**Herendiné Kónya Eszter:**

# Kerékjártó Béla tétele a nyílt felületek osztályozásáról

## I. Előzmények

Előadásomban a tétel kimondásán kívül keletkezésének előzményeiről, körülményeiről, valamint alkalmazhatóságáról szeretnék szólni.

A felületek topológiája különböző, speciális kétdimenziós ponthalmazok olyan transzformációival foglalkozik, melyek során a felületek mérete, alakja megváltozhat, de szakadások, összetapadások nem keletkezhetnek. A matematikában az ilyen transzformációk kölcsönösen egyértelmű és kölcsönösen folytonos (homeomorf) függvényekkel írhatók le. A legfontosabb kérdés a felületek azon tulajdonságainak megkeresése, melyek a homeomorf transzformáció során nem változnak meg, azaz invariánsak.

A felületek három nagy csoportba sorolhatók:

1. Zárt felületek
2. Peremes, vagy határgörbékkel rendelkező felületek
3. Nyílt felületek

Zárt felület például a gömb, a tórusz, vagy egy poliéder. Peremes felület például a körgyűrű (két határgörbéje van), vagy egy olyan gömb, amelyből egy körlemez belső pontjait kivettük. Nyílt felület viszont egy olyan gömb, amelyből csak egyetlen pont hiányzik. Hasonlóan nyílt felület például egy végtelen hosszú hengerfelület.

Szokás a zárt és a peremes felületeket kompaktnak, míg a nyílt felületeket nemkompaktnak is nevezni.

Mi ez utóbbi felületekkel fogunk foglalkozni, de ehhez szükséges a kompakt felületekre vonatkozó alapvető eredmények ismertetése.

Maga a topológia a XX. század fordulójára vált önálló tudományággá, a felületek kérdése az első 20-30 évben került a kutatók érdeklődésének előterébe.

A kompakt felületek topológiájának főtételét 1921-ben bizonyította be egy Brahana nevű matematikus. Eszerint:

Két kompakt felület homeomorf (topológiailag azonos), akkor és csak akkor, ha megegyezik az alábbi három tulajdonságban:

– Határgörbék száma

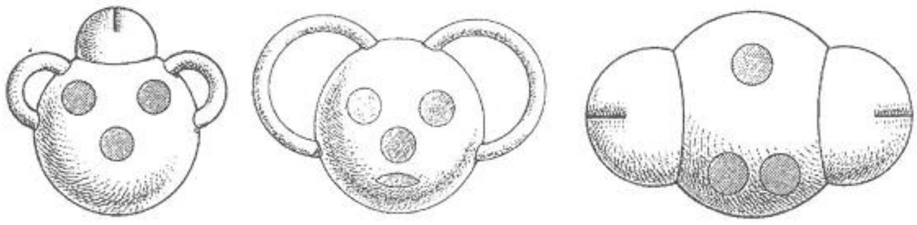
– Irányíthatóság

– Euler-karakterisztika

A tétel lehetőséget ad arra, hogy minden kompakt felületet előállítsunk egy

Herendiné Kónya, E. (2000). Kerékjártó Béla tétele a nyílt felületek osztályozásáról. In S. Szendrey (Ed.), *Tanulmányok 2000* (pp. 161-166). Debrecen: KFRTKF.

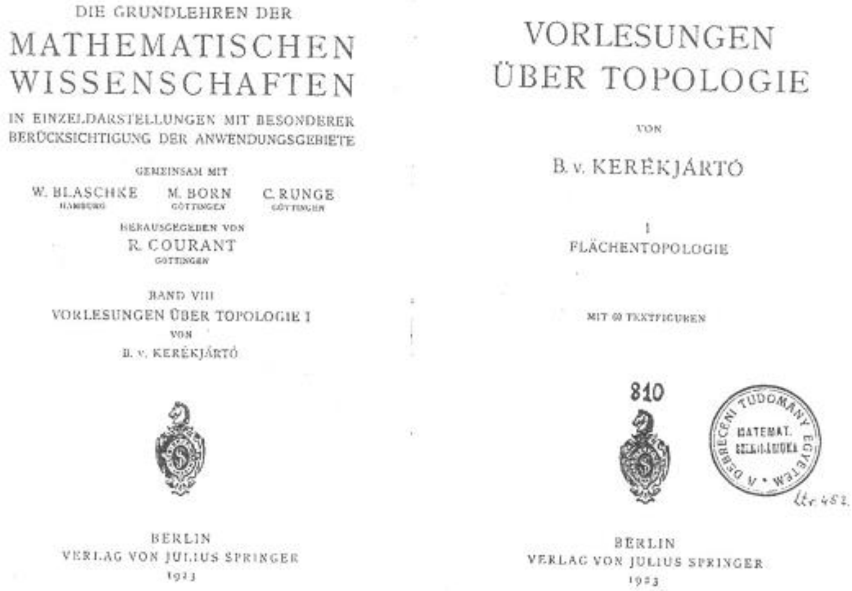
gömbből, melyen bizonyos számú „lyuk”, továbbá „fogantyúval” ill. „Mőbius-szalaggal” beragasztott lyuk van. (*1. Ábra*)



*1. ábra*

Ehhez az alaptételhez és osztályozáshoz keresett hasonlót Kerékjártó Béla a nyílt felületek esetében.

Kerékjártó Béla 1898-ban születet Budapesten és 1946-ban halt meg Gyöngyösön. Egyetemi tanulmányait Budapesten végezte 1916 és 1920 között. 1920-ban, 22 évesen, doktorált, 1922-ben magántanári kinevezést kapott a szegedi egyetemen. 1922-23-ban a göttingeni egyetem vendégprofesszora volt. Az itt tartott topológiai előadásait felhasználva írta meg „Vorlesungen über Topologie” (Topológiai előadások) című, egyetemi hallgatóknak szánt tankönyvét. (*2. Ábra*) Ez volt a topológia történetének első tankönyve. Ennek egyik fejezete tartalmazza a nyílt felületek topológiájának főtételét, mely később Kerékjártó-tétel néven vált ismertté.


DIE GRUNDLEHREN DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE
GEMEINSAM MIT
W. BLASCHKE (HAMBURG) M. BORN (GÖTTINGEN) C. RUNGE (GÖTTINGEN)
HERAUSGEGEBEN VON
R. COURANT
GÖTTINGEN
BAND VIII
VORLESUNGEN ÜBER TOPOLOGIE I
VON
B. v. KERÉKJÁRTÓ
BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1923

VORLESUNGEN ÜBER TOPOLOGIE
VON
B. v. KERÉKJÁRTÓ
I
FLÄCHENTOPOLOGIE
MIT 60 TEXTFIGUREN
810
DEBRECENI TUDOMÁNYEGYETEM MATEMAT. SZEMINÁRIUMA
BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1923

*2. ábra*

Herendiné Kónya, E. (2000). Kerékjártó Béla tétele a nyílt felületek osztályozásáról. In S. Szendrey (Ed.), *Tanulmányok 2000* (pp. 161-166). Debrecen: KFRTKF.

## II. A Kerékjártó-tétel

A tétel megismeréséhez szükségünk lesz néhány fogalomra.

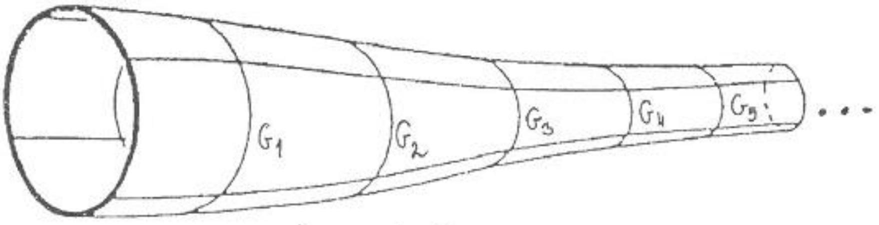
Az alapgondolat az volt, hogy definiáljunk nyílt felületek esetén ideális, úgynevezett határpontokat, melyeket hozzávéve a felülethez azok zárttá tehetők.

Ehhez vegyünk fel a felületen olyan $G_1$, $G_2$, …. tartományokat, melyekre teljesül, hogy

– peremei a felület egyszerű zárt görbéi,

– minden k indexre $G_{k+1} \subset G_k$,

– az így kapott tartománysorozatnak nincs közös pontja. (*3. Ábra*)

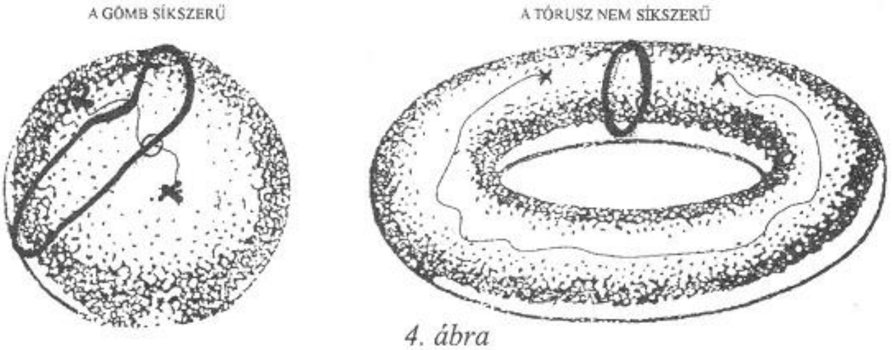



*3. ábra*

Így a fenti tartománysorozat definiál egy, a valóságban nem létező ideális vagy határpontot. Például a végtelen hosszú hengerfelület 1-1 ideális ponttal zárttá tehető.

Egy határpont háromféle típusú lehet:

1. Elsőfajú határpont:
   Elegendően nagy *k*-ra a $G_k$ tartományok síkszerűek, azaz olyanok, hogy azokat minden egyszerű zárt görbéjük felbontja.
   Például a gömb síkszerű, mert felvéve rajta egy tetszőleges egyszerű, zárt görbét, létezik legalább két, a görbére nem illeszkedő olyan pontja, hogy azokat bárhogyan is kötjük össze a felületen, a kapott út metszi a felvett görbét. A gömbbel ellentétben a tórusz nem síkszerű. (*4. Ábra*)
   Elsőfajú határpontja van például a végtelen hengernek, az egy ponton kiszúrt gömbnek, az euklideszi síknak, stb.




*4. ábra*

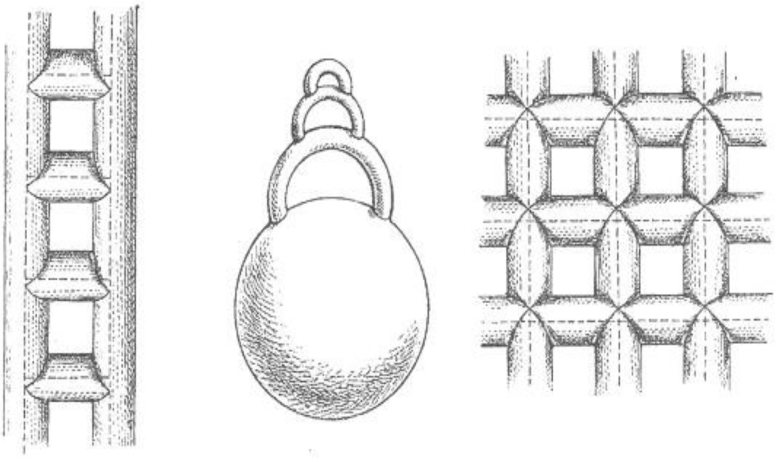

Herendiné Kónya, E. (2000). Kerékjártó Béla tétele a nyílt felületek osztályozásáról. In S. Szendrey (Ed.), *Tanulmányok 2000* (pp. 161-166). Debrecen: KFRTKF.

2. Másodfajú határpont:

Elegendően nagy $k$-ra a $G_k$ tartományok irányíthatók, de egy k-ra sem síkszerűek. Például a „létra-felület" 2, a végtelen sok „fogantyúval" ellátott gömb 1, a „rács-felület" szintén 1 másodfajú határponttal rendelkezik. (*5. Ábra*)

3.Harmadfajú határpont:

A $G_k$ tartományok egyetlen $k$-ra sem irányíthatók.



*5. ábra*

**Kerékjártó tétele:**

Két tetszőleges nyílt felület homeomorf akkor és csak akkor, ha azonos számú első-, másod- és harmadfajú határpontja van, valamint ha ezek egymáshoz viszonyított helyzete megegyezik.

Speciális esetek:

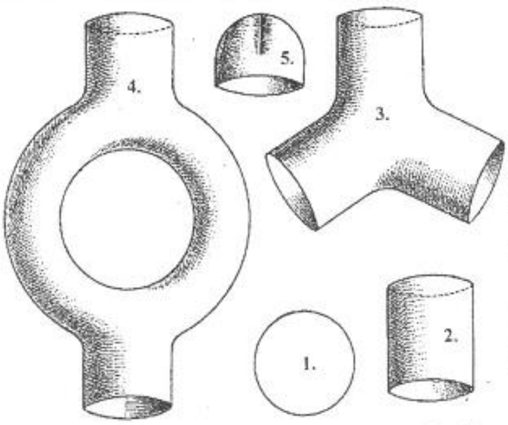
a) Ha nincsenek harmadfajú határpontok, akkor ezenkívül egyezzen meg a két felület irányíthatósága.

b) Ha csak elsőfajú határpontok vannak, akkor egyezzen meg a két felület irányíthatósága és Euler-karakterisztikája is.

c) Ha nincsenek határpontok, akkor visszakapjuk a kompakt felületekre vonatkozó tételt.

A tételből belátható, hogy bármely felület előállítható a következő öt felületelem segítségével, ha azokat határgörbéik mentén különböző módon összeragasztjuk. (*6. Ábra*)

Herendiné Kónya, E. (2000). Kerékjártó Béla tétele a nyílt felületek osztályozásáról. In S. Szendrey (Ed.), *Tanulmányok 2000* (pp. 161-166). Debrecen: KFRTKF.




1.Síkszerű felület egy határgörbével
2. Síkszerű felület két határgörbével
3. Síkszerű felület három határgörbével
4. Irányítható felület két határgörbével
5. Nem irányítható felület egy határgörbével

*6. ábra*

## III. A tétel alkalmazhatóságáról

Végül szeretnék néhány szót szólni a tétel „utóéletéről”:

1931-ben maga Kerékjártó egy cikkében a határpontok új tárgyalási módját adta, s azzal jutott el a fenti eredményhez.

1932-ben Alekszandrov *A topológia egyszerű alapfogalmai* c. könyvében írta: „A kétdimenziós sokaságok topológiai típusainak feksorolása teljesen megoldott, ld. Hilbert és Kerékjártó könyveit.”

Mivel a kétdimenziós esetben alkalmazott módszerek több dimenzióra nem általánosíthatók, így valóban, az 1930.as évek elejére a probléma megoldása lezárult, a későbbi években csak a pontosítások, újrafogalmazások miatt került egyes kutatók érdeklődésének előterébe. Például egy amerikai kutató, Ian Richards, 1960-ban írt Nemkompakt felületek osztályozása c. doktori disszertációjának fő részét a Kerékjártó-tétel újraértelmezése és bizonyítása képezi.

Magát a könyvet ma is számon tartják, több, napjainkban megjelenő egyetemi tankönyv szerzője ajánlja olvasói figyelmébe.

Herendiné Kónya, E. (2000). Kerékjártó Béla tétele a nyílt felületek osztályozásáról. In S. Szendrey (Ed.), *Tanulmányok 2000* (pp. 161-166). Debrecen: KFRTKF.

## Irodalomjegyzék:


Alekszandrov: A topológia egyszerű alapfogalmai, Gondolat, Budapest, 1982.

D. Hilbert, S. Cohn-Vossen: Szemléletes geometria, Gondolat, Budapest, 1982.

Kerékjártó: Vorlesungen über Topologie, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1923.

Kerékjártó: A nyílt felületek topológiájáról, Matematikai és Fizikai Lapok, 38. Kötet, 1931. 144-155

I. Richards: On the classification of noncompact surfaces, Trans. Amer. Math. Soc., 106., 1963., 259-269



Herendiné Kónya, E. (2000). Kerékjártó Béla tétele a nyílt felületek osztályozásáról. In S. Szendrey (Ed.), *Tanulmányok 2000* (pp. 161-166). Debrecen: KFRTKF.