Herendiné Kónya Eszter:

Érdekes felületek topológiája

I. Bevezetés

A topológia a geometria egyik ágaként jelent meg a matematikatörténetben, fejlődése folytán azonban a matematika önálló, alapvető diszciplínái közé került.

Ebben az előadásban megmaradunk a geometria keretei között, és a háromdimenziós tér felületeinek egyes topológiai kérdéseit vizsgáljuk.

A felületek egymásba alakíthatóságának problémájával fogunk foglalkozni, olyan átalakításokat végzünk, melyek során a felületek épsége megmarad, azaz sem szakítás, sem összeragasztás nem történik.

Az átalakíthatóság matematikai megfogalmazásához szükségünk van néhány definícióra:

Geometriai transzformáció: Ponthalmazhoz, ponthalmazt rendelő függvény.

Különböző geometriai transzformációkat (egybevágóság, hasonlóság, affinitás, stb.) ismerünk. Ezek a hozzárendelési szabályban, és ebből következően a transzformációs tulajdonságokban térnek el egymástól.

Környezet: Bármely A térbeli alakzat x_0 pontbeli δ-környezetét az A halmaz azon pontjai alkotják, melyeknek x_0-tól való távolsága kisebb, mint δ, ahol $\delta > 0$.

Folytonos függvény (leképezés): Az $f: A \to B$ függvény folytonos az x_0 pontban, ha bármilyen kis V környezetét is vesszük az $f(x_0)$ pontnak a B halmazban, létezik az x_0-nak olyan U környezete A-ban, hogy minden U-beli pontnak a képe V-beli pont lesz. Ha az f függvény minden $x_0 \in A$ pontban folytonos, akkor folytonos függvénynek nevezzük. Ha az f függvény inverze (amennyiben létezik) szintén folytonos, akkor f-et mindkét irányban folytonos függvénynek nevezzük.

Kölcsönösen egyértelmű függvény (leképezés): Minden képelemnek pontosan egy ősképe van.

Topológiai transzformáció vagy homeomorf leképezés: Kölcsönösen egyértelmű és mindkét irányban folytonos leképezés.

Nézzük meg, hogy a topológiai transzformáció fenti meghatározása miként biztosítja az alakzat „épségének" megmaradását.

A leképezés (függvény) fogalma azt jelenti, hogy egy adott ponthoz nem rendelhetünk több különböző pontot, vagyis az alakzat „szétvágását" nem engedjük meg. A kölcsönösen egyértelműség biztosítja, hogy különböző pontokhoz különböző pontokat rendelünk, tehát nem fordulhat elő két pont „összeragadása". A folytonosság definíciója pedig azt jelenti, hogy azok a pontok, amelyek az A alakzatban „közel" vannak egymáshoz, a B alakzatban is „közel" lesznek,

Herendiné Kónya, E. (2000). Érdekes felületek topológiája. In S. Szendrey (Ed.), *Tanulmányok 2000* (pp. 167-173). Debrecen: KFRTKF.

nem keletkeznek a leképezés során „szakadások".

A topológiának a topológiai transzformációkkal foglalkozó ágát a fentiek miatt szokás gumigeometriának is nevezni, hiszen ha az alakzatokat valamely rugalmas anyagból készítjük el, akkor, a homeomorfizmusok szemléltethetők ezen anyag bármiféle deformációjával, amennyiben a deformáció nem vezet az anyag szakadásához, ill. önmagával való összeragadásához.

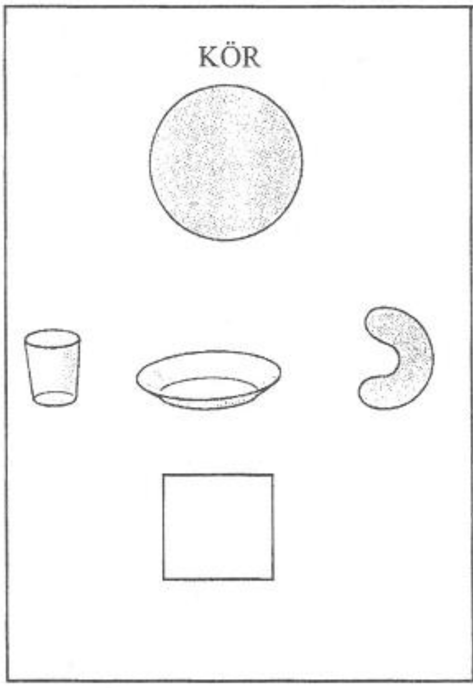
Ilyen transzformációkat hajtanak végre a kisgyerekek is, amikor gyurmáznak, papírt hajtogatnak, drótot hajlítanak, lufit fújnak, stb..

Nézzünk meg néhány példát a körrel, körgyűrűvel, gömbbel, tórusszal homeomorf alakzatokra: (*1.-2.-3.-4. ábra*)

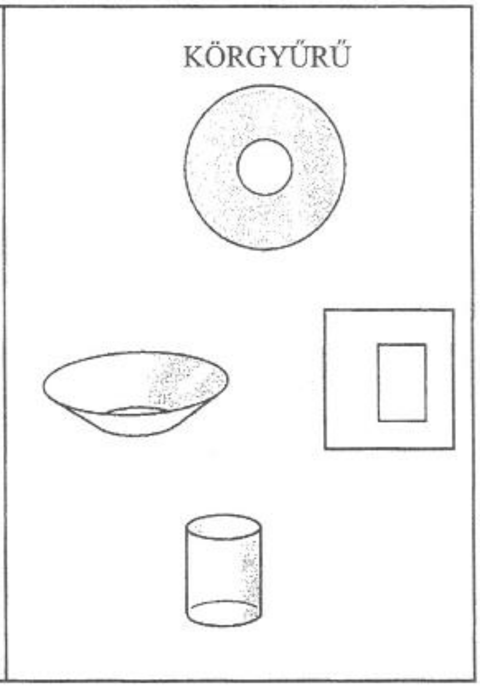
II. Hogyan dönthető el, hogy két alakzat homeomorf-e, vagy sem?

Az egyik módszer az, hogy keresünk egy konkrét homeomorfizmust, amely egyiket a másikba átviszi. Pl.: Egy kör, és egy háromszög között a centrális vetítés ilyen kapcsolatot létesít.

Ha nem találunk ilyen leképezést, még nem jelenti azt, hogy nem is létezik.

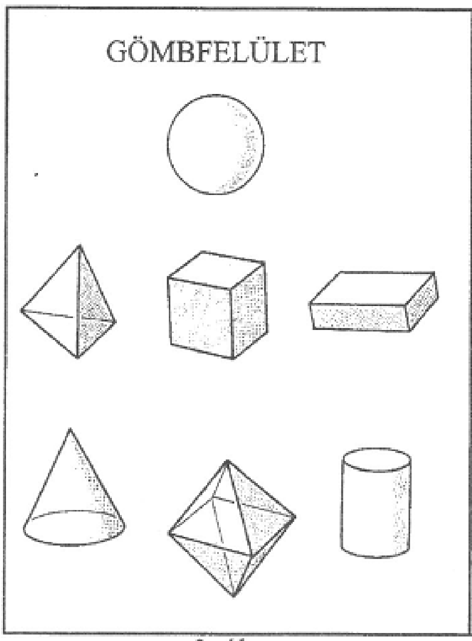


1. ábra

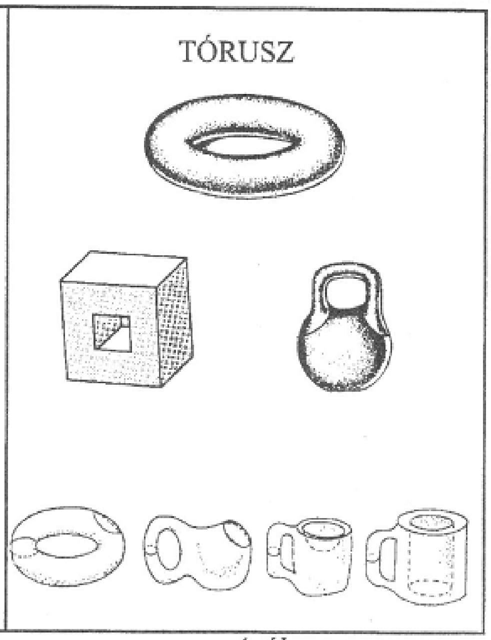


2. ábra

Herendiné Kónya, E. (2000). Érdekes felületek topológiája. In S. Szendrey (Ed.), *Tanulmányok 2000* (pp. 167-173). Debrecen: KFRTKF.



3. *ábra*



4. *ábra*

Érdemes megvizsgálni az alakzatoknak azon tulajdonságait, amelyek nem változnak meg akkor, ha rajtuk topológiai transzformációt hajtunk végre. Ezeket a tulajdonságokat topológiai invariánsoknak nevezzük.

A következőkben három alapvető topológiai invariánst vizsgálunk meg.

Euler-karakterisztika:

Induljunk ki Euler tételéből, amely azt mondja ki, hogy bármely poliéder csúcsainak *c*, lapjainak *l*, éleinek *e* száma között fennáll a $c+l-e=2$ összefüggés. Minthogy a poliéderek a gömbfelülettel homeomorf alakzatok, belátható, hogy ez az egyenlőség igaz minden, a gömbfelülettel homeomorf alakzatra, mely a körlappal homeomorf lapokból áll. Hiszen ha a poliédereket gömbbé transzformáljuk, minden esetben olyan gráfot kapunk a gömbfelületen, mely a felületet körlappal homeomorf darabokra vágja szét. Tehát a $c+l-e=2$ szám valójában nem egy-egy poliédert, hanem a vele homeomorf összes felületet jellemzi.

Hasonlóan belátható, hogy más, a gömbbel nem homeomorf felület esetén ez a szám *2*-től különböző lehet. Vagyis a $c+l-e$ szám, amit a felületek Euler-karakterisztikájának nevezünk, a felület topológiai invariánsa. Meghatározása úgy történhet, hogy a felületet a legegyszerűbb módon csúcsok és élek kijelölésével a körlappal homeomorf részekre bontjuk, és összeszámoljuk az így keletkező csúcsokat, éleket, lapokat.

Herendiné Kónya, E. (2000). Érdekes felületek topológiája. In S. Szendrey (Ed.), *Tanulmányok 2000* (pp. 167-173). Debrecen: KFRTKF.

Néhány egyszerű alakzat Euler-karakterisztikája:

Gömb	2
Körlap	1
Körgyűrű	0
Tórusz	0

Bár a tórusz és a körgyűrű Euler-karakterisztikája egyaránt 0, szemléletesen is látható, hogy a két alakzat nem homeomorf egymással. Tehát az Euler-karakterisztikák egyezése csak szükséges, de nem elégséges feltétele a homeomorfizmusnak.

Határgörbék száma:

Az alakzatok pontjai között találunk olyanokat, amelyeknek van a körlappal homeomorf környezetük, ezeket az alakzat belső pontjainak nevezzük. Vannak olyan pontok is, melyek környezete a félkörlappal homeomorf (nincs körlappal homeomorf környezetük), az ilyen pontokat határpontoknak nevezzük.

Zárt felületek: Minden pontjuk belső pont. (Szokás röviden felületeknek nevezni.)

Nyílt felületek: Vannak határpontjaik. Ezek a felületek határgörbéit alkotják.

Zárt felületek határgörbéinek száma 0.

Alakzat:	Határgörbék száma:
kör	1
hengerfelület	2
tórusz	0
gömb	0

Belátható, hogy egy felület határgörbéinek száma szintén topológiai invariáns, azaz a határgörbék számának egyezése szükséges feltétele a homeomorfiának.

Egy-és kétoldalúság:

Egyoldalúnak nevezünk egy felületet, ha létezik a felületen olyan zárt útvonal, melyet bejárva, a felület normálisa ellentett helyzetbe kerül. (A definíció pontosítható, ill. a felület térbeli helyzetétől függetlenné tehető, ha a normálvektor irányítása helyett az útvonal egyes pontjaiba rajzolt kis körök irányítását figyeljük.)

Az 5. ábra ún. nevezett Möbius-szalagot ábrázol.

Möbius-szalagot kapunk, ha egy téglalap alakú szalagot megcsavarunk, és

Herendiné Kónya, E. (2000). Érdekes felületek topológiája. In S. Szendrey (Ed.), *Tanulmányok 2000* (pp. 167-173). Debrecen: KFRTKF.

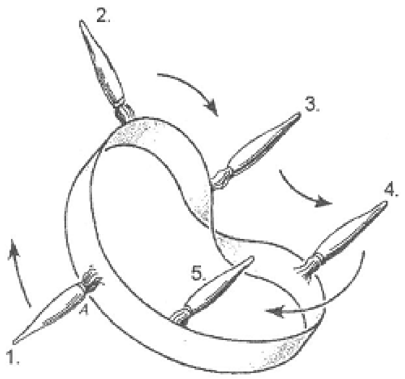
végeit egymáshoz ragasztjuk. Ez a felület egyrészt nyílt, egyetlen határgörbéje homeomorf a körrel, másrészt egyoldalú. Az egyoldalúságról szemléletesen meggyőződhetünk, ha egy pontból kiindulva ecsettel befestjük. Miután visszajutottunk a kiindulási helyre, azt tapasztaljuk, hogy a felület egésze színes.

Ha nem létezik a fent leírt útvonal, kétoldalú felületről beszélünk.

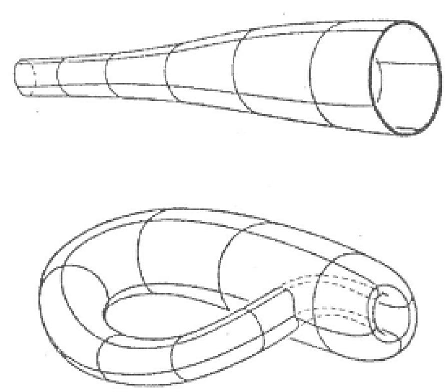
Kétoldalú zárt felület például a gömb, vagy a tórusz, kétoldalú nyílt felület például a négyzet, vagy a hengerfelület.

Egyoldalú nyílt felület tehát pl. a Möbius-szalag.

Egyoldalú zárt felületre nevezetes példa a Klein-féle kancsó. (*6. ábra*)



5. ábra



6. ábra

Belátható, hogy a fenti 3 topológiai invariáns együttes egyezése szükséges és elégséges feltétele annak, hogy két alakzat homeomorf legyen.

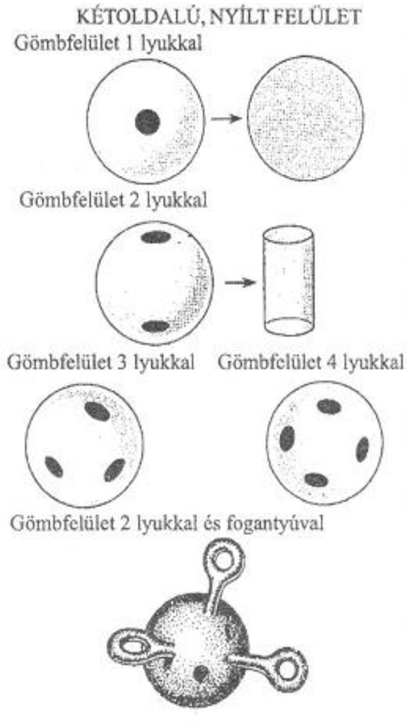
Megjegyzés: Természetesen léteznek további invariánsok is, ezekkel azonban nem foglalkozunk.

III. A felületek topológiai osztályozása

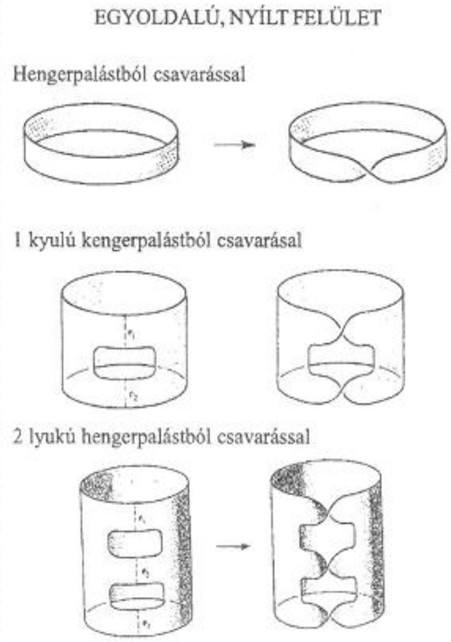
Az osztályozás azt jelenti, hogy felsoroljuk az összes, topológiai szempontból különböző felületet. A felsorolt felületek egymással páronként nem lehetnek homeomorfak, valamint bármely felület legyen homeomorf a felsoroltak közül eggyel.

Tekintsük először a **nyílt felületeket**. (*7.-8. ábra*)

Herendiné Kónya, E. (2000). Érdekes felületek topológiája. In S. Szendrey (Ed.), *Tanulmányok 2000* (pp. 167-173). Debrecen: KFRTKF.

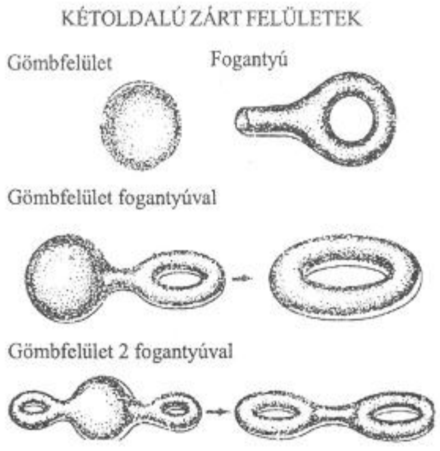


7. ábra



8. ábra

A kétoldalú nyílt felületeket előállíthatjuk úgy, hogy a gömbfelületből körlappal homeomorf lyukakat vágunk ki.



9. ábra

Az egyoldalú nyílt felületek a hengerpalástból csavarással származtathatók aszerint, hogy azon a palást szétvágása előtt hány lyuk volt.

A **zárt felületek** osztályozásának kérdését a múlt század második felében Jordan és Möbius oldották meg.

A kétoldalú zárt felületek mindegyike előállítható a gömbfelületből úgy, hogy azon 1,2,... körrel homeomorf lyukat ún. fogantyúkkal ragasztunk be. (*9. ábra*) A „fogantyú" a tóruszból egy lyuk kivágásával származtatható.

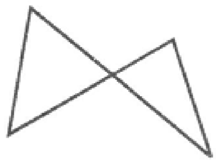
A 7. ábra alján látható gömbfelület 2 lyukkal és 3 fogantyúval nyílt felület,

Herendiné Kónya, E. (2000). Érdekes felületek topológiája. In S. Szendrey (Ed.), *Tanulmányok 2000* (pp. 167-173). Debrecen: KFRTKF.

a nyílt felületek további osztályaira utal, melyeket a gömbfelületből lyukakkal és fogantyúkkal származtathatunk.

Az összes egyoldalú zárt felület megkapható, ha a gömbfelületen levő lyukakat Möbius-szalaggal ragasztjuk be. Ez a beragasztás elvileg lehetséges, hiszen a Möbius-szalag határgörbéje homeomorf a körrel, gyakorlatban azonban ezt a kört nem tudjuk síkban elhelyezni úgy, hogy a Möbius-szalag a kör síkjának egy oldalára essen. Ez az elhelyezés csak úgy lehetséges, ha megengedjük, hogy a Möbius-szalag átmesse önmagát.

Az önátmetszés problémája 3 dimenzióban hasonló ahhoz, amivel 2 dimenzióban találkozunk, ha ún. torznégyszöget rajzolunk:



Itt keletkezik az oldalaknak a csúcsokon kívüli metszéspontja is. 2 dimenzióban a négyszög csak ennek a „nem valódi" metszéspontnak a felvételével ábrázolható. Elkerülhető a metszéspont, ha a négyszöget 3 dimenzióban képzeljük el.

Hasonló a probléma feloldása felületek önátmetszésénél is. 4 dimenzióban már az önátmetszés megszűnik.

Végezetül érdekességként megemlítjük, hogy a zárt egyoldalú felületek közül a Klein-féle kancsó homeomorf a gömbfelület két Möbius-szalaggal történő beragasztásával kapható felülettel.

Irodalomjegyzék:

V.G. Boltyanszkij, V.A. Jefremovics: Szemléletes topológia Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

D. Hilbert, S. Cohn-Vossen: Szemléletes geometria Gondolat, Budapest, 1982.

Tillainé Buvári Anikó: Gráfelméleti és topológiai érdekességek Középiskolai szakköri füzetek Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.

Herendiné Kónya, E. (2000). Érdekes felületek topológiája. In S. Szendrey (Ed.), *Tanulmányok 2000* (pp. 167-173). Debrecen: KFRTKF.