

A geometriai képességek fejlesztésének lehetőségei¹

Herendiné Kónya Eszter

A geometriai képességek meghatározásához a térszemlélet és a vizuális észlelés fogalmából indulunk ki. Az iskolai geometriatanítás azonban túlmutat a térszemlélet fejlesztésén, céljait a tágabb értelemben vett matematikatanítás-tanulás céljaival összhangban mutatjuk be. A geometriai gondolkodás folyamatát elemző elméletek alapját az ún. Van Hiele elmélet jelenti. Ennek vázlatos ismertetése után áttekintjük a jelenlegi alsó tagozatos geometria tananyagot és utalunk azokra a tevékenységekre, melyek annak kompetencia alapú tanítását segítik.

A térszemlélet fogalma

Thurstone (1951) a térszemléletet olyan képességnek tartja, melynek révén 2- és 3-dimenziós objektumokkal mentális műveleteket végezhetünk (idézi Maier, 1999). A térszemlélet egyike a legkomplexebb intelligenciafaktoroknak, így több részfaktoriall jellemezhető. Ezek:

- S(1) Térbeli relációk létesítése, érzékelése: Különböző szögekből látott tárgyak azonosítása ill. a tárgyak felismerése, ha közben elmozdítottuk.
- S(2) Vizualizáció: Egy objektum mentális képének megalkotása.
- S(3) Térbeli tájékozódás: Olyan térbeli elrendezés vizuális felfogása, melynél a megfigyelő a szituáció részese. Olyan képesség, melynek segítségével a valódi vagy a képzeletbeli térben eligazodhatunk.

A térszemlélet összetevőinek meghatározására további elméletek születtek, melyek alapját a Thurstone-féle komponensek képezik (Maier, 1999).

A vizuális észlelés előfeltétele a térszemlélet kialakulásának. Frostig (1978) és Hoffer (1977) az alábbi területeket különbözteti meg (idézi Franke, 2000, 38-43- old.):

- Vizuomotoros koordináció: A látás koordinálása a saját testtel vagy testrésszel.
- Ábrák elkülönítése: Egy komplex háttérből, vagy összetett ábrából részábrák felismerése.
- Észlelési állandóság: Különböző méretű, sorrendű, helyzetű, színű ábrák azonosítása.
- Térbeli kapcsolatok észlelése: Térbeli objektumok közötti kapcsolatok felismerése és leírása.
- Térbeli helyzet észlelése: A tárgyat észlelő személyhez képest a tárgy helyzetének felismerése.
- Vizuális megkülönböztetés: Objektumok közötti hasonlóságok és különbségek felismerése.
- Vizuális emlékezet: Korábban látott objektumok felidézése ismertetőjegyeik alapján.

A geometriatanítás-tanulás céljai

- A tananyaghoz kapcsolódó tudás és jártasságok megszerzése.
- A geometria kettős természetének felismerése, azaz a tanuló legyen képes a geometriai témakört egyszerre tiszta matematikaként látni, ugyanakkor a természeti és a mesterséges világ geometriai aspektusait is észrevenni.
- Geometriai modellek felépítése és alkalmazása matematikán belüli és azon kívüli kontextusokban.

¹ Herendiné Kónya, E. (2007). A geometriai képességek fejlesztésének lehetőségei. In R. Gömöri & M. Mohácsi (Eds.), *Gyermekközpontú pedagógiák*, (pp. 86-93). Debrecen: KFRTKF.

- A geometria és a hétköznapi élet kapcsolata.
- Gondolkodási módszerek, technikák megértése és elsajátítása.
- Matematikai problémák felvetése, elemzése, megoldása.
- Kreativitás, találékonyság.
- Ismerkedés a matematika történetével, filozófiájával.
- Pozitív attitűd kialakítása.
- Általános mentális, szociális képességek fejlesztése.

A hagyományos tanítás tananyagcentrikus, döntően az első célkitűzésre koncentrálnak. Ennek megfelelően, az értékelés, számonkérés is a tananyag egyes részeire kérdez rá, rendszerint egymástól független, zárt végű, írásbeli feladatok formájában. A dolgozatokban a tananyag reprodukálását, alapvető technikák alkalmazását, egyszerű problémák modellezését várjuk el. Fontos az önálló munka mellett az időtényező is.

Mivel a hagyományos mérési módszerek a geometriatanítás céljainak csak igen kis részét képesek vizsgálni, új módszerekre van szükség. Az önálló feladatmegoldás mellett a párban, csoportban végzett munkát is értékelhetjük. Célszerű egy-egy rövid feladat helyett kisebb projekteket, feladatsorokat szerkeszteni. Alsó tagozaton különösen fontos, hogy a geometriatanítás és a számonkérés ne mindig írásbeli (füzet, munkafüzet) legyen, próbáljunk meg különböző munkaeszközökkel végzett tevékenységeket tervezni, és értékelni.

A geometriatanulás folyamata

A matematikai és ezen belül a geometriai fogalmak, kapcsolatok a tanuló értelmezésében specializálódnak, módosulnak. A tanuló már az iskolába lépéskor rendelkezik geometriai tudással, tapasztalatokkal, bár lehet, hogy még nem tudja ezeket a matematika nyelvén megfogalmazni. Amikor új tananyagot tanul, elkerülhetetlenül konfrontálódik meglévő tudásával, intuícióival, tapasztalataival. Ez a tanítás szempontjából sok lehetőséget, de sok akadályt is rejt magában. Az értelmes geometriatanításnak törekednie kell arra, hogy összeegyeztesse az empirikus és az elméleti geometriát a tanulók fejében.

Három ilyen akadályt emelünk ki:

- Az euklideszi geometria legtöbb fogalmának (pl. pont, egyenes, sík) van mindennapi megfelelője. Azonban ha ezeket a fogalmakat túlzottan direkt módon kötjük a fizikai valósághoz, igen nehéz lesz ettől elvonatkoztatni.
- Valamilyen állítás igazolásának módja az empirikus és az elméleti síkon eltér egymástól. Az elméleti síkon az igazolás alapja az érvelés, míg az empirikus síkon az intuíciót követő kísérleti igazolás. „Miért kell olyasmit bizonyítani, ami intuitíve nyilvánvaló bármely megfigyelő számára?”
- A geometriai fogalmak elnevezése nincs mindig összhangban azzal, ahogyan ezeket a fogalmakat a hétköznapi életben használjuk. (sokszög, téglalap, hasonlóság)

A tanulók geometriai tudása saját tapasztalataikban gyökerezik, ezért fontos, hogy megteremtjük azt a tanulási-tanítási környezetet, szituációkat, tevékenységeket, amelyekben a tanulónak lehetősége van a felfedezésre, objektumok, jelenségek, problémák vizsgálatára. Ehhez természetesen az egyéni és frontális munkaformákon túl a kooperatív munkaformákra is szükség van. Lényeges a munka helyszínének kialakítása, mely az osztályterem mellett lehet akár az iskola udvara is. Alsó tagozaton olyan tanulási környezetet kell teremtenünk, ahol lehetőség nyílik az önálló vagy csoportos tevékenységekre, felfedezésekre, s a tanulók használhatják a természetben található vagy mesterségesen előállítható konkrét, tapintható tárgyakat (papír, karton, fa, műanyag).

Ugyancsak tekintetbe kell vennünk a számítógépes oktatóprogramokat, geometriai objektumokat szemléltető szoftvereket, geometriai szerkesztőprogramokat, valamint az internetről elérhető geometriai tartalmú programokat.

A geometriai gondolkodás folyamata

Két holland didaktikus, Pierre van Hiele és Dina van Hiele-Geldorf 1957-ben kifejlesztett egy olyan pedagógiai elméletet, mely alkalmasnak tűnik a geometriai gondolkodás folyamatának megismerésére. Munkájukban a geometriai gondolkodás fejlődésének öt szintjét különböztetik meg.

1. szint, a globális felismerés szintje

Ebben a kezdeti szakaszban a tanulók a geometriai alakzatokat egységes egészként fogják fel, nem képesek elkülöníteni egymástól ezek alkotóelemeit, és nem látják az alakzatok között lévő összefüggéseket sem, de arra képesek, hogy felismerjék az alakzatokat, elkülönítsék egymástól, megnevezzék őket. Például: A formája alapján felismerik a téglalapokat, de a négyzetet nem sorolják közéjük.

Jellemző szófordulatok: „Úgy tűnik”, „Ugyanúgy néz ki”, a geometriai formák leírásához szemléletes szavakat használnak: sarok, ferde téglalap, beugrása van stb. Indoklásaikban az észlelésre támaszkodnak.

Tipikus feladatok: A sík- és térbeli modellezőkészlettel, a papírból kivágott, hajtogatott síkidomokkal dolgoznak. Akár rajzos, akár cselekvéshez kötött feladatról van szó, az utasítás az alakzatok rajzolására, szétválogatására, megnevezésére irányul.

2. szint, az elemzés szintje

A tanulók kezdik felismerni az alakzatok alkotórészeit, megkülönböztetik őket az egésztől, megfigyelik az eltérő tulajdonságokat. Képesé válnak arra, hogy a megfigyelt tulajdonságok alapján csoportosítsák az ismert alakzatokat. Ezek a tulajdonságok azonban elkülönülten, a konkrét alakzatokhoz kötötten jelennek meg, és nem látnak kapcsolatokat egy alakzat különböző tulajdonságai, illetve különböző alakzatok tulajdonságai között. Például megfigyelik a sokszögek oldalait, csúcsait, megkülönböztetik az átlót az oldaltól, de sem a definíció, sem a fogalmak közötti összefüggés megadására nem képesek.

Jellemző szófordulatok: „hasonló”, „különböző”, „mindegyik”, „mindig”, „néha”, „soha” stb.

Tipikus feladatok: Csoportosítások, mérések, rajzolások, modellezések, hajtogatások, vágások, kísérletezgetések segítségével végzett elemzések.

3. szint, az informális dedukció szintje

Tulajdonságaik alapján kapcsolatba hozzák egymással a különböző alakzatokat, így képessé válnak a köztük lévő hierarchia megértésére. Már van értelme a definíciónak, mivel felismerik a tanulók az alakzat tulajdonságai közötti összefüggéseket. Egyszerű, szemlélet alapján elfogadott tényeket felhasználó következtetési lánc megértésére is képesek. Döntéseik indoklásában az észlelés szerepét fokozatosan átveszi az ok-okozati összefüggések keresése. Például: a négyzet téglalap, mert rendelkezik minden olyan tulajdonsággal, amellyel a téglalapok rendelkeznek.

Jellemző szófordulatok: „Ebből következik...”, „Ha..., akkor....”

Tipikus feladatok: Halmazba rendezések, állítások logikai értékének eldöntése, az alakzatok definiáló tulajdonságának, valamint a többi tulajdonságnak a meghatározása.

4. szint, a formális dedukció szintje

Ezen a szinten fogják fel a tanulók a dedukció értelmét. Adott, a szemlélethez közelálló axiómarendszerben képesek ok-okozati összefüggések megfogalmazására, egyszerűbb bizonyítások konstruálására. Képesek állítások általánosítására, szerkesztési feladatok diszkutálására. Megismerkednek különböző bizonyítási eljárásokkal (direkt, indirekt, szintetikus, transzformációs, koordinátageometriai, vektoros, teljes indukciós), egy állítás szükséges és elégséges feltételének fogalmával.

Jellemző szakkifejezések: definíció, tétel, bizonyítás, axióma, alapfogalom.

5. szint, a formális logika szintje

Ez a gondolkodás a Hilbert-féle axiomatikus gondolkodásnak felel meg. Lehetővé válik a formális logikai műveletek, következtetések megértése, elvégzése a konkrét geometriai interpretációtól függetlenül. Jellemző az általános logikai törvények felismerése, a nemeuklideszi geometriák, különböző axiómarendszerek közötti összefüggések megértése.

Jellemző szakkifejezések: a matematikai logika szimbólumai, fogalmai.

A fenti szinteket az iskolai követelményekkel összevetve megállapíthatjuk, hogy az általános iskola 1–2. osztályának az 1. szint, a 3–4. osztályának a 2. szint felel meg. A 3. szint a felső tagozatos anyaggal, a 4. pedig a középiskolással állítható párhuzamba. Az 5. szint már nem szerepel a középiskolai tananyagban, ezzel csupán a matematikával egyetemen, főiskolán foglalkozó hallgatók találkoznak.

Miközben a tanuló egy adott szintről eljut a következőre, az alábbi tanulási fázisokon megy keresztül, függetlenül attól, hogy éppen melyik átmenetről van szó:

- 1. fázis (informálódás): beszélgetések során a tanár feltérképezi, mi az, amit a tanuló már tud az új témáról, a tanuló előtt pedig körvonalazódik, hogy miről lesz szó a következőkben;
- 2. fázis (irányított felfedeztetés): a tanuló konkrét, a tanár által gondosan megtervezett tevékenységek (rajzolás, hajtogatás, modellezés) révén ismerkedik meg az új fogalmakkal;
- 3. fázis (magyarázat): miközben a tanulók saját szavaikkal elmondják egymásnak megfigyeléseikkel, felfedezéseikkel kapcsolatos ötleteiket, a tanár bevezeti a lényeges fogalmak pontos matematikai megnevezéseit;
- 4. fázis (nem irányított felfedeztetés): a tanulók nyitott végű problémák vizsgálatával foglalkoznak a korábban szerzett tapasztalatokat felhasználva;
- 5. fázis (integráció): a tanulók áttekintik és összegzik az újonnan tanultakat, kiegészítik velük meglévő fogalmi és relációs rendszerüket.

A van Hiele-modell főbb jellemzői

- A szintek sorrendje kötött, ahhoz, hogy valaki megfeleljen egy adott szint követelményeinek, előbb meg kell felelnie a megelőző szintek elvárásainak.
- Minden szintnek megvan a saját nyelvezte, saját szimbólumrendszere. Ugyanazt a fogalmat különböző szinten különbözőképpen jelenítjük meg. Ennek a megállapításnak lényeges következménye, hogy a tanárnak ugyanazon a szinten kell tanítania, mint amilyen szinten a tanulók állnak, annak ellenére, hogy az ő gondolkodása magasabb szintű követelményeknek is eleget tesz.
- Mindaz, amit az egyik szinten még csak implicit módon említünk, a következő szinten kifejtjük.
- Ha a tanár magasabb szinten tanít, mint amilyen szinten a tanulói vannak, akkor megértés helyett maximum a tananyag memorizálásáig jutnak el.
- Elképzelhető, hogy az egyes tanulók különböző geometriai fogalmak esetén különböző gondolkodási szinten állnak.

- Egy adott szint elérése elsősorban a tanulás minőségétől függ, nem pedig a tanuló életkorától.

Geometriai témakörök az alsó tagozaton

Térbeli tájékozódás

Az első lépés, hogy a tanulók tudjanak saját testükön, ill. saját testükhöz viszonyítva tájékozódni. Ezt követi a más élőlényekhez ill. tárgyakhoz viszonyított tájékozódás. Az 1-2. osztályban a térbeli viszonzyszavak (előtt-mögött, alatt-felett, jobbra-balra) egyértelmű használatát kell elsajátítani. Ehhez többféle játékos szituációt teremthetünk. Ilyen például az ún. robotjáték, ahol az elrejtett tárgyat a többiek utasításait követve kell a tanulónak megtalálnia. A következő lépés az útvonalak leírása, elmagyarázása, mely elvezet a térképhasználathoz is. Ugyancsak lényeges szerep jut a szituációs játékoknak, idegenek útbaigazításának, egy útvonal bejárásának visszafelé.

Térgeometriai alakzatok

A térgeometriai alakzatok rendszerint közelebb állnak a tanulókhöz, mint a síkbeliek, hiszen a hétköznapi tárgyak, az építőkockák, a gyurmafigurák is ezeket modellezik. Mindig az alakzatok globális tulajdonságaiból célszerű kiindulni, s csak később térni rá annak részeire. A hagyományos testmodelleken túl használhatjuk a gyurmát térbeli alakzatok készítésére, feldarabolására, a testek élvázis modelljét pedig elkészíthetjük szívószálakból és gyurmagolyókból. Kiskockákból készült különböző tulajdonságú építményekkel a térszemlélet mellett a kreativitás is fejleszthető. Egyszerű esetekben készíthetünk alaprajzot, vagy különböző irányú nézeti képeket.

Síkgeometriai alakzatok

Az előzőekhez hasonlóan itt is a tanulói tevékenységeket hangsúlyozzuk. Hajtogatással, sablonok kivágásával, ragasztásával a síkidomok globális tulajdonságai ismerhetők meg, a hajtogatás ezen túl egyszerű állítások igazságának alátámasztására is alkalmas. A damilra felfűzött szívószál-darabokkal tudunk háromszögeket, speciális négyszögeket stb. készíteni. A szöges-lyukas tábla ugyancsak sokoldalúan felhasználható munkaeszköz.

Geometriai transzformációk

Az egybevágósági transzformációk (tükrözés, eltolás, forgatás) mellett a hasonlóságra és az affinitásra is készíthetünk alsó tagozatos feladatokat. Ennél a témakörnél jó lehetőség kínálkozik mind a hétköznapi élettel, mind a többi tantárggyal való szoros kapcsolat érzékeltetésére.

Geometriai mérések

Ez a résztémakör szoros kapcsolatban áll az általános mérés tanítással, az itt megjelenő mérendő mennyiségek a hosszúságmérésből származtathatók. A kerület, terület, felszín, térfogat fogalmának értelmezése, mérése, az alkalmi mértékegységek bevezetése ugyancsak tevékenység centrikus. Alsó tagozaton nem a különböző képletek megtanítására és alkalmazására van szükség, hanem a fogalmak olyan mértékű elmélyítésére, amely lehetővé teszi, hogy a tanulók ezeket a későbbiekben biztonságosan használják, ne keverjék össze. A területfogalom kialakításához a különböző parkettázási feladatok használhatók, a felszín fogalomhoz pedig a testháló elkészítését, szemléltetését lehetővé tevő eszközök.

Napjaink matematikatanításában a geometriának mind kevesebb szerep jut. Az alsó tagozaton ez különösképpen így van. Talán, ha átgondoljuk és kihasználjuk a geometriatanításban rejlő sokrétű képességfejlesztési lehetőséget, akkor sikerül tanítványainkkal is megkedveltetni ezt a szép, s rendkívül gazdag történelmi, filozófiai háttérrel rendelkező tudományterületet.

Irodalom

- [1] Besuden, H. (1990). Räumliche Orientierung: Die rechts/links Beziehung, *Math. Schule*, 28, 7/8. 461-474.
- [2] C. Neményi, E. (2004). *Matematika tantárgypedagógiai füzetek, Geometria*. Budapest: ELTE TÓFK.
- [3] Franke, M. (2000). *Didaktik der Geometrie*. Heidelberg, Berlin: Spektrum.
- [4] Herendiné Kónya, E. (2003). A tanítójelöltek geometriai gondolkodásának jellegzetességei, *Iskolakultúra*, 12. 51-61.
- [5] Herendiné Kónya, E. (2004). Az alsó tagozatos geometriatanítás helyzetének elemzése, In Lőrincz I. (Ed.) *Apáczai-Napok 2003–Tanulmánykötet*, Győr: NYME AJK. (pp. 242-247).
- [6] Maier, P. H. (1999). *Raumliches Vorstellungsvermögen*, Donauwörth: Auer.
- [7] Skemp, R. R. (1975). *A matematikatanulás pszichológiája*, Budapest: Gondolat.
- [8] Szendrei, J. (2005). *Gondolod, hogy egyre megy?* Budapest: Typotex.