Kerékjártó Béla tétele a nyílt felületek topológiájáról

HERENDINÉ KÓNYA ESZTER

Kerékjártó Béla 1898-ban születet Budapesten és 1946-ban halt meg Gyöngyösön. Egyetemi tanulmányait Budapesten végezte 1916 és 1920 között. 1920-ban, 22 évesen, doktorált, 1922-ben magántanári kinevezést kapott a szegedi egyetemen. 1922–23-ban a göttingeni egyetem vendégprofesszora volt. Az itt tartott topológiai előadásait felhasználva írta meg „Vorlesungen über Topologie" (Topológiai előadások) című, egyetemi hallgatóknak szánt tankönyvét. Ez volt a topológia történetének első tankönyve. Ennek egyik fejezete tartalmazza a nyílt felületek topológiájának főtételét, mely később Kerékjártó-tétel néven vált ismertté.

A topológia a geometria egyik ágaként jelent meg a matematika történetében, fejlődése folytán azonban a matematika önálló, alapvető diszciplínái közé került.

A felületek topológiája a felületek folytonos leképezéssel történő egymásba alakíthatóságának problémájával foglalkozik. Olyan deformációkat vizsgál, melyek során (feltéve, hogy rugalmas anyagból készültek) a felületek épsége megmarad, azaz sem szakítás, sem összeragasztás nem történik.

A felületek topológiájával kapcsolatos kérdések a XX. század első 20-30 évében álltak a kutatók érdeklődésének előterében.

Először az ún. poliéderfelületek invariáns tulajdonságait keresték, majd ezek topológiai osztályozását adták meg. A poliéderfelületek topológiájának főtételét 1921-ben bizonyította be egy Brahana nevű matematikus[4]. A tétel a poliéderfelületek topológiai egyenértékűségének szükséges és elégséges feltételét határozza meg.

Ehhez a tételhez és osztályozáshoz keresett hasonlót Kerékjártó Béla a nyílt felületek esetében. A tétel kimondása előtt meg kell ismerkednünk azokkal a fogalmakkal, eredményekkel, amelyek elvezettek a nyílt felületek topológiájának kérdéseihez.

Herendiné Kónya, E. (2003). Kerékjártó Béla tétele a nyílt felületek topológiájáról. *Polygon*, 12 (1-2), 23-34.

1. Topológiai transzformáció. Topológiai transzformáción vagy homeomorfizmuson kölcsönösen egyértelmű és kölcsönösen folytonos leképezést értünk. Két ponthalmaz topológiai értelemben egyenértékű, ha pontjai között homeomorfizmus létesíthető.

Például egy gömb homeomorf egy kockával, egy gúlával, mert folytonos deformációval átvihetők egymásba. Hasonlóan homeomorf a háromszöglap a körlappal, vagy a félgömbbel.

2. A felület fogalma. A felület definiálásának több módja ismert. Mi most kombinatorikus konstrukciót, úgynevezett triangulációt fogunk alkalmazni, mely a felületet egyszerű, háromszögeknek nevezett, elemekből állítja elő.

A tér minden olyan ponthalmazát háromszögnek nevezzük, amely egy síkbeli háromszöggel topológiailag ekvivalens. A belső pont, él, csúcspont, fogalmát hasonlóan értelmezzük, mint a „szokásos" háromszögnél.

*Felület*nek a következő tulajdonságokkal rendelkező háromszögekből álló halmazt tekintjük:

1. Egy háromszög belső pontjai csak ehhez a háromszöghöz tartoznak.
2. Egy háromszög bármely éle pontosan két háromszöghöz tartozik, melyeknek ezen az élen kívül más közös pontja nincs.
3. Egy háromszög bármely csúcspontja a $H_1, H_2, \ldots, H_n$ háromszögek egy véges, ciklikusan rendezett halmazához tartozik, melyben bármely két egymást követő háromszögnek ezt a csúcsot tartalmazó közös éle van.
4. Bármely két háromszöghöz tartozik egy véges háromszögsorozat, melynek első és utolsó eleme ez a két háromszög, és amelyben bármely két egymást követő háromszögnek egy közös éle van.

Ha a háromszögek száma véges, a felületet *zárt*nak, ha végtelen, akkor *nyílt*nak nevezzük.

A *peremes felületek*et külön kell definiálnunk, mert ezek a fenti értelemben nem felületek:

Véges sok háromszögből állnak, és a felület fenti definíciójának 2. ill.3 pontját a következőképpen kell módosítanunk:

2′. Egy háromszög bármely éle vagy egyetlen háromszöghöz, vagy két olyan háromszöghöz tartozik, melyeknek ezen az élen kívül más közös pontja nincs. Kell lennie legalább egy olyan élnek, mely csak egy háromszöghöz tartozik.

3′. Egy háromszög bármely csúcspontja a $H_1, H_2, \ldots, H_n$ háromszögek egy véges, ciklikusan, vagy lineárisan rendezett halmazához tartozik, melyben bármely két egymást követő háromszögnek ezt a csúcsot tartalmazó közös éle van.

A zárt és peremes felületeket szokás *poliéderfelületek*nek is nevezni. (A peremes felületek származtathatók a zárt felületekből oly módon is, hogy a zárt felületből elvesszük véges sok, páronként diszjunkt körlemez belsejét, így a visszamaradó felület véges sok egyszerű zárt határgörbével fog rendelkezni.)

Herendiné Kónya, E. (2003). Kerékjártó Béla tétele a nyílt felületek topológiájáról. *Polygon*, 12 (1-2), 23-34.

3. Speciális felületek. Az alábbiakban bemutatunk néhány speciális felületet, melyekre a későbbiekben hivatkozni fogunk.

Példák zárt felületekre:

gömb

tórusz

gömb két „füllel"

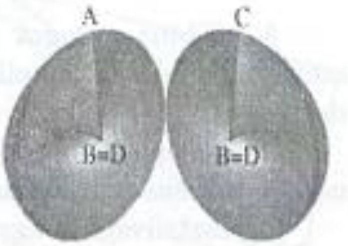
kocka

süvegfelület

Klein-kancsó

A gömbfelület „füllel" való ellátásán azt értjük, hogy a felületen két lyukat vágunk, s ezek határgörbéit egy hengerpalást két határgörbéjével összeillesztjük.

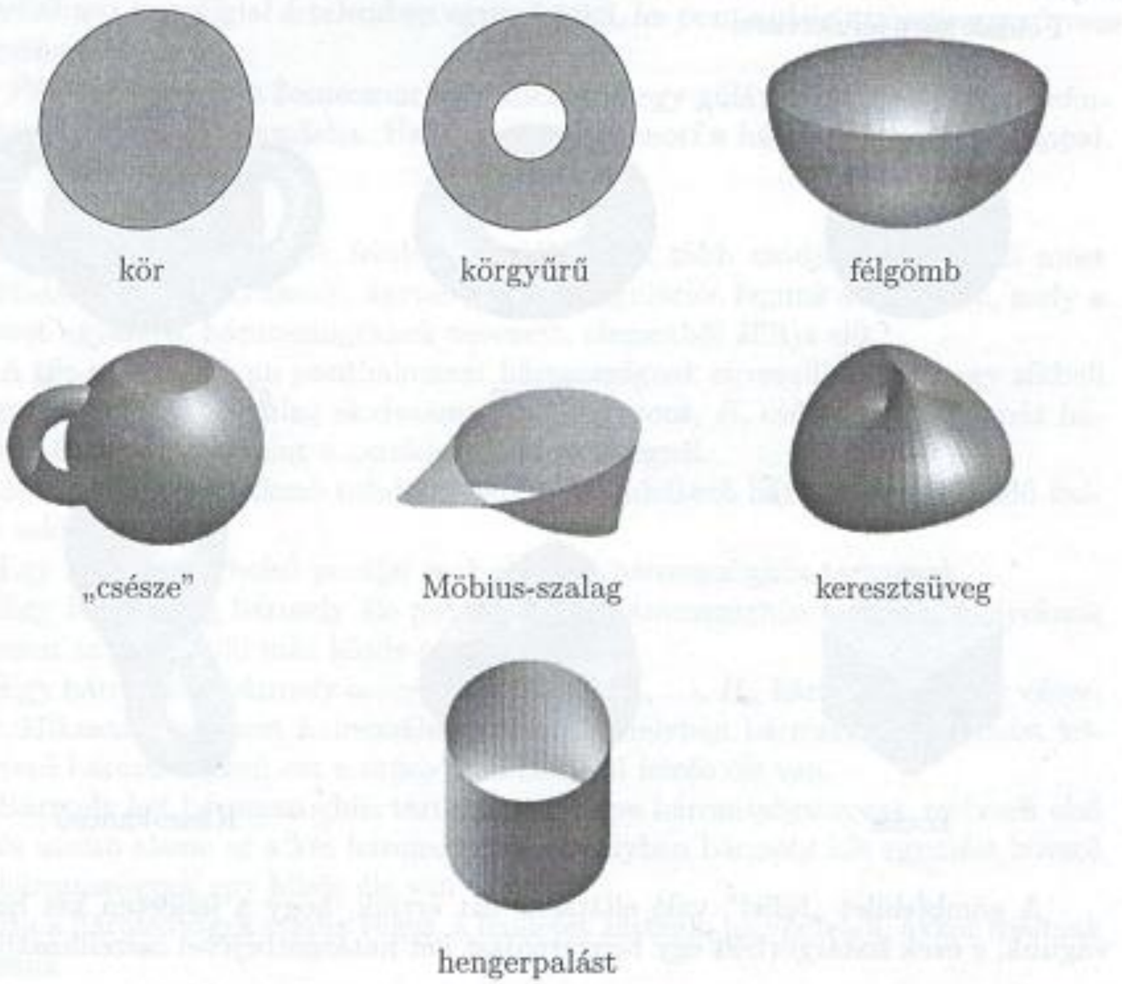
A süvegfelületet vagy projektív síkot egy gömbből származtathatjuk oly módon, hogy a gömbből kivágunk egy kis $ABCD$ négyszöget, majd az AD és CB, valamint az AB és CD íveket összeragasztjuk úgy, hogy az A pont a C-vel, a B pont a D-vel essen egybe. (A süvegfelület a háromdimenziós térben nem ábrázolható ún. áthatás nélkül.)



A Klein-kancsót úgy is tekinthetjük, hogy deformálunk egy hengerfelületet olyan módon, hogy alsó végét bevezetjük a cső belsejébe az „oldalán" keresztül, majd a tetején lévő lyukon át kivezetjük. Végül a cső végét hozzáforrasztjuk a hengerpalást felső határgörbéjéhez, és az oldalsó lyukat is megszüntetjük. (A Klein-kancsó szintén nem valósítható meg átfedés nélkül.)

Herendiné Kónya, E. (2003). Kerékjártó Béla tétele a nyílt felületek topológiájáról. *Polygon,* 12 (1-2), 23-34.

Példák peremes felületekre:



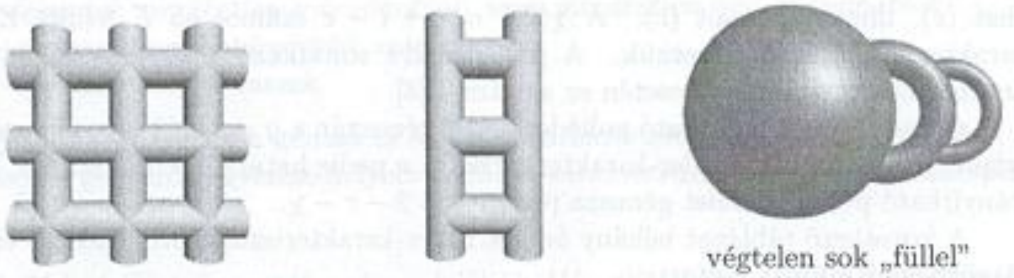
A Möbius-szalagot egy téglalapból származtathatjuk oly módon, hogy két szemközti oldalát összeillesztjük úgy, hogy a szemközti csúcsokat rendeljük egymáshoz.

Hengerpalástot úgy kapunk egy téglalapból, ha szemközti oldalaikat „csavarás” nélkül, a szemközti csúcsok egymáshoz rendelésével illesztjük össze.

Keresztsüveghez úgy juthatunk, hogy a süvegfelületből kivágunk egy körlapot.

Herendiné Kónya, E. (2003). Kerékjártó Béla tétele a nyílt felületek topológiájáról. *Polygon,* 12 (1-2), 23-34.

Példák nyílt felületekre:



rácsfelület — létrafelület — végtelen sok „füllel" ellátott gömb

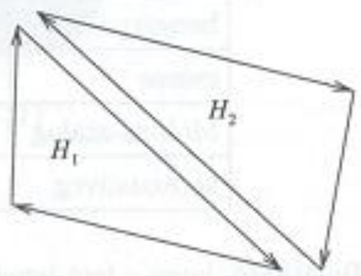
További példák nyílt felületekre:
- végtelen hosszú, vagy perem nélküli hengerfelület
- euklideszi sík
- egy ponton kilyukasztott gömb

4. Invariáns tulajdonságok. Hogyan dönthető el, hogy két felület homeomorf-e, vagy sem? A homeomorfizmus igazolásának egyik lehetséges módszere az, hogy keresünk egy konkrét homeomorfizmust, amely egyik felületet másikba átviszi.

Nehezebbnek tűnik annak igazolása, hogy nem létezik homeomorfizmus. Érdemes tehát megvizsgálni a felületek azon tulajdonságait, amelyek nem változnak meg, ha rajtuk topológiai transzformációt hajtunk végre. Ezeket a tulajdonságokat *topológiai invariánsok*nak nevezzük.

Vizsgáljuk meg először a poliéderfelületek invariáns tulajdonságait!

Irányíthatóság: Legyen adott egy triangulált F poliéderfelület. Rendeljünk irányt a felülethez tartozó háromszögekhez az ábrának megfelelően. A H_1-gyel szomszédos H_2 háromszöget irányítsuk úgy, hogy a közös él ellentétes irányítású legyen. Legyen H_1, H_2, …, H_n, H_1 egy szomszédos háromszögekből álló zárt lánc. Ha létezik olyan lánc a felületen, hogy rajta végigmenve az irányítás megfordul, a felületet nem irányíthatónak nevezzük. Ha ilyen lánc nem létezik, a felület irányítható.



Irányítható felületek például: gömb, henger, tórusz, kör, körgyűrű

Nem irányítható felületek például: Möbius-szalag, Klein-kancsó, süvegfelület

Peremes felületek határgörbéinek száma: Legyen F egy triangulált peremes felület. Azoknak az éleknek az összességét, amelyek csupán egy háromszöghöz tartoznak, a felület határvonalának nevezzük. (Belátható, hogy a határvonal véges számú, egyszerű, azaz önmagát nem metsző, zárt görbére bontható fel). Ezen görbék száma a felület határgörbéinek száma.

Herendiné Kónya, E. (2003). Kerékjártó Béla tétele a nyílt felületek topológiájáról. *Polygon,* 12 (1-2), 23-34.

Euler-karakterisztika: Legyen adott egy F triangulált poliéderfelület. Miután ez véges sok háromszögre bomlik, meg tudjuk számolni a háromszögeket (l), azok éleit (e), illetve csúcsait (c). A $\chi(F) = c + l - e$ számot az F felület Euler-karakterisztikájának nevezzük. A poliéderekre vonatkozó klasszikus Euler-tétel szerint konvex poliéderek esetén ez a szám 2 [8].

Génusz: Egy irányítható poliéderfelület génuszán a $g = 1/2(2 - \chi - r)$ számot értjük, ahol χ a felület Euler-karakterisztikája, r pedig határgörbéinek száma. Nem irányítható poliéderfelület génusza pedig: $g = 2 - r - \chi$.

A következő táblázat néhány felület Euler-karakterisztikáját, génuszát és határgörbéinek számát mutatja:

A felület neve	Euler-karakterisztikája	Génusza	Határgörbéinek száma
gömb	2	0	0
kocka	2	0	0
tórusz	0	1	0
gömb két füllel	-2	2	0
süvegfelület	1	1	0
Klein-kancsó	0	2	0
kör	1	0	1
félgömb	1	0	1
körgyűrű	0	0	2
hengerpalást	0	0	2
csésze	-1	1	1
Möbius-szalag	0	1	1
keresztsüveg	0	1	1

Belátható, hogy a fent ismertetett 4 tulajdonság független a felület háromszögekre bontásától (triangulációjától), valamint az, hogy ezek mindegyike invariáns a felület topológiai transzformációival szemben. [6], [7].

Herendiné Kónya, E. (2003). Kerékjártó Béla tétele a nyílt felületek topológiájáról. *Polygon,* 12 (1-2), 23-34.

5. Poliéderfelületek topológiájának főtétele. *Két poliéderfelület homeomorfiájának szükséges és elégséges feltétele, hogy*

–legyenek mindketten irányíthatóak, vagy mindketten nemirányíthatóak

–egyezzen meg határgörbéik száma

–egyezzen meg génuszuk.

Megjegyzés. Tekintve a génusz és az Euler-karakterisztika közötti összefüggést, a tételben a génuszok egyezése helyett az Euler-karakterisztikák egyezése is szerepelhet.

6. Poliéderfelületek osztályozása. Jelöljük $H(p,r)$-rel azt a felületet, amelyet a gömbfelületből r kör (lyuk) elhagyásával, valamint p számú „fül” ráragasztásával kapunk.

Néhány példa ilyen típusú felületre:

$H(0,0)$

$H(1,0)$

$H(2,0)$

$H(0,1)$

$H(1,1)$

Herendiné Kónya, E. (2003). Kerékjártó Béla tétele a nyílt felületek topológiájáról. *Polygon,* 12 (1-2), 23-34.

Jelöljük $C(q,r)$-rel azt a felületet, amelyet a gömbfelületből r kör (lyuk) elhagyásával, valamint q számú lyuknak keresztsüvegekkel történő beragasztásával kapunk.

$C(1,0)$

$C(1,1)$

$C(2,0)$

Belátható, hogy a poliéderfelületek közötti homeomorfizmus ekvivalenciareláció, így osztályozást indukál. Tehát az összes topológiai szempontból különböző poliéderfelület besorolható valamelyik osztályba. Ezen osztályok lehetséges reprezentánsai a fenti felületek.

A $H(p,r)$ felületek megadják az összes r határgörbével rendelkező, topológiailag különböző irányítható felületet, a $C(q,r)$ felületek pedig az összes r határgörbével rendelkező nem irányítható felületet.

A korábban említett speciális felületek osztályozása:

$H(0,0)$: gömb, kocka
$H(0,1)$: gömbfelület 1 lyukkal, félgömb, körlap
$H(1,0)$: gömbfelület 1 „füllel", tórusz
$H(0,2)$: gömbfelület 2 lyukkal, hengerpalást, körgyűrű
$C(1,0)$: gömbfelület egy keresztsüveggel, süvegfelület, projektív sík
$C(1,1)$: gömbfelület 1 lyukkal és 1 keresztsüveggel, keresztsüveg, Möbius-szalag
$C(2,0)$: gömbfelület 2 keresztsüveggel, Klein-kancsó

Következmény. A topológiai szempontból különböző poliéderfelületek száma megszámlálhatóan végtelen.

Megjegyzések. (a) A $H(p,r)$ felületek génusza megegyezik p-vel, azaz a „fülek" számával, a $C(q,r)$ felületek génusza pedig q-val, azaz a keresztsüvegek számával.

(b) Belátható, hogy egy nem irányítható felületen két keresztsüveg helyettesíthető egy „füllel", tehát például a $C(3,0)$ felület homeomorf az 1 „füllel" és egy keresztsüveggel ellátott gömbfelülettel.

(c) Egy-egy osztály elemei tehát homeomorf módon átvihetők egymásba. Az egyszerűbb esetekben (például a Möbius-szalag és a keresztsüveg esetében) konkrét homeomorfizmusok megkeresését az olvasóra bízzuk.

Herendiné Kónya, E. (2003). Kerékjártó Béla tétele a nyílt felületek topológiájáról. *Polygon,* 12 (1-2), 23-34.

Nyílt felületek génusza. Az F nyílt felület *véges génuszú*, ha létezik olyan A peremes felület, melyre $A \subset F$, és $F \setminus A$ felület (az F-ből A elhagyásával kapott felület) homeomorf az euklideszi sík egy részhalmazával. Ekkor az F nyílt felület génuszát úgy definiáljuk, hogy az egyezzen meg az A peremes felület génuszával.

Például az F egy ponton kiszúrt gömb véges génuszú felület, mert ha tekintjük az A körlemezt a határgörbéjével, akkor az $F \setminus A$ felület homeomorf lesz a sík egy részhalmazával, génusza tehát egyenlő a körlemez génuszával, így 0.

Az F nyílt felület *végtelen génuszú*, ha nem létezik a fenti A peremes felület.

Például a végtelen létra felület, mert bárhogy is választunk egy peremes részfelületet, a különbség tartalmazni fog „létrafokot", tehát nem lesz részhalmaza az euklideszi síknak.

Nyílt felületek irányíthatósági osztályai. Egy F nyílt felület lehet irányítható, vagy nem irányítható. Ez a definíció megegyezik a poliéderfelületekre adott definícióval. Ha F nem irányítható, akkor lehet végesen, vagy végtelenül nem irányítható.

Az F nem irányítható nyílt felületet *végesen nem irányíthatónak* nevezzük, ha van olyan A poliéderfelület, melyre $A \subset F$ teljesül, és $F \setminus A$ irányítható.

Például F legyen egy olyan süvegfelület, amelyet végtelen sok „fülllel" látunk el. Az A részfelület legyen egy keresztsüveg. Ekkor $F \setminus A$ irányítható nyílt felület.

Ha ilyen A felület nem létezik, akkor F-et *végtelenül nem irányíthatónak* nevezzük. Például ha az euklideszi síkon végtelen sok keresztsüveget helyezünk el, végtelenül nem irányítható felülethez jutunk.

Ha F végesen nem irányítható, akkor további két esetet különböztetünk meg: *F párosan (páratlanul) nem irányítható*, ha minden elegendően nagy A peremes részfelületének génusza páros (páratlan), azaz A páros (páratlan) számú keresztsüveget tartalmaz.

Belátható, hogy hasonlóan a poliéderfelületekhez, a fent definiált génusz, illetve az irányíthatósági osztályok a nyílt felületek topológiai invariánsai.

A fenti fogalmak bevezetése után kimondhatjuk a poliéderfelületek topológiájának főtételét nyílt felületekre általánosító Kerékjártó-tételt.

Kerékjártó tétele. *Legyen F', F'' két, azonos génuszú és azonos irányíthatósági osztályba tartozó nyílt felület. F', F'' homeomorf akkor és csak akkor, ha határpontjaik $B(F')$ és $B(F'')$ halmaza között létezik homeomorfizmus, amely $B_1(F')$-t $B_1(F'')$-be, $B_2(F')$-t $B_2(F'')$-be viszi át.*

(Szemléletesen: azonos számú határpontjuk van, a síkszerű, és az irányítható határpontok száma megegyezik, valamint ezek egymáshoz viszonyított helyzete is azonos.)

Herendiné Kónya, E. (2003). Kerékjártó Béla tétele a nyílt felületek topológiájáról. *Polygon,* 12 (1-2), 23-34.

Példák egymással homeomorf nyílt felületekre:

Homeomorf felületek	Génusz	Irányíthatósági osztály	Határpontok
euklideszi sík; egy ponton kiszúrt gömb;	0	irányítható	1 síkszerű
rácsfelület; végtelen sok „füllel" ellátott gömb;	végtelen	irányítható	1 irányítható
euklideszi sík, rajta egy keresztsüveg; egy ponton kiszúrt süvegfelület;	1	végesen, páratlanul nem irányítható	1 síkszerű

A tétel következménye, hogy bármely felület (nyílt vagy zárt) előállítható a következő öt peremes felületelem segítségével:

síkszerű felület
1 határgörbével

síkszerű felület
2 határgörbével

síkszerű felület
3 határgörbével

irányítható felület
2 határgörbével

nem irányítható felület
1 határgörbével

Az előállítás módja a következő:
Veszünk egy felületelemet, minden határgörbéjéhez illesztünk egy másik elemet, majd az így kapott peremes felület minden határgörbéjéhez ismét felületelemeket illesztünk oly módon, hogy két különböző határgörbéhez két különböző

Herendiné Kónya, E. (2003). Kerékjártó Béla tétele a nyílt felületek topológiájáról. *Polygon*, 12 (1-2), 23-34.

felületelem kerüljön. Az eljárást tovább folytatva az összes nyílt ill. zárt felület előállíthatjuk.

Megjegyzés. A topológiailag különböző nyílt felületek halmaza kontinuum számosságú.

1931-ben maga Kerékjártó egy cikkében a határpontok új tárgyalási módját adta, s azzal jutott el a fenti eredményhez. 1932-ben Alekszandrov A topológia egyszerű alapfogalmai c. könyvében írta: *„A kétdimenziós sokaságok topológiai típusainak felsorolása teljesen megoldott, ld. Hilbert és Kerékjártó könyveit."*

Mivel a kétdimenziós esetben alkalmazott módszerek több dimenzióra nem általánosíthatók, így valóban, az 1930-as évek elejére a probléma megoldása lezárult, a későbbi években csak a pontosítások, újrafogalmazások miatt került egyes kutatók érdeklődésének előterébe. Például egy amerikai kutató, Ian Richards, 1960-ban írt Nemkompakt felületek osztályozása c. doktori disszertációjának fő részét a Kerékjártó-tétel újraértelmezése és bizonyítása képezi.

Magát a Vorlesungen über Topologie című könyvet ma is számon tartják, több, napjainkban megjelenő egyetemi tankönyv szerzője ajánlja olvasói figyelmébe.

Köszönetnyilvánítás. Ezúton szeretnék köszönetet mondani Dr. Nagy Péternek, a Debreceni Egyetem docensének, hogy felhívta figyelmemet Kerékjártó eredményeire, és hasznos tanácsaival segítette munkámat. Köszönettel tartozom továbbá Dr. Kovács Zoltánnak, a Debreceni Egyetem docensének az ábrák elkészítésében nyújtott segítségéért.

Irodalom

[1] Ahlfors, L.V.-Sario, L.: *Riemann surfaces*, Princeton, 1960.

[2] Alekszandrov: *A topológia egyszerű alapfogalmai*, Gondolat, Budapest, 1982.

[3] Boltyanszkij, V.G.-Jefremovics, V.A.: *Szemléletes topológia*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

[4] Brahana, H.R.: Systems of circuits on two-dimensional manifolds, *Annals of Mathematics*, 23, 1921.

[5] Hilbert, D., Cohn-Vossen, S.: *Szemléletes geometria*, Gondolat, Budapest, 1982.

[6] Kerékjártó B.: *Vorlesungen über Topologie*, Springer Verlag, Berlin, 1923.

[7] Massey, W. S.: *Algebric Topology: An Introduction*, Harcourt, Brace&World, Inc., 1967.

[8] Richards, I.: *On the classification of noncompact surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 106,1963, 259-269.

Herendiné Kónya Eszter, Kölcsey F. Ref. Tanítóképző Főiskola, Debrecen, Péterfia u. 1.-7., hke@kfrtkf.hu

Herendiné Kónya, E. (2003). Kerékjártó Béla tétele a nyílt felületek topológiájáról. *Polygon*, 12 (1-2), 23-34.