkal, azaz bármely $z \notin E$ esetén van olyan $r > 0$ pozitív szám, melyre $z + D_r \cap E = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy a komplementer minden pontja belső pont. A komplementer tehát nyílt halmaz, s ennélfogva E zárt. $\square$

4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy $A, B \subset \mathbb{C}$ szeparálható halmazok, ha megadhatók diszjunkt X és Y nyílt halmazok úgy, hogy $A \subset X$ és $B \subset Y$. Az $E \subset \mathbb{C}$ halmaz összefüggő, ha nem áll elő nemüres, szeparálható A és B részhalmazainak uniójaként. Az E halmaz ívszerűen összefüggő, ha bármely két pontja összeköthető E - ben haladó folytonos ívvel.*

2. Lemma. *Ha E ívszerűen összefüggő, akkor összefüggő.*

Bizonyítás. Indirekte tegyük fel, hogy E nem összefüggő, azaz előáll nemüres, szeparálható A és B részhalmazainak uniójaként. Ellentmondást kapunk, ha megmutatjuk, hogy $z \in A$ és $w \in B$ nem köthető össze E - ben haladó folytonos ívvel. Tegyük fel, hogy $\gamma\colon [0,1] \to E \subset \mathbb{C}$ folytonos ív, $\gamma(0) = z$ és $\gamma(1) = w$. Mivel $\gamma(0) \in A \subset X$, ezért van olyan $\varepsilon > 0$ pozitív szám, melyre $\gamma(0)+D_\varepsilon \subset X$, hiszen X nyílt halmaz. A folytonosság miatt azonban megadható olyan $\delta > 0$ pozitív szám, hogy $\gamma(t) \in \gamma(0) + D_\varepsilon \subset X$, azaz $|\gamma(t) - \gamma(0)| < \varepsilon$, feltéve, hogy $0 \leq t < \delta \leq 1$. Legyen

$$s^* := \sup\{s \in [0,1] \mid \gamma(t) \in X, t \in [0,s]\}.$$

Tekintettel arra, hogy a görbe az E halmazban halad és $E \subset X \cup Y$, két eset lehetséges. Ha $\gamma(s^*) \in X$, akkor folytonossági érveléssel $s^* + \delta^*$ alakú felső korlát létezése igazolható, ami ellentmondás. Ha pedig $\gamma(s^*) \in Y$, akkor $s^* - \delta^*$ alakú felső korlát létezése igazolható, ami szintén ellentmond az s^* választásának. $\square$

2. Megjegyzés. A lemma megfordítása általában nem igaz. A standard ellenpélda az

$$E = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x} \right) \mid x \in \mathbb{R}^+ \right\} \cup \{(0,y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

halmaz a síkon.

3. Lemma. *Ha $E \subset \mathbb{C}$ összefüggő nyílt halmaz, akkor ívszerűen is összefüggő.*

Bizonyítás. Ha $E = \emptyset$, akkor nincs mit bizonyítanunk. Az $E \neq \emptyset$ esetben legyen $z \in E$ rögzített és tekintsük azon $w \in E$ pontok $P(z)$ halmazát, melyeket folytonos E - beli ív köt össze z - vel. Megfelelően választott $r > 0$ pozitív szám esetén a $z + D_r \subset E$ halmaz pontjai nyílván ilyenek (emlékeztetünk rá, hogy nyílt halmazról van szó). Sőt, ha sikerült a w pontba eljutnunk, akkor a halmaz nyíltságát ismételten felhasználva, folytathatjuk az ívet w egy nyílt környezetén belül. Ez azt jelenti, hogy $P(z)$ nyílt. Ha azonban w - be nem juthatunk el z - ből folytonos E - beli ív mentén, akkor nem juthatunk el w egy $r > 0$ sugarú környezetének egyetlen pontjába sem, hiszen onnan befejezhetnénk az ívet. Ez viszont azt jelenti, hogy a z - ből folytonos E - beli ívvel nem elérhető pontok halmaza ugyancsak nyílt. Mivel E összefüggő, a $P(z)$ és az $E \setminus P(z)$ (diszjunkt, nyílt és ezért szeparálható) halmazok közül az egyik üres. Nyilvánvalóan $E \setminus P(z) = \emptyset$ és $P(z) = E$. Két tetszőleges E - beli pontot pedig a rögzített z ponton keresztül köthetünk össze egymással. $\square$

2. Határérték

Határérték $\to$ sorozatok $\to$ sorok (részletösszegek)

$\downarrow$

függvénysorozatok $\to$ függvénysorok (pontonkénti és egyenletes konvergencia)

$\downarrow$

hatványsorok (konvergenciasugár)

Függvények határértéke és folytonossága $\to$ differenciálhatóság

2.1. Sorozatok, sorok

5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a komplex számokból álló z_n sorozat konvergens és határértéke z, ha bármely $\varepsilon > 0$ pozitív szám esetén $|z_n - z| < \varepsilon$ teljesül véges sok indextől eltekintve. Van tehát egy N küszöbindex úgy, hogy $|z_n - z| < \varepsilon \quad (n > N)$. Jelölés: $\lim_{n\to\infty} z_n = z$.*

3. Megjegyzés. Jóllehet az N küszöbindex függ az ε megválasztásától, ezt - szokásos pongyolasággal - nem jelöljük.

4. Lemma. *A komplex számokból álló $z_n = x_n + y_n i$ sorozat konvergens és határértéke $z = x + yi$ akkor és csak akkor, ha az x_n és az y_n sorozatok konvergensek és határértékük rendre x és y.*

A lemma állítása következik a

$$\max\{|x_n - x|, |y_n - y|\} \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

becslésekből - utóbbi az ún. háromszög-egyenlőtlenség. A határérték műveletekkel való kapcsolatát illetően teljesülnek az alábbiak: ha $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ és $\lim_{n\to\infty} w_n = w$, akkor

$$z_n \pm w_n \to z \pm w, \quad z_n w_n \to zw, \quad \frac{z_n}{w_n} \to \frac{z}{w},$$

utóbbi esetben feltételezve, hogy $w \neq 0$, ami azt is jelenti, hogy véges sok indextől eltekintve a hányados-sorozat értelmes. Például

$$|z_n w_n - zw| \leq |z_n w_n - z w_n| + |z w_n - zw| = |w_n| \cdot |z_n - z| + |z| \cdot |w_n - w|,$$

tekintettel a háromszög-egyenlőtlenségre. Mivel egy konvergens sorozat szükségképpen korlátos, létezik $K > 0$ pozitív valós szám úgy, hogy

$$|z_n w_n - zw| \leq K \cdot |z_n - z| + |z| \cdot |w_n - w|,$$

ahol az egyenlőtlenség jobb oldala tetszőlegesen kicsivé tehető, s ennélfogva ugyanez áll a bal oldalára is véges sok indextől eltekintve. Hasonlóan

$$\left|\frac{z_n}{w_n} - \frac{z}{w}\right| \leq \left|\frac{z_n}{w_n} - \frac{z}{w_n}\right| + \left|\frac{z}{w_n} - \frac{z}{w}\right| = \frac{|w| \cdot |z_n - z| + |z| \cdot |w - w_n|}{|w_n| \cdot |w|}.$$

Mivel véges sok indextől eltekintve $0 < k < |w_n|$, ezért

$$\left|\frac{z_n}{w_n} - \frac{z}{w}\right| \leq \frac{|w| \cdot |z_n - z| + |z| \cdot |w - w_n|}{k \cdot |w|},$$

ahol az egyenlőtlenség jobb oldala tetszőlegesen kicsivé tehető, s ennélfogva ugyanez áll a bal oldalára is véges sok indextől eltekintve. Felmerül a kérdés, hogy a határérték explicit ismerete nélkül, hogyan dönthető el egy sorozat konvergenciája. Erre a célra szolgál az ún. Cauchy-féle tulajdonság. Nyilvánvaló, hogy ha egy sorozat elemei (véges sok indextől eltekintve) közel vannak ugyanahhoz a számhoz (határérték), akkor egymástól sem lehetnek messze, azaz egy konvergens sorozat mindíg ún. Cauchy-sorozat is egyben.

6. Definíció. *Azt mondjuk, hogy z_n Cauchy-sorozat, ha bármely $\varepsilon > 0$ pozitív szám esetén létezik olyan N küszöbindex, hogy $|z_n - z_m| < \varepsilon \quad (m > n > N)$.*

A komplex (illetve valós) számtest teljességi tulajdonsága éppen azt jelenti, hogy a megfordítás is igaz, azaz minden komplex (valós) Cauchy-sorozat konvergens és határértéke egy komplex (valós) szám. Ez nem igaz például racionális számsorozatokra, hiszen minden irracionális szám approximálható racionális számsorozattal. Ez nem a sorozat, hanem a beágyazó tér tulajdonságán múlik. Ha a komplex számsíkot (a valós számegyenest) csupán egyetlen pontjától megfosztjuk, akkor a teljességi tulajdonság is elvész. Ezek az ún. nem teljes metrikus terek. Igaz azonban az is, hogy minden nem teljes metrikus tér teljessé tehető egyfajta lezárási eljárással. Ez szerephez jut az ún. L^2 függvénytér konstrukciójánál. Valós sorozatok esetében a rendezés segítségével bevezetett tulajdonságok alapján is dönthetünk a konvergenciáról. A határérték megállapítása már egy egészen más jellegű probléma:

- monoton növekvő (csökkenő), felülről (alulról) korlátos valós számsorozat határértéke a pontos felső (alsó) korlát (ezek létezését a valós számok axiómarendszere garantálja),
- tegyük fel, hogy a_n és c_n valós, konvergens számsorozatok közös határértékkel; az ún. rendőr-elv szerint, ha $a_n \leq b_n \leq c_n$, akkor b_n ugyancsak konvergens és határértéke megegyezik az a_n és b_n sorozatok közös határértékével.

2. Példa. Megmutatjuk, hogy az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos, azaz konvergens. Ez a nevezetes határérték éppen az Euler-féle szám:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Alkalmazva a mértani és számtani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} < \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1},$$

ahonnan hatványozással

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Hasonlóan

$$\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} < \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+(1/2)+(1/2)}{n+2} = \frac{n+2}{n+2} = 1,$$

ahonnan hatványozással a

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4$$

felső becsléshez jutunk.

3. Példa. Az exponenciális és a polinomiális növekedés összehasonlítása a rendőr-elv alapján: bármely rögzített k pozitív egész esetén

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{2^n} = 0.$$

Valóban, a binomiális tétel szerint $2^n = (1+1)^n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} > \binom{n}{k+1}$, feltéve, hogy n elég nagy. Kapjuk tehát, hogy

$$0 < \frac{n^k}{2^n} < n^k : \binom{n}{k+1} = (k+1)! \frac{n^k}{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k)} \to 0,$$

hiszen a nevező az n változó $(k+1)$ - fokú polinomja. A $k=1$ esetben például

$$\frac{n}{2^n} < n : \binom{n}{2} = 2! \frac{n}{n \cdot (n-1)} \to 0.$$

4. Példa. A faktoriális és az exponenciális növekedés összehasonlítása a rendőr-elv alapján: bármely rögzített k pozitív egész esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{n!} = 0.$$

Valóban,

$$0 < \frac{k^n}{n!} = \frac{k^k}{k!} \frac{k}{k+1} \cdot \ldots \cdot \frac{k}{n},$$

feltéve, hogy n elég nagy. Kapjuk tehát, hogy $0 < \frac{k^n}{n!} < \frac{k^k}{k!} \frac{k}{n} \to 0$. A $k=5$ esetben például

$$\frac{5^n}{n!} = \frac{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5} \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{5}{n} \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{5^n}{n!} < \frac{5^5}{5!} \frac{5}{n} \to 0.$$

7. Definíció. *A z_n sorozatból képzett $\sum z_k$ soron az $s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ részletösszeg-sorozatot értjük. A sor konvergens, ha a részletösszeg-sorozat konvergens. A $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ határérték a sor összege. Jelölés: $s = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$.*

Ha egy sor konvergens, akkor

$$|z_n| = |s_n - s_{n-1}| < \varepsilon$$

véges sok indextől eltekintve - emlékeztetünk rá, hogy s_n konvergens, következésképpen Cauchy-sorozat. Ennek birtokában $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$, ami a belőle képzett sor konvergenciájának szükséges feltétele. A feltétel viszont nem elegendő, ahogy a $z_n = \frac{1}{n}$ sorozatból képzett ún. harmonikus sor esete mutatja: tekintsük a kettő hatványaihoz tartozó részletösszegeket:

$$s_1 = 1,\ s_2 = 1 + \frac{1}{2},\ s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

$$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \ldots$$

Az általános formula:

$$s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \to \infty.$$

8. Definíció. *A* $\sum z_k$ *sor abszolút konvergens, ha a* $\sum |z_k|$ *sor konvergens.*

Mivel $\sum |z_k|$ nemnegatív tagú sor, ezért részletösszegeinek sorozata monoton növekvő. Konvergenciája pedig a korlátossággal igazolható. A következő észrevétel szerint pedig az abszolút konvergencia elegendő feltétele a konvergenciának. A feltétel azonban nem szükséges, ahogyan azt a $\sum (-1)^k \frac{1}{k}$ ún. alternáló sor esete mutatja. Ez konvergens, de nem abszolút konvergens (ld. harmonikus sor).

5. Lemma. *Egy abszolút konvergens sor konvergens.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\sum |z_k|$ sor konvergens, azaz részletösszegeinek $s_n^+ := \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ sorozata konvergens, következésképpen Cauchy-sorozat. Ez azt jelenti, hogy a

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} z_k \right| \le \sum_{k=n+1}^{m} |z_k| = |s_m^+ - s_n^+|$$

becslés bal oldala is tetszőlegesen kicsivé tehető, feltéve, hogy $m > n$ elég nagy indexek. Kapjuk tehát, hogy s_n Cauchy-sorozat, ami a komplex számok teljességére tekintettel maga után vonja, hogy konvergens is. □

A sorok elméletében a legfontosabb szerepet a $\sum z^k$ alakú ún. geometriai sorok játsszák. Tradícionálisan megengedjük a $k = 0$ indexet is a részletösszeg-sorozat képzésénél:

$$s_0 = 1,\ s_1 = 1 + z,\ s_2 = 1 + z + z^2, \ldots,\ s_n = 1 + z + \ldots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \quad (z \neq 1),$$

hiszen

$$(z - 1)s_n = zs_n - s_n = z^{n+1} - 1.$$

A $\sum z^k$ geometriai sor pontosan akkor konvergens, ha $|z| < 1$. Összege pedig

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z}. \tag{4}$$

1. Tétel. (Majoráns kritérium) *Ha a* $\sum w_k$ *sor abszolút konvergens és véges sok indextől eltekintve* $|z_k| \le |w_k|$ *teljesül, akkor a* $\sum z_k$ *sor abszolút konvergens, következésképpen konvergens.*

Bizonyítás. A feltétel nyilvánvalóan biztosítja a $\sum |z_k|$ sor részletösszegeinek korlátosságát. □

Az összehasonlító kritérium két speciális átfogalmazása a Cauchy-féle gyök- és a D' Alambert-féle hányados-kritérium. Mindkét esetben a $\sum w_k$ sor szerepét egy konvergens mértani sor veszi át.

2. Tétel. (Gyök-kritérium) *Ha véges sok indextől eltekintve* $\sqrt[k]{|z_k|} \le q < 1$, *akkor a* $\sum z_k$ *sor abszolút konvergens, következésképpen konvergens.*

Bizonyítás. A $w_k := q^k$ választás mellett hivatkozhatunk a majoráns kritériumra. □

A kritériumot általánosabb formában is kimondhatjuk a limes superior fogalmának segítségével; ennek a fogalomnak a tisztázására azonban majd a hatványsorok konvergencia-sugarának bevezetésekor kerül sor.

3. Tétel. (Hányados-kritérium) *Ha véges sok indextől eltekintve* $\left|\dfrac{z_{k+1}}{z_k}\right| \leq q < 1$, *akkor a* $\sum z_k$ *sor abszolút konvergens, következésképpen konvergens.*

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a feltétel minden $k = 0, 1, \ldots$ indexre teljesül. Indukció segítségével

$$\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| < q \quad \Rightarrow \quad |z_1| \leq |z_0|q, \;\; |z_2| \leq |z_1|q \leq |z_0|q^2, \ldots, |z_k| \leq |z_0|q^k, \ldots.$$

A $w_k := z_0 q^k$ választás mellett hivatkozhatunk a majoráns kritériumra. □

5. Példa. Felhasználva, hogy

$$\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1},$$

könnyen látható, hogy a $\sum \dfrac{2}{k(k+1)}$ sor részletösszege

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = 2 - \frac{2}{n+1} \to 2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)} = 2.$$

Mivel

$$1 \leq k \quad \Rightarrow \quad k+1 \leq 2k \quad \Rightarrow \quad k^2 + k \leq 2k^2 \quad \Rightarrow \quad k(k+1) \leq 2k^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)},$$

a majoráns kritérium szerint létezik a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ összeg is.

6. Feladat. Igazolja, hogy bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén a $\sum \dfrac{z^k}{k!}$ sor konvergens.

Megoldás. A $z = 0$ esetben az állítás nyilvánvaló. Egyébként pedig alkalmazzuk a hányados-kritériumot:

$$\left|\frac{z^{k+1} : (k+1)!}{z^k : k!}\right| = \frac{|z|}{k+1} \leq q < 1.$$

Mivel a hányados nullához tart $k \to \infty$ esetén, alkalmas felső korlát választása nyilvánvalóan lehetséges (véges sok indextől eltekintve): pl. ha $q = 1/2$, akkor a küszöbérték $2|z| - 1 < k$. A hányados-kritérium szerint tehát a sor abszolút konvergens, következésképpen konvergens.

Az eredmény birtokában bevezetjük a komplex exponenciális, szinusz, koszinusz és hiperbolikus függvényeket.

9. Definíció.

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

A képletek alapján $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ (v.ö. a komplex számok exponenciális alakja).

2.2. Függvénysorozatok, függvénysorok

Sorozatokat, sorokat nem csupán számokból képezhetünk. A továbbiakban függvénysorozatokkal és részletösszegeik sorozatával, azaz függvénysorokkal foglalkozunk. Tekintsünk egy $f\colon G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényt és legyen w az értelmezési tartomány torlódási pontja. Az átviteli elv szerint az f függvény határértéke a w pontban a $W \in \mathbb{C}$ szám, ha bármely G - beli $z_n \to w$ sorozat esetén $f(z_n) \to W$. Jelölés: $\lim_{z\to w} f(z) = W$.

Jegyezzük meg, hogy egy torlódási pont nem feltétlenül eleme az illető halmaznak. Ha azonban $w \in G$, akkor w vagy torlódási pontja a G - nek (hiszen a belső pontok is torlódási pontok), vagy izolált pontja (ld. 5. Feladat). Azt mondjuk, hogy f folytonos az értelmezési tartománya $w \in G$ pontjában, ha a w - beli határértéke a helyettesítési érték: $\lim_{z\to w} f(z) = f(w)$, feltéve, hogy $w \in G$ torlódási pont. Értelmezési tartománya izolált pontjaiban a függvény automatikusan folytonos.

10. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f_n\colon G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvénysorozat pontonként konvergens, ha bármely $z \in G$ esetén a helyettesítési értékek $f_n(z)$ sorozata konvergens. Az $f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ függvényt a függvénysorozat határfüggvényének nevezzük. Egy pontonként konvergens függvénysorozat egyenletesen konvergál a határfüggvényéhez a G halmazon, ha bármely $\varepsilon > 0$ pozitív szám esetén $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ $(z \in G)$ véges sok indextől eltekintve. Van tehát egy N küszöbindex úgy, hogy*

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad (z \in G,\ n > N).$$

Fontos látnunk a pontonkénti és az egyenletes konvergencia közötti különbséget: egyenletes konvergencia esetén a küszöbindex csak és kizárólag ε - tól függ, a kiértékelés helyétől nem. Pontonkénti konvergencia esetén tehát a küszöbindex $N(\varepsilon, z)$, egyenletes konvergencia esetén pedig $N(\varepsilon)$ függést mutat. A formális különbség tartalmi vonatkozásait illetően látni fogjuk, hogy a pontonkénti konvergencia valójában nem örökíti a függvénysorozat tagjainak (függvénytani) tulajdonságait (folytonosság, differenciálhatóság stb.) a határfüggvényre még a legegyszerűbb esetben sem. Az egyenletes konvergencia segítségével azonban a határfüggvény tulajdonságaira is következtethetünk.

4. Tétel. *Folytonos függvények egyenletesen konvergens sorozatának határfüggvénye folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $f_n\colon G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ folytonos függvények egyenletesen konvergens sorozata és $f\colon G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a határfüggvény. Ekkor

$$|f(z) - f(w)| = |f(z) - f_n(z) + f_n(z) - f_n(w) + f_n(w) - f(w)| \leq$$

$$|f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(w)| + |f_n(w) - f(w)|,$$

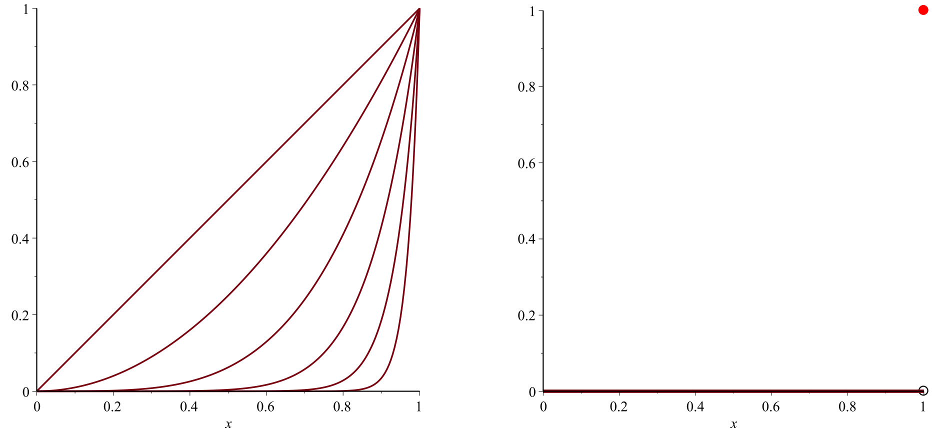
ahol az első és a harmadik tag tetszőlegesen kicsivé tehető, ha n elég nagy (egyenletes konvergencia): tegyük fel, hogy $\varepsilon > 0$ adott és tekintsünk egy elegendően nagy (a továbbiakban rögzített) n indexet úgy, hogy

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon/3, \quad |f_n(w) - f(w)| < \varepsilon/3.$$

A középső tag becsléséhez használjuk ki az f_n függvény folytonosságát w - ben: van olyan $\delta_n > 0$ pozitív szám, hogy

$$|f_n(z) - f_n(w)| < \varepsilon/3, \quad \text{feltéve, hogy} \quad |z - w| < \delta_n.$$

Ez azt jelenti, hogy $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$, feltéve, hogy $|z - w| < \delta_n$, azaz a határfüggvény folytonos a $w \in G$ pontban. $\square$



4. ábra. A polinomsorozat és határfüggvénye

6. Példa. Tekintsük az $f_n\colon [0,1] \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_n(x) := x^n$ függvénysorozatot. Könnyen látható, hogy a határfüggvény $f(x) = 0$, ha $0 \le x < 1$ és $f(1) = 1$. Mivel a határfüggvény nem folytonos, ezért az előző tétel értelmében a sorozat pontonként igen, de egyenletesen nem konvergens; ld. 4. Ábra.

Az egyenletes konvergencia nem csupán a folytonosságot örökíti. Néhány - a továbbiak szempontjából - fontos következménye az $f_n \to f$ egyenletes konvergenciának:

(i) integrálható függvények egyenletesen konvergens sorozata esetén $\int f_n \to \int f$,

(ii) ha a differenciálható függvényekből álló f_n függvénysorozat és a deriváltfüggvények f_n' sorozata is egyenletesen konvergens, akkor az f határfüggvény differenciálható és $f_n' \to f'$.

Függvénysorozatokból ugyanolyan módon képezhetünk függvénysorokat, mint a számsorozatokból sorokat. A $\sum f_k$ függvénysor alatt az

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

részletösszeg-sorozatot értjük. A függvénysor pontonként konvergens, illetve egyenletesen konvergens, ha a részletösszeg-sorozat pontonként, illetve egyenletesen konvergens. Az $s := \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ függvényt a sor összegfüggvényének nevezzük. Jelölés $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$. Az egyenletes konvergencia (i) és (ii) következményét az $s_n \to s$ határátmenetre alkalmazva:

(i) (tagonkénti integrálhatóság) ha az integrálható függvényekből képzett $\sum f_k$ függvénysor egyenletesen konvergens, akkor

$$\int s_n \to \int s \quad \Rightarrow \quad \int \sum_{k=1}^{n} f_k = \sum_{k=1}^{n} \int f_k \to \int \sum_{k=1}^{\infty} f_k,$$

azaz $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \int f_k = \int \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$

(ii) (tagonkénti differenciálhatóság) ha a differenciálható függvényekből képzett $\sum f_k$ sor és $\sum f_k'$ deriváltsora is egyenletesen konvergens, akkor az s összegfüggvény differenciálható és

$$s_n' \to s' \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{n} f_k' \to \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)',$$

azaz $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)'$.

Szemléletesen szólva, a véges összegekre vonatkozó differenciálási és integrálási szabályokat az egyenletes konvergencia örökíti át "végtelen összegekre".

2.3. Hatványsorok

Hatványsoron $\sum c_k(z-z_0)^k$ alakú függvénysort értünk. Tradícionálisan megengedjük a $k=0$ indexet is a részletösszeg-sorozat képzésénél. Nyilvánvaló, hogy $z=z_0$ helyettesítéssel konvergens sort kapunk. A következőkben arra keressük a választ, hogy a z_0 pont mekkora sugarú környezete engedi meg a konvergens helyettesítést. Alkalmazzuk a Cauchy-féle gyök-kritériumot

$$\sqrt[k]{|c_k(z-z_0)^k|} \le q < 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[k]{|c_k|}|z-z_0| \le q < 1.$$

Mivel az egyenlőtlenségnek véges sok indextől eltekintve kell teljesülnie és $|z-z_0|$ konstans rögzített $z \in \mathbb{C}$ esetén, a $\sqrt[k]{|c_k|}$ sorozat torlódási pontjaira kell koncentrálnunk, melyek tetszőleges környezetében végtelen sok eleme található a sorozatnak. Két esetet különböztetünk meg:

- ha a $\sqrt[k]{|c_k|}$ sorozat nem korlátos, akkor nyilvánvalóan nem teljesíthető a gyök-kritérium követelménye egyetlen $z \neq z_0$ esetén sem. Ebben az esetben az R ún. konvergenciasugár zérus,
- ha a sorozat korlátos, akkor tekintsük torlódási pontjainak pontos felső korlátját:

$$T := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} < \infty.$$

  Mivel nemnegatív tagú sorozatról van szó, $T=0$ ekvivalens a $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0$ feltétellel. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az R ún. konvergenciasugár végtelen. Ha pedig $T>0$, akkor az $R := \dfrac{1}{T}$ számot nevezzük a hatványsor konvergenciasugarának.

A konvergenciasugár fogalmának segítségével megadhatjuk a hatványsor konvergenciájának egy elegendő feltételét.

5. Tétel. *Ha a $\sum c_k(z-z_0)^k$ hatványsor konvergenciasugara $R>0$, akkor a sor konvergens bármely $z \in z_0 + D_R$ esetén. Ha $R=0$, akkor a sor csak $z=z_0$ esetén konvergens.*

A konvergenciasugár birtokában a hatványsor egyenletes konvergenciájára is következtethetünk.

6. Tétel. *Ha a $\sum c_k(z-z_0)^k$ hatványsor konvergenciasugara $R>0$, akkor a sor egyenletesen konvergens bármely $z_0 + D_r$ körlapon, ahol $r<R$.*

Az egyenletes konvergencia annak a következménye, hogy a majoráló geometriai sor q kvóciense nem függ a $z \in z_0 + D_r$ pont választásától[1]: véges sok indextől eltekintve ugyanis

$$\sqrt[k]{|c_k|}|z - z_0| < r \sqrt[k]{|c_k|} < r(T + \varepsilon),$$

ahol $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsi pozitív szám. A bizonyítás teljes, ha megmutatjuk, hogy az $r(T + x) < 1$ egyenlőtlenségnek van pozitív megoldása. Ez $T = 0$ esetén nyilvánvaló: $0 < x < 1/r$. Ha pedig $T > 0$, akkor a $T = \dfrac{1}{R}$ összefüggést felhasználva $0 < x < \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R}$, ahol $r < R$ miatt a felső becslés élesen pozitív.

7. Tétel. *A $\sum c_k(z - z_0)^k$ hatványsor és a $\sum kc_k(z - z_0)^{k-1}$ deriváltsor konvergenciasugara megegyezik.*

Nyilvánvaló, hogy a $\sum kc_k(z - z_0)^{k-1}$ sor pontosan akkor konvergens, ha a

$$(z - z_0) \sum kc_k(z - z_0)^{k-1} = \sum kc_k(z - z_0)^k$$

sor konvergens. A bizonyítás tehát azon múlik, hogy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Egyfelől vegyük észre, hogy a sorozat monoton csökken véges sok indextől eltekintve:

$$\sqrt[n+1]{n + 1} < \sqrt[n]{n},$$

ugyanis $n(n + 1)$ - dik hatványra emelve

$$(n + 1)^n < n^{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n,$$

ami $n = 4$ - től teljesül a 2. Példa alapján. Az 1 - nél nagyobb alsó korlát létezését pedig kizárja a polinomiális és az exponenciális növekedés összehasonlítása (3. Példa). Közvetlenül kapjuk ugyanezt az eredményt a

$$\lim_{x\to\infty} \log x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

határérték felhasználásával, ahol az utolsó lépésben a L' Hospital szabályra hivatkozunk. A tételek szukcesszív alkalmazásával kapjuk, hogy egy hatványsor összegfüggvénye a konvergenciatartomány belső pontjaiban tetszőleges sokszor differenciálható. Ha a sorfejtés a z_0 pont körüli, akkor tagonkénti differenciálással látható, hogy

$$c_0 = f(z_0),\ c_1 = f'(z_0), \ldots , c_k = \frac{f^k(z_0)}{k!}, \ldots$$

azaz a konvergenciatartomány belső pontjaira $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$, ahol $f^0(z_0) := f(z_0)$ és $0! := 1$.

[1]Ez az ún. Weierstrass-féle majoráns teszt speciális esete: ha bármely $z \in G$ esetén $|f_k(z)| \le M_k$ és $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$, akkor a $\sum f_k$ függvénysor egyenletesen konvergens. Figyelembe véve ugyanis, hogy a $\sum M_k$ sor részletösszegeinek sorozata Cauchy-sorozat,

$$|s_m(z) - s_n(z)| \le \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(z) \right| \le \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(z)| \le \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon,$$

feltéve, hogy az $m > n$ indexeket elegendően nagyra választottuk.

7. Feladat. Számítsa ki a $\sum \frac{z^k}{k!}$ hatványsor konvergenciasugarát.

Megoldás. Igazolható, hogy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$. Egyfelől vegyük észre, hogy a sorozat monoton nő:

$$\sqrt[n+1]{(n+1)!} > \sqrt[n]{n!},$$

ugyanis $n(n+1)$ - dik hatványra emelve

$$(n+1)!^n > n!^{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)^n > n!,$$

ami nyilvánvaló. Felső korlát létezését viszont kizárja az exponenciális és a faktoriális növekedés összehasonlítása (4. Példa).

Ennélfogva $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} = 0$, ami azt jelenti, hogy a konvergenciasugár végtelen. Kapjuk tehát, hogy e^z hatványsora tagonként differenciálható bármely pontban:

$$e^{z\prime} = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\right)' = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = e^z.$$

8. Feladat. Igazolja, hogy

$$\sin'(z) = \cos z,\ \cos'(z) = -\sin z,\ \sinh'(z) = \cosh z,\ \cosh'(z) = \sinh z.$$

Jóllehet a differenciálást formálisan végeztük el, hiszen eddig még nem volt szó komplex változós függvények deriváltjáról, a következő fejezetben látni fogjuk, hogy a differenciahányados határértékeként, formális analogonja a valós függvények deriváltjának.

3. Differenciálás és görbementi integrál

Legyen $G \subset \mathbb{C}$ egy összefüggő, nyílt halmaz, azaz egy ún. tartomány.

11. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f\colon G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függyvény differenciálható a $z_0 \in G$ pontban, ha létezik az*

$$f'(z_0) := \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

határérték. Az f függvény holomorf z_0 - ban, ha differenciálható a z_0 pont egy nyílt környezetének pontjaiban. A függvény holomorf, ha értelmezési tartománya minden pontjában differenciálható.

3.1. A Cauchy-Riemann egyenletek

Tekinsük az $f\colon G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényt és interpretáljuk a komplex számsík elemeit, mint pontokat az euklideszi síkon. Ekkor

$$f(x, y) = u(x, y) + v(x, y)i$$

írható, bizonyos $u, v\colon G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ függvények segítségével. Ha f differenciálható a $z_0 = x_0 + y_0 i$ pontban, akkor a koordinátatengelyek menti határátmeneteket véve:

$$f'(z_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} i =$$

$$u_x(x_0,y_0)+v_x(x_0,y_0)i,$$

$$f'(z_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{(y-y_0)i}=\lim_{y\to y_0}\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{(y-y_0)i}+\lim_{y\to y_0}\frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{(y-y_0)i}i=$$

$$\frac{u_y(x_0,y_0)}{i}+v_y(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)-u_y(x_0,y_0)i,$$

ahol u_x, u_y, v_x, v_y a megfelelő változó szerinti parciális deriváltakat jelölik. Összevetve az egyenletek jobb oldalán álló kifejezéseket, az ún. Cauchy-Riemann egyenleteket kapjuk:

$$u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0) \;\text{ és }\; u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0). \tag{5}$$

A Cauchy-Riemann egyenletek teljesülése önmagában azonban nem vonja maga után a differenciálhatóságot, hiszen csak a koordinátatengelyek mentén vett határértékek egyenlőségét biztosítja. Szükségünk van a parciális deriváltfüggvények folytonosságára is, hogy a tetszőleges $z\to z_0$ határátmenetet a koordinátatengelyek mentén vett határátmenetekkel kontrollálni tudjuk.

8. Tétel. *Ha az $u, v\colon G\subset\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ függvények parciálisan differenciálhatók a z_0 pont egy nyílt környezetének pontjaiban, a parciális deriváltak folytonosak és teljesítik a Cauchy-Riemann egyenleteket a $z_0\in G$ pontban, akkor az*

$$f(x,y)=u(x,y)+v(x,y)i$$

függvény differenciálható a z_0 - ban.

Bizonyítás. Tekintsük a

$$D(z,z_0):=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-(u_x(x_0,y_0)+v_x(x_0,y_0)i)=$$

$$\frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)+(v(x,y)-v(x_0,y_0))i}{(x-x_0)+(y-y_0)i}-(u_x(x_0,y_0)+v_x(x_0,y_0)i)=$$

$$\frac{V(z,z_0)}{(x-x_0)+(y-y_0)i}+\frac{K(z,z_0)}{(x-x_0)+(y-y_0)i}i$$

differenciafüggvényt, ahol

$$V(z,z_0)=u(x,y)-u(x_0,y_0)-(x-x_0)u_x(x_0,y_0)+(y-y_0)v_x(x_0,y_0),$$

$$K(z,z_0)=v(x,y)-v(x_0,y_0)-(x-x_0)v_x(x_0,y_0)-(y-y_0)u_x(x_0,y_0).$$

Foglalkozzunk a valós résszel; a képzetes rész esete hasonló. Az $u(x,y)$ és az $u(x_0,y_0)$ értékek összevetéséhez szúrjuk be az egyenletbe az $u(x_0,y)$ tagot és alkalmazzuk a valós függvények kalkulusából ismert középértéktételt:

$$\frac{u(x,y)-u(x_0,y)}{x-x_0}=u_x(\alpha,y)\quad\Rightarrow\quad u(x,y)-u(x_0,y)=u_x(\alpha,y)(x-x_0),$$

$$\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{y-y_0}=u_y(x_0,\beta)\quad\Rightarrow u(x_0,y)-u(x_0,y_0)=u_y(x_0,\beta)(y-y_0),$$

ahol α az x és az x_0 közötti, míg β az y és y_0 közötti közbülső érték. Az egyenleteket összeadva

$$u(x,y)-u(x_0,y_0)=u_x(\alpha,y)(x-x_0)+u_y(x_0,\beta)(y-y_0).$$

Következésképpen

$$V(z,z_0) = (x-x_0)(u_x(\alpha,y)-u_x(x_0,y_0)) + (y-y_0)(u_y(x_0,\beta)+v_x(x_0,y_0)) =$$

$$(x-x_0)(u_x(\alpha,y)-u_x(x_0,y_0)) + (y-y_0)(u_y(x_0,\beta)-u_y(x_0,y_0))$$

tekintettel a Cauchy-Riemann egyenletekre. Ebből következik, hogy

$$\lim_{z\to z_0}\frac{V(z,z_0)}{(x-x_0)+i(y-y_0)} = \lim_{z\to z_0}\frac{x-x_0}{(x-x_0)+i(y-y_0)}(u_x(\alpha,y)-u_x(x_0,y_0))+$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{y-y_0}{(x-x_0)+i(y-y_0)}(u_y(x_0,\beta)-u_y(x_0,y_0)) = 0,$$

hiszen

$$\left|\frac{x-x_0}{(x-x_0)+i(y-y_0)}\right| = \frac{|x-x_0|}{|(x-x_0)+i(y-y_0)|} \le 1,$$

$$\left|\frac{y-y_0}{(x-x_0)+i(y-y_0)}\right| = \frac{|y-y_0|}{|(x-x_0)+i(y-y_0)|} \le 1,$$

azaz a hányadosok korlátosak, a parciális deriváltak pedig folytonosak a z_0 pontban:

$$\lim_{z\to z_0} u_x(\alpha,y)-u_x(x_0,y_0)=0, \quad \lim_{z\to z_0} u_y(x_0,\beta)-u_y(x_0,y_0)=0.$$

A képzetes rész eltűnése a $z \to z_0$ határátmenet esetén hasonló átalakítások segítségével látható. Kapjuk tehát, hogy

$$0 = \lim_{z\to z_0} D(z,z_0) \quad\Rightarrow\quad \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = u_x(x_0,y_0)+v_x(x_0,y_0)i,$$

ami a függvény differenciálhatóságát jelenti a z_0 pontban. □

3.2. A Cauchy-féle integráltétel

Legyen $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{C}$ egy folytonosan differenciálható görbe : $\gamma(t) = x(t)+y(t)i$, ahol $x(t)$ és $y(t)$ folytonosan differenciálható valós függvények, $\gamma'(t) = x'(t)+y'(t)i$. Tegyük fel, hogy nem állunk meg és nem is fordulunk vissza a görbe mentén, azaz teljesül a $\gamma'(t)\neq 0$ regularitási feltétel a paramétertartomány bármely belső pontja esetén (befutási irány). Ha γ az $f\colon G\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ függvény értelmezési tartományában halad, az f függvény görbementi integrálját a

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

formula alapján számítjuk ki[2]. Az integrandusban komplex szorzás szerepel. Részletesen kiírva,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b u(x(t),y(t))x'(t)-v(x(t),y(t))y'(t)\,dt + i\int_a^b u(x(t),y(t))y'(t)+v(x(t),y(t))x'(t)\,dt.$$

[2] Az integrál létezése nyilvánvaló pl. folytonos függvények esetén.

A görbementi integrál a görbe irányítástartó átparaméterezésével szemben invariáns (helyettesítéses integrálás tétele), míg ha a befutási irányt megfordítjuk, akkor előjelet vált. Ha a γ görbe szakaszonként folytonosan differenciálható, azaz folytonos és véges sok folytonosan differenciálható ívből áll, akkor

$$\int_\gamma f\, d\gamma = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma_i(t))\gamma_i'(t)\, dt,$$

ahol $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ a paramétertartomány felosztása a töréspontokhoz tartozó értékekkel és részívenként teljesül a regularitási tulajdonság. A görbe zárt, ha $\gamma(a) = \gamma(b)$.

3.2.1. Stokes tétele a síkon

Mielőtt a klasszikus vektoranalízis Stokes-tételét kimondanák, emlékeztetünk a tételben szereplő fogalmakra (vektormező görbementi integrálja, rotáció).

- Tekintsünk egy $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ síkgörbét és tegyük fel, hogy $Im\ c \subset U$, ahol U a koordinátasík összefüggő, nyílt halmaza. Az $X\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vektormező görbementi integrálját a

  $$\int_c X := \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \langle X \circ c_i(t), c_i'(t)\rangle\, dt$$

  képlettel értelmezzük, ahol a paramétertartomány $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ felosztása megfelel a görbe páronként nem átfedő egyszerű ívek egyesítéseként való előállításának. Egyszerű ívekre

  $$\int_c X := \int_a^b \langle X \circ c(t), c'(t)\rangle\, dt.$$

Egy vektormező görbementi integrálja a

$$\langle X \circ c(t), c'(t)\rangle = |X \circ c(t)| \cdot |c'(t)| \cos\angle(X \circ c(t), c'(t))$$

képlet alapján éppen az X vektormező által meghatározott erőtérben elvégzett munka, miközben a görbén végighaladunk.

- Az $X\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vektormező rotációja $\mathrm{rot}\, X := D_1X^2 - D_2X^1$.

Egy vektormező rotációja az

$$M := \begin{bmatrix} D_1X^1 & D_2X^1 \\ D_1X^2 & D_2X^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(M + M^T\right) + \frac{1}{2}\left(M - M^T\right)$$

deriváltmátrix ferdeszimmetrikus részét jellemző skalármennyiség.

9. Feladat. Igazolja, hogy

- ha H_y normáltartomány az y-tengelyre nézve és a határa pozitívan irányított zárt görbe, akkor

  $$\int_{H_y} D_2 f = -\int_c f\, dx,$$

ahol $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ egy folytonosan differenciálható skalármező, $U \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő, nyílt halmaz és a vetületi integrált a görbe mentén a

$$\int_c f\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f \circ c_i(t) x_i'(t)\,dt$$

formula értelmezi. Egyszerű, zárt ív esetén

$$\int_c f\,dx = \int_a^b f \circ c(t) x'(t)\,dt.$$

- ha H_x normáltartomány az x-tengelyre nézve és a határa pozitívan irányított zárt görbe, akkor

$$\int_{H_x} D_1 f = \int_c f\,dy,$$

ahol $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ egy folytonosan differenciálható skalármező, $U \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő, nyílt halmaz és a vetületi integrált a görbe mentén a

$$\int_c f\,dy = \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f \circ c_i(t) y_i'(t)\,dt$$

formula értelmezi. Egyszerű, zárt ív esetén

$$\int_c f\,dy = \int_a^b f \circ c(t) y'(t)\,dt.$$

Legyen

$$H_y = \{(x, y) \mid \alpha(x) \le y \le \beta(x),\ a \le x \le b\}$$

normáltartomány az y-tengelyre nézve, ahol α és β folytonosan differenciálható leképezések. A normáltartomány határának y-tengellyel párhuzamos élein a deriváltvektor első koordinátája zérus, ami azt jelenti, hogy az

$$\int_c f\,dx = \sum_{i=1}^{4} \int_{c_i} f\,dx$$

összegben az y-tengellyel párhuzamos (esetleg elfajuló) élek fölötti vetületi integrál automatikusan zérus. Marad tehát a

$$c^+\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2,\ c^+(t) = (t, \alpha(t))$$

paraméterezéssel adott alsó és a

$$c^-\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2,\ c^-(t) = (t, \beta(t))$$

paraméterezéssel adott felső határgörbe. Tekintettel arra, hogy a H_y tartomány határát pozitívan kell irányítanunk

$$\int_c f\,dx = \int_{c^+} f\,dx - \int_{c^-} f\,dx = \int_a^b f(t, \alpha(t))\,dt - \int_a^b f(t, \beta(t))\,dt =$$

$$-\int_a^b \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} D_2 f = -\int_{H_y} D_2 f,$$

ami bizonyítandó volt. A második eset vizsgálata hasonló.

9. Tétel. (Stokes tétele a síkon) *Legyen* $U \subset \mathbb{R}^2$ *egy összefüggő, nyílt halmaz,* $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *pedig egy folytonosan differenciálható vektormező. Ha* $H \subset U$ *mindkét tengelyre vonatkozóan normáltartomány, melynek pozitívan irányított* c *határgörbéje az* U *tartományban halad, akkor*

$$\int_H rot X = \int_c X.$$

Bizonyítás. Ha H mindkét tengelyre vonatkozóan normáltartomány, akkor

$$\int_H \operatorname{rot} X = \int_H D_1 X^2 - \int_H D_2 X^1 = \int_c X^2\, dy + \int_c X^1\, dx = \int_c X$$

az előző feladat megoldása értelmében. □

A Cauchy-féle integráltétel a Stokes-tétel komplex számsíkra vonatkozó átfogalmazása a rot $X = 0$ feltétel mellett.

10. Tétel. (Cauchy-féle integráltétel) *Legyen* $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *egy folytonosan differenciálható függvény. Ha* $D \subset G$ *mindkét tengelyre nézve normáltartomány, melynek* γ *határgörbéje a* G *tartományban halad, akkor*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Bizonyítás. Bevezetve az $X(x, y) := (u(x, y), -v(x, y))$ és $Y(x, y) := (v(x, y), u(x, y))$ vektormezőket,

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma X + i \int_\gamma Y = 0$$

írható, hiszen a vektormezők rotációja zérus a Cauchy-Riemannn-egyenletek alapján. □

3.3. Az integráltétel általánosításai és alkalmazása (a Riemann-lemma és a potenciálfüggvény)

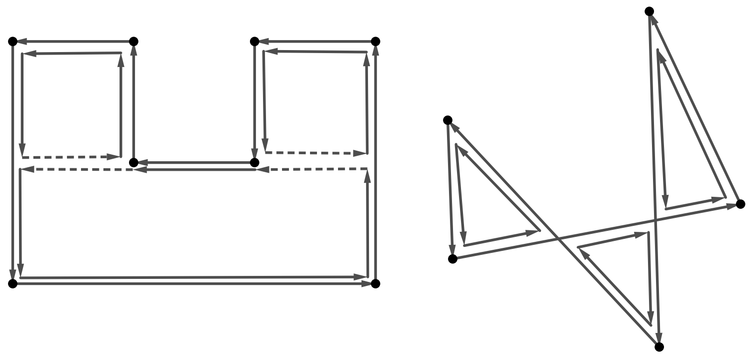
- A bizonyítás érdemi változtatások nélkül átvihető a szakaszonként folytonosan differenciálható határgörbék esetére:

$$\int_a^b \ldots\, dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \ldots\, dt.$$

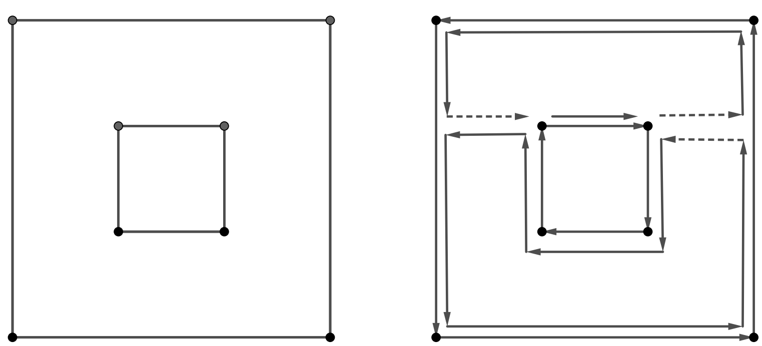
- Érvényben marad az integráltétel akkor is, ha a D tartomány maga nem normáltartomány, de normáltartományokra darabolható, szükség esetén (ld. 5. Ábra) közbülső ívek beiktatásával. A szomszédos tartományok közös ívein ugyanis ellentétes befutással integrálunk, ami az összegzésnél zérust ad.

- Cauchy eredeti bizonyításában is szerepel az $f'(z)$ deriváltfüggvény folytonossága. A folytonossági feltételt nem használó bizonyítást E. Goursat adott 1915-ben [4].

A továbbiakban a gyűrűszerű tartományok esetével foglalkozunk, melyek - szemléletesen szólva - egymásba ágyazott normáltartományok különbségeként foghatók fel a legegyszerűbben; ld. 6. Ábra.



5. ábra. Közbülső ívek



6. ábra. Egymásba ágyazott normáltartományok

Az ábráról leolvasható az is, hogy a Cauchy-féle integráltétel gyűrűszerű tartományokra vonatkozó analogonja

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,dz = \int_{\gamma_b} f(z)\,dz, \tag{6}$$

ahol γ_k a külső, γ_b pedig a belső normáltartomány pozitívan irányított határa. Indukcióval adódik, hogy több, egymásba nem nyúló belső normáltartomány eltávolítása esetén az

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,dz = \int_{\gamma_b^1} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\gamma_b^m} f(z)\,dz \tag{7}$$

formula érvényes, ahol minden szereplő tartomány határa pozitívan irányított. Az integráltétel következő általánosítása B. Riemann doktori értekezésében található [4].

11. Tétel. (Riemann-lemma) *Legyen $g\colon G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ egy a $z_0 \in D$ ponttól eltekintve folytonosan differenciálható függvény, ahol $D \subset G$ mindkét tengelyre vonatkozóan normáltartomány, melynek γ határgörbéje a G tartományban halad. Ha g korlátos a z_0 pont egy nyílt környezetében, akkor*

$$\int_\gamma g(z)\,dz = 0.$$

Bizonyítás. Az integrál eltolásinvarianciája miatt szorítkozhatunk a $z_0 = 0$ esetre. A bizonyítás alapgondolata, hogy izoláljuk a z_0 szingularitást egy elegendően kicsiny r sugarú D_r nyílt körlappal (7. Ábra). Ekkor a $D \setminus D_r$ gyűrűszerű tartomány pozitívan irányított belső határának paraméterezése:

$$C_r\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad C_r(t) := re^{it} \quad \Rightarrow \quad \int_\gamma g(z)\,dz = \int_{C_r} g(z)\,dz = ri\int_0^{2\pi} g(re^{it})e^{it}\,dt$$

a Cauchy-féle integráltétel gyűrűszerű halmazokra vonatkozó (6) verziója szerint. Kapjuk tehát, hogy

$$\left|\int_\gamma g(z)\,dz\right| = r\left|\int_0^{2\pi} g(re^{it})e^{it}\,dt\right| \le r\int_0^{2\pi} \left|g(re^{it})\right|\,dt \le 2r\pi K,$$

ahol K felső korlát a z_0 egy környezetében. Az $r \to 0$ határátmenettel $\int_\gamma g(z)\,dz = 0$ következik. □

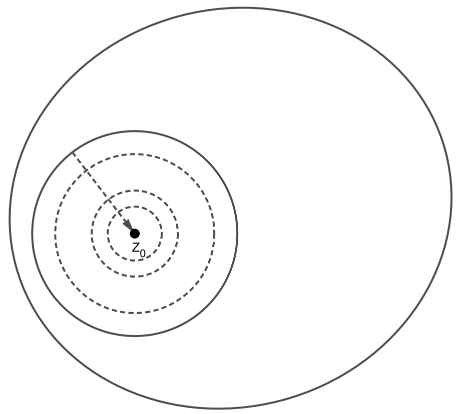
Az integráltétel alkalmazásaként pedig igazoljuk a potenciálfüggvény (primitív függvény) egzisztenciatételét.

12. Tétel. *Ha $f\colon G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ egy folytonosan differenciálható függvény és a G tartomány csillagszerű a z_* pontra nézve, akkor létezik olyan $\Phi\colon G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény, melyre $\Phi'(z) = f(z)$ teljesül bármely $z \in G$ esetén. Következésképpen*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \Phi(\gamma(b)) - \Phi(\gamma(a)).$$

Bizonyítás. Az általánosság sérelme nélkül feltehető, hogy $z_* = 0$. Az írásmunkát egyszerűsítendő, vezessük be a többé-kevésbé értelemszerű

$$\int_{z_1}^{z_2} f(w)\,dw := \int_0^1 f(z_1 + t(z_2 - z_1))(z_2 - z_1)\,dt$$



7. ábra. A Riemann-lemma

jelölést a z_1 - től z_2 felé irányított egyenes szakasz fölötti integrálra és definiáljuk a $\Phi\colon G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényt a

$$\Phi(z) := \int_0^z f(w)\,dw$$

képlettel. Legyen h egy elegendően kicsiny abszolút értékű komplex szám és alkalmazzuk a Cauchy-féle integráltételt a $0 \to z \to z+h \to 0$ zárt háromszögvonalon:

$$\int_0^z f(w)\,dw + \int_z^{z+h} f(w)\,dw + \int_{z+h}^0 f(w)\,dw = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(z) + \int_z^{z+h} f(w)\,dw - \Phi(z+h) = 0,$$

ahonnan

$$\left| \frac{\Phi(z+h) - \Phi(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{\int_z^{z+h} f(w)\,dw - hf(z)}{h} \right| = \left| \frac{\int_z^{z+h} f(w) - f(z)\,dw}{h} \right| =$$

$$\frac{|\int_z^{z+h} f(w) - f(z)\,dw|}{|h|},$$

ahol

$$\left| \int_z^{z+h} f(w) - f(z)\,dw \right| = \left| \int_0^1 (f(z+th) - f(z))\,h\,dt \right| \leq \int_0^1 |f(z+th) - f(z)||h|\,dt \leq \varepsilon |h|$$

és $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsi lehet a $h \to 0$ határátmenet mellett. Kapjuk tehát, hogy

$$\Phi'(z) := \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(z+h) - \Phi(z)}{h} = f(z),$$

ami bizonyítandó volt. $\square$

3.4. A Cauchy-féle integrálformula

Legyen

$$g(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (z \neq z_0), \quad g(z_0) := f'(z_0),$$

ahol $f\colon G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ folytonosan differenciálható függvény. Ennélfogva g a z_0 ponttól eltekintve ugyancsak folytonosan differenciálható, a z_0 - ban pedig folytonos, hiszen az $f'(z_0)$ határérték a differenciahányados-függvény folytonos kiterjesztése. Nyilvánvaló, hogy a folytonosság maga után vonja a függvény korlátosságát a z_0 egy környezetében és alkalmazható a Riemann-lemma:

$$\int_\gamma g(z)\,dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = f(z_0) \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz.$$

A jobb oldalon szereplő integrandusnak a z_0 pont izolált szingularitása, ezért vegyük körül egy r sugarú, z_0 centrumú körlappal és alkalmazzuk az integráltétel gyűrűszerű tartományokra vonatkozó (6) alakját:

$$\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz = \int_{C_r} \frac{1}{z - z_0}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{C_r(t) - z_0} C_r'(t)\,dt,$$

ahol $C_r(t) = z_0 + re^{it}$ a belső határgörbe pozitívan irányított paraméterezése. Kapjuk tehát, hogy

$$\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz = ri \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} e^{it}\,dt = 2\pi i,$$

azaz

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = f(z_0), \tag{8}$$

ami az ún. Cauchy-féle integrálformula. Szemléletes tartalma az, hogy egy folytonosan differenciálható függvénynek a görbe által határolt tartomány pontjaiban felvett értékét a határgörbe mentén felvett értékek egyértelműen meghatározzák.

3.5. A Taylor-féle sorfejtés

13. Tétel. *Legyen $f\colon G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ egy folytonosan differenciálható függvény, $z_0 \in G$. Ha a z_0 körüli $R > 0$ sugarú nyílt körlap a határgörbéjével együtt G - ben fekszik, akkor bármely $z \in z_0 + D_R$ pont esetén az*

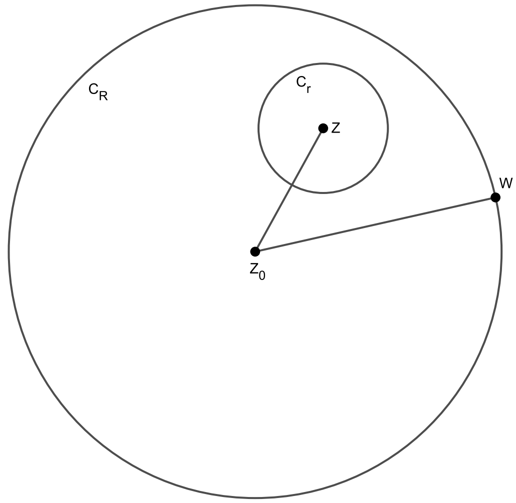
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \tag{9}$$

sorfejtés érvényes, ahol

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\,dw, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Bizonyítás. Legyen $z \in z_0 + D_R$; az $f(z)$ érték kiszámításához használjuk a Cauchy-féle integrálformulát egy z körüli r sugarú C_r körvonalat választva (8. Ábra) úgy, hogy $z + D_r \subset z_0 + D_R$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w - z}\,dw \overset{(6)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(w)}{w - z}\,dw.$$



8. ábra. A Taylor-féle sorfejtés

Mivel

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w-z_0+z_0-z} = \frac{f(w)}{w-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} \quad \text{és} \quad \left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{R} \leq q < 1 \quad (w \in C_R),$$

ezért egyrészt alkalmazható a geometriai sor összegképletére vonatkozó formula, azaz

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k,$$

másrészt pedig a jobb oldali sor részletösszegei egyenletesen konvergálnak a C_R körön, hiszen a q majoráló konstans w - től függetlenül választható. Tagonként integrálva:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k dw = \sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k,$$

ahol $c_k = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_R}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw$. $\square$

4. Megjegyzés. Mivel (9) konvergens hatványsor $z \neq z_0$ esetén is, ezért $\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|} < \infty$, azaz a konvergenciasugár z_0 körül pozitív. A 2.3. alfejezet szerint tehát

$$c_k = \frac{f^k(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

3.5.1. Az algebra alaptétele

A $k = 1$ esetben

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(w)}{(w-z_0)^2}\,dw.$$

A körvonal $z_0 + Re^{it}$ paraméterezése segítségével

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(w)}{(w-z_0)^2}\, dw = \frac{Ri}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{R^2 e^{2it}} e^{it}\, dt = \frac{1}{2R\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{e^{it}}\, dt$$

írható, ahonnan az következik, hogy

$$|f'(z_0)| = \left| \frac{1}{2R\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{e^{it}}\, dt \right| \le \frac{1}{2R\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(z_0 + Re^{it})}{e^{it}} \right| dt \le \frac{M_R}{R},$$

ahol $M_R := \sup\limits_{|w-z_0|=R} |f(w)|$. Ha az f függvény a teljes komplex számsíkon folytonosan differenciálható és korlátos, akkor

$$|f'(z_0)| \le \frac{M}{R},$$

valamely z_0 választásától független, univerzális $M > 0$ mellett. Az $R \to \infty$ határátmenetet véve $f'(z_0) = 0$ következik. Mivel $z_0 \in \mathbb{C}$ tetszőlegesen választható, ezért $f' = 0$, azaz a függvény konstans. Ez az eredmény Liouville tétele.

14. Tétel. (Liouville-tétel) *Ha az f függvény a teljes komplex számsíkon folytonosan differenciálható és korlátos, azaz*

$$|f(z)| \le M \quad (z \in \mathbb{C}),$$

akkor konstans.

15. Tétel. (Az algebra alaptétele) *Bármely*

$$P(z) := z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0 \quad (n \ge 1)$$

komplex együtthatós polinomnak van komplex gyöke.

Bizonyítás. Indirekte tegyük fel, hogy nincs komplex zéróhely. Megmutatjuk, hogy $P(z)$ alulról korlátos. Elegendően nagy abszolút értékű z komplex számra ez szemléletesen is nyilvánvaló a komplex műveletek geometriai interpretációja segítségével, hiszen a z^n - től eltekintve a polinom együtthatóival való szorzások csupán forgatják és (rögzített aránnyal) nyújtják a vektorokat, míg c_0 egy (rögzített) nagyságú eltolást jelent. A hosszváltozásra tehát a

$$|P(z)| \ge |z|^n - |c_{n-1}||z|^{n-1} - \ldots - |c_1||z| - |c_0| = |z|^{n-1} \left(|z| - |c_{n-1}| - \ldots - \frac{|c_1|}{|z|^{n-2}} - \frac{c_0}{|z|^{n-1}} \right)$$

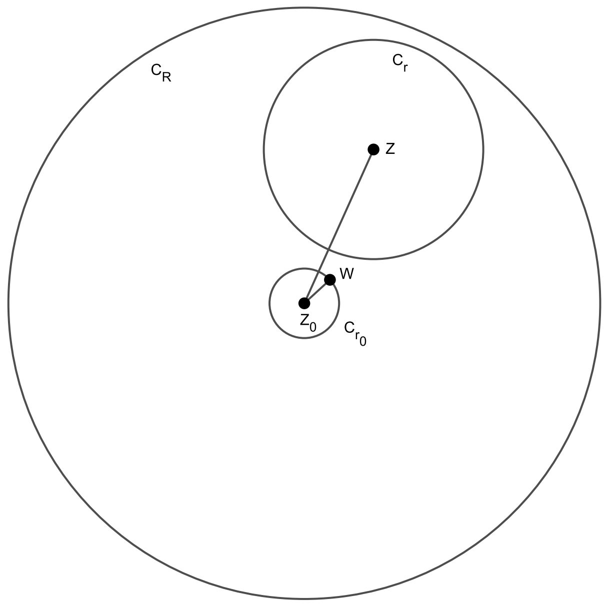
alsó becslés adható, ahonnan $|P(z)| \ge 1$, feltéve, hogy

$$|z| \ge m_1 := 1 + |c_{n-1}| + \ldots + |c_1| + |c_0|.$$

A $|z| \le m_1$ körlapon pedig $|P(z)|$ pozitív minimumot vesz fel indirekt feltevésünk értelmében:

$$m_2 := \min_{|z| \le m} |P(z)|.$$

Ha $m := \min\{m_1, m_2\}$, akkor $|P(z)| \ge m \ (z \in \mathbb{C})$. Ez azt jelenti, hogy az $f(z) := 1/P(z)$ folytonosan differenciálható függvényt az $M := 1/m$ felülről korlátozza. Liouville tétele értelmében f konstans, ami nyilvánvalóan ellentmondás. □



9. ábra. A Laurent-féle sorfejtés

3.6. A Laurent-féle sorfejtés

16. Tétel. *Legyen $f\colon G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $z_0 \in G$ ponttól eltekintve folytonosan differenciálható függvény. Ha a z_0 körüli $R > 0$ sugarú nyílt körlap a határgörbéjével együtt G - ben fekszik, akkor bármely $z \in z_0 + D_R$ pont esetén az*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = \ldots + c_{-2}\frac{1}{(z - z_0)^2} + c_{-1}\frac{1}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots \quad (10)$$

sorfejtés érvényes, ahol

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw, \quad k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

Bizonyítás. Mivel z_0 izolált szingularitás, ezért tekintsünk egy z_0 körüli, elegendően kicsiny sugarú $r_0 > 0$ körlapot, melynek határa a C_{r_0} görbe. Legyen $z \in z_0 + D_R$; az $f(z)$ érték kiszámításához használjuk a Cauchy-féle integrálformulát egy z körüli r sugarú C_r körvonalat választva úgy, hogy $z_0 \notin z + D_r \subset z_0 + D_R$ (ld. 9. Ábra):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(w)}{w - z}\, dw \overset{(7)}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_0}} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

Az első tag sorfejtése ugyanaz, mint amit a 13. Tétel bizonyításában láttunk. Foglalkozzunk ezért a második taggal: az előző esettel ellentétben most

$$\left|\frac{z - z_0}{w - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{r_0} > 1 \quad (w \in C_{r_0}),$$

ezért a reciprok-értékre kell alapoznunk az átalakításokat:

$$\frac{f(w)}{w - z_0 + z_0 - z} = -\frac{f(w)}{z - z_0}\frac{1}{1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}}.$$

A már alkalmazott gondolatmenettel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_0}} \frac{f(w)}{z-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^k dw =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw(z-z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_0}}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-k}}\,dw\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}},$$

ahonnan a második összegzésre vonatkozó $l = k+1$ indexeltolással

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw(z-z_0)^k + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_0}}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-l+1}}\,dw\frac{1}{(z-z_0)^l} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw(z-z_0)^k + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_0}}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-l+1}}\,dw(z-z_0)^{-l} =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k,$$

hiszen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_0}}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-l+1}}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-l+1}}\,dw$$

a Cauchy-féle integráltétel gyűrűszerű tartományokra vonatkozó (6) alakja értelmében. □

3.7. A reziduum-tétel

12. Definíció. *Legyen $f\colon G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $z_0 \in G$ ponttól eltekintve folytonosan differenciálható függvény. Ha a z_0 körüli $R > 0$ sugarú nyílt körlap a határgörbéjével együtt G - ben fekszik, akkor a z_0 - körüli Laurent-féle sorfejtésben fellépő*

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} f(w)\,dw$$

együtthatót a függvény z_0 - hoz tartozó reziduumának nevezzük. Jelölés: Res $(f(z), z_0)$.

17. Tétel. *Legyen $f\colon G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a véges sok $z_0^1, \ldots, z_0^m \in D$ ponttól eltekintve folytonosan differenciálható függvény, ahol $D \subset G$ mindkét tengelyre nézve normáltartomány, melynek γ határgörbéje a G tartományban halad. Ekkor*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz = \mathit{Res}\ (f(z), z_0^1) + \ldots + \mathit{Res}\ (f(z), z_0^m).$$

Bizonyítás. A szingularitási helyeket vegyük körül egymásba nem nyúló $\gamma_b^1, \ldots, \gamma_b^m$ körökkel. A (7) formula szerint a γ (külső) görbén vett integrál a (belső) körökön vett integrálok összege, azaz a γ_i^b körök segítségével kiszámított reziduumok összegének $2\pi i$ - szerese. □

7. Példa. A reziduum-tétel alkalmazásait illetően ld [4, V. rész].

Hivatkozások

[1] M. Beck, G. Marchesi, D. Pixton, L. Sabalka, A first course of complex analysis, Orthogonal Publishing, Edition 1.53.

[2] John Roe: Elementary Geometry, Oxford University Press, 1993.

[3] Laczkovich Miklós: Sejtés és bizonyítás, Typotex, 1998.

[4] Szőkefalvi-Nagy Gyula, Komplex függvénytan, Tankönyvkiadó vállalat, Budapest, 1966.