

# Geometriai fogalmak tanításának kérdései<sup>1</sup>

Herendiné Kónya Eszter

A fogalomalkotás folyamata, legyen szó tudományos, vagy hétköznapi fogalmakról, kiemelt szerephez jut a kisgyerekek gondolkodásának fejlődésében, alakulásában. Az iskolai matematikatanulás során is évről évre új fogalmakkal ismerkedünk meg. Ezeket először megpróbáljuk beilleszteni, asszimilálni meglévő fogalmi rendszereinkbe, vagy ha ez már nem lehetséges, akkor a fogalmi rendszert módosítjuk, akkomodálunk. A fogalomalkotás folyamán szembekerülünk az egyszerű fogalmak között fennálló alá- és mellérendelő kapcsolatok problémájával. A tapasztalatok azt mutatják, hogy a 9-10 éves tanulók számára ez életkorukból fakadóan nehéz feladat.

A geometria témakör tanítása sok lehetőséget nyújt különböző fogalmi rendszerek, hierarchiák kiépítésére. A tanulmányban néhány konkrét geometriai fogalomra koncentrálna azt vizsgáljuk, hogy milyen tipikus hibákat vétnek a tanulók a fogalomalkotás kezdetén, utalunk a feltárt hibák lehetséges okaira, elkerülésükre, javításukra.

Negyedik, ötödik, hatodik osztályosok ismereteit elemezzük egyrészt az egyenes és a szakasz, másrészt ezek kölcsönös helyzetét leíró *metsző*, *merőleges*, *párhuzamos* fogalmak vonatkozásában.

## Kutatási kérdések

- Hogyan jelennek meg bizonyos geometriai fogalmak a 4-6. osztályos tanulók gondolkodásában?
- Fejlődnek-e ezek a fogalmak a vizsgált 3 év alatt?
- Milyen tipikus fogalmi félreértések adódnak?

## A felmérés körülményei

A felmérést egy debreceni általános iskola három osztályában végeztük 2009 őszén. A vizsgálatban 23 hatodikos, 19 ötödikes és 18 negyedikes tanuló vett részt. Két feladatsort állítottunk össze, mindhárom évfolyam számára ugyanazokat a kérdéseket tettük fel. Az első feladatsor kiértékelésével szerzett tapasztalatokat figyelembe véve készítettük el a második tesztet. Az osztályok az adott tanévben még nem foglalkoztak geometriával, tehát a kérdések megválaszolásához hosszú távú memóriájukból kellett előhívni régebbi ismereteiket.

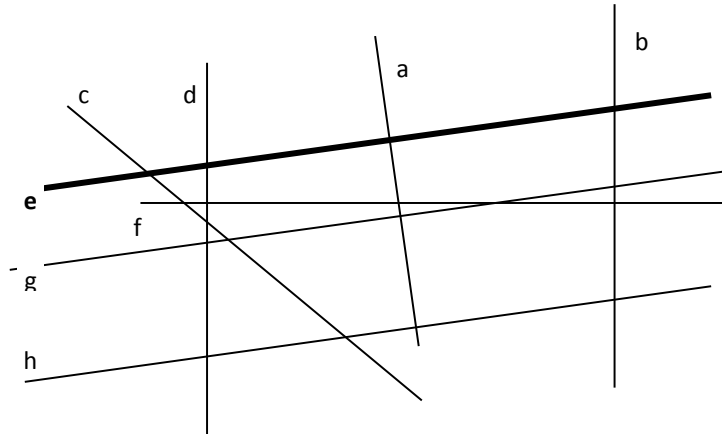
## A metsző, merőleges, párhuzamos egyenesek fogalomrendszerének vizsgálata

### *Feladat*

Figyeld meg az alábbi egyeneseket! (1. ábra)

---

<sup>1</sup> Herendiné Kónya, E. (2010). Geometriai fogalmak tanításának kérdései. In M. Herbszt & S. A. Tóth (Eds.) *VIII. Nemzetközi Tudományos Tantárgy-pedagógiai Konferencia* (pp. 391-397). Baja: EKF.

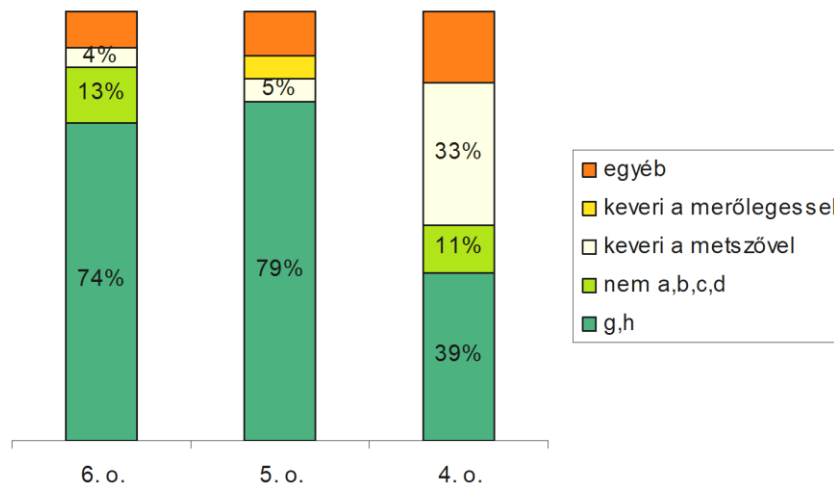


1. ábra

- a) Sorold fel az **e** egyenessel párhuzamos egyeneseket: \_\_\_\_\_  
 b) Sorold fel az **e** egyenest metsző egyeneseket: \_\_\_\_\_  
 c) Sorold fel az **e** egyenessel merőleges egyeneseket: \_\_\_\_\_

a) *Párhuzamos egyenesek felismerése*

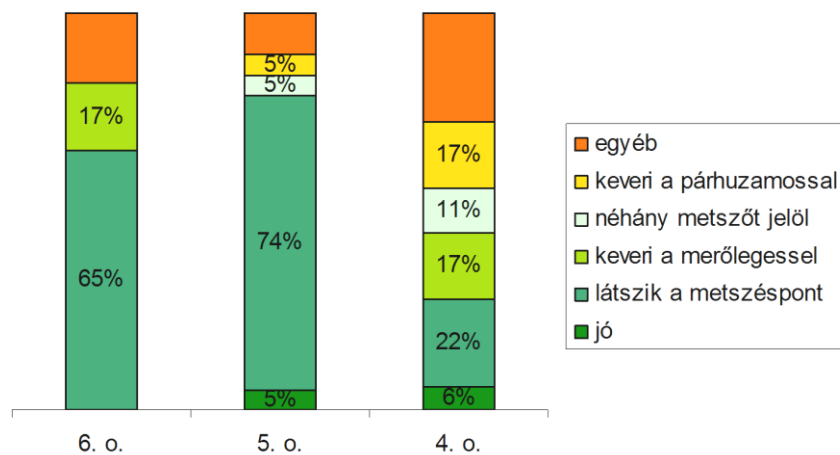
A válaszok megoszlását az 2. ábra mutatja. A helyes megoldást (az **e** egyenessel párhuzamos a **g** és a **h** egyenes) adókon kívül figyeltük azt is, hogy kik azok, akik hibáztak ugyan, de nem jelölték be azokat az egyeneseket, amelyeknek látható az **e**-vel vett metszéspontja. Úgy gondoljuk, hogy ők azok, akiknél a „párhuzamos” fogalma a „nem metszővel” azonosul. Különösen 4. osztályban nagy azoknak az aránya, akik a párhuzamos és a metsző egyeneseket nem tudták különválasztani.



2. ábra

b) *Metsző egyenesek felismerése*

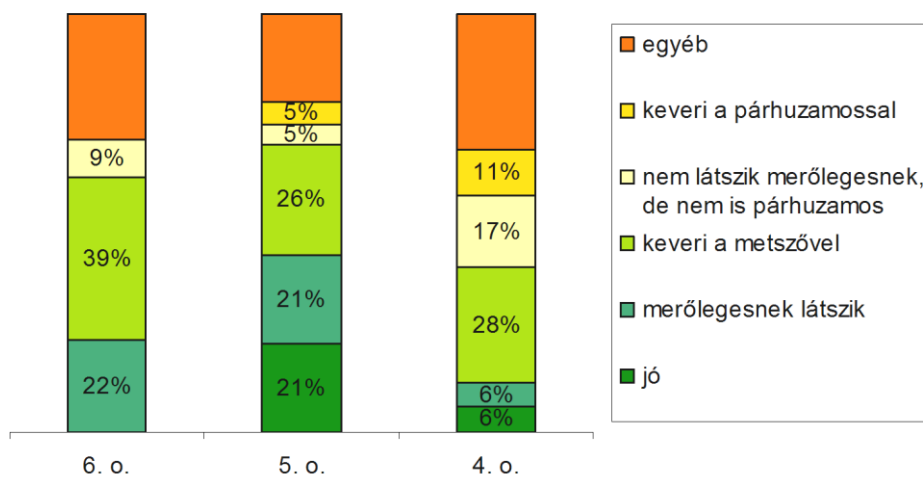
A válaszok megoszlását a 3. ábra mutatja. A legszembetűnőbb tapasztalat az, hogy hibátlan választ (az **e** egyenest metsző egyenesek: **a**, **b**, **c**, **d**, **f**) mindössze 1 ötödikes, és 1 negyedikes tanuló adott. A tipikus hiba az volt, hogy az **f** egyenest a gyerekek nem tekintették metszőnek, mivel ennél nem látszik a metszéspont. Ugyancsak több esetben előfordult az is, hogy csupán az **a**, **b**, **d** egyeneseket jelölték meg, vagyis azokat, amelyek merőlegesnek látszanak. A válaszokból kitűnik, hogy nem világos az egyenes és a szakasz, valamint a metsző és merőleges fogalma közötti különbség. Az előző kérdéshez hasonlóan itt is tapasztaljuk a metsző és a párhuzamos fogalmak felcserélését.



3. ábra

### c) Merőleges egyenesek felismerése

A válaszok megoszlását a 4. ábra mutatja. A helyes válaszok (az  $e$  egyenesre merőleges az  $a$  egyenes) száma nagyon kevés. Tipikus hibaként a merőlegesnek látszó egyenesek ( $a, b, d$ ) bejelölését figyelhetjük meg. Ahogy az előző feladatból is látszik, sok esetben a merőleges és a metsző fogalmak kapcsolata nem tisztázott. Meglepő az az észrevétel, hogy több tanuló merőlegesnek olyan egyeneseket tekintett, amelyek nem párhuzamosak, de nem is látszik a metszéspontjuk az  $e$  egyenessel.



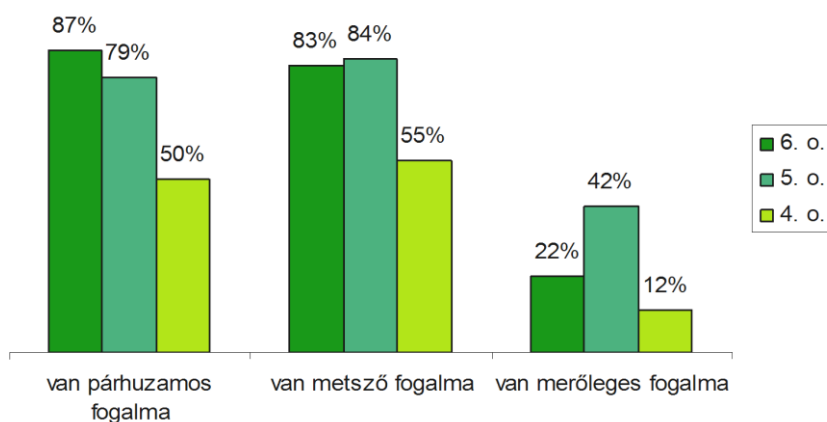
4. ábra

### A három évfolyam eredményeinek összehasonlítása (5. ábra)

Mindhárom feladat esetén megvizsgáltuk, hogy melyek azok a válaszok, amelyek arra engednek következtetni, hogy a tanulók valamilyen szinten már rendelkeznek a vizsgált fogalmakkal, még akkor is, ha ez a szint nem jelenti a fogalom pontos ismeretét.

- Annak a tanulónak van párhuzamos fogalma, aki jól választotta ki a két párhuzamos egyenes közül legalább az egyiket, és nem választott olyat, amelynek látható metszéspontja van az  $e$  egyenessel.
- Azok a tanulók, akik jól választották ki a metsző egyeneseket, vagy csak azt hagyták ki, amelyeknek nem látszik az  $e$ -vel vett metszéspontja, valamint azok, akik csak az  $a, b, d$  egyeneseket, tehát a merőlegesnek látszókat jelölték meg, úgy tekinthetők, mint akik rendelkeznek valamilyen ismerettel a metsző egyenesek fogalmáról.

- c) A merőleges fogalomról azoknak van elképzelése, akik vagy jó választ adtak, vagy csak olyan további egyeneseket jelöltek meg, amelyek csak kis mértékben térnek el a merőlegetől.



5. ábra

Az 5. ábrán jól látszik, hogy a hatodikosok és az ötödikes közel hasonló, 80% körüli arányban ismerik a párhuzamos és a metsző fogalmakat, míg a negyedik osztályosoknál sokkal kevesebben, a gyerekek fele. A merőleges fogalmának ismerete rosszabb képet mutat, mindhárom korosztályban jóval 50% alatt van. A két felsőbb évfolyamon nem látszik lényeges eltérés, míg a negyedik osztályosok eredményei mindhárom esetben kimutathatóan gyengébbek. Ezek a tanulók iskolai keretek között még nem foglalkoztak a vizsgált fogalmakkal, tehát ők hétköznapi ismereteikre hagyatkozva válaszoltak a feltett kérdésekre.

*Feltárt gondolkodási típushibák a párhuzamos, metsző, merőleges fogalmakkal kapcsolatosan*

- Nem tükröződik a metsző és a párhuzamos relációk komplementer jellege.
- Nem tükröződik a metsző és a merőleges egyenesek közötti részalmaz-kapcsolat.
- A metsző és a merőleges mellérendelt, vagy azonos fogalmakként jelenik meg.
- Keverednek a metsző-merőleges-párhuzamos elnevezések.
- Csak azokat tekintik metszőknek, amelyeknél látszik a metszéspont.
- A merőleget „ránézésre” állapítják meg, nem vizsgálják a derékszögben metszést.
- A merőleges és a függőleges fogalma keveredik.

### **A szakasz és az egyenes fogalma közötti különbség vizsgálata**

Az előző feladat elemzéséből kitűnt, hogy a tanulók jó része nem tud különbséget tenni a szakasz és az egyenes között. A probléma alaposabb megismerése érdekében a második felmérésben erre a kérdésre vonatkozó feladatokat is kitűztünk. A következőkben ezek közül ismertetjük kettőnek a tapasztalatait.

*Feladat*

Mi a különbség a szakasz és az egyenes között?

*Tanulói válaszok*

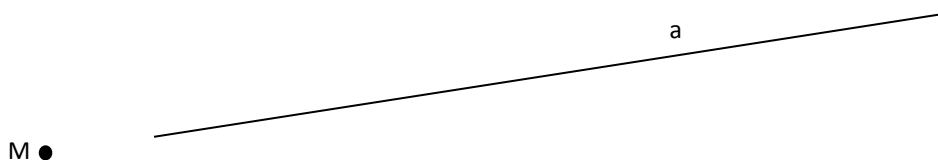
- „Az egyenes végtelen hosszú, a szakasznak van eleje és vége.” (6. o. 6 fő)
- „Az egyenes tovább nyúlik, mint a szakasz. (6. o.)
- „A szakasz egy rész.” (5. o.)
- „Az egyenes egyenes vonal, a szakasz meg nem egyenes vonal.” (6. o.)
- „Az egyenes csak egyenes lehet, de a szakasz lehet hullámos is.” (5. o.)

- „Az, hogy az egyenes álló, a szakasz pedig fekvő.” (5. o.)
- „A szakasz több egyenesből áll.” (5. o.)
- „A szakasznak a végén és az elején van álló egyenes, az egyenesnél pedig nincs.” (5. o. 3 fő)

A fogalmi félreértéseken túl figyelemre méltó az utolsó válasz, mert ez a két fogalmat csupán vizuálisan különbözteti meg, nem érinti a fogalom lényegét.

#### *Feladat*

Az **M** pont rajta van-e az **a** egyenesen? (6. ábra)



6. ábra

#### *Tanulói válaszok*

- Igen, mert az egyenes végtelen hosszú. (6.o. 11 fő)
- Nem. (6. o. 8 fő)
- Nem, mert alatta/mellette/előtte van. (6.o. 1 fő, 5. o. 3 fő, 4. o. 1 fő)
- Nincs, mert nem ér el odáig az a pont. (5. o.)

#### *A fogalmi tévedések lehetséges okai:*

- A metsző, merőleges, párhuzamos relációk hierarchikus kapcsolatrendszerét nem látják át.
- Az egyenesek kölcsönös helyzetének vizsgálata leszűkül a merőleges és a párhuzamos egyenesekre.
- A speciális helyzetű (vízszintes, függőleges) egyenesekkel félreértelmezhetők a fogalmak.
- A metsző és merőleges szavak hasonló hangzásúak.
- A szakasz és az egyenes fogalma nem tisztázott.
- A vizuális szimbólumok mögött nem jelennek meg az absztrakt geometriai fogalmak.

A felsorolt okokra a választ a geometriai gondolkodás életkori sajátosságaiban, a fogalomalkotási folyamat tanításának hiányosságaiban, a vizuális szimbólumok használatának jellegzetességeiben és a köznyelvi jelentés eltéréseiben találhatjuk meg.

### **A geometriai gondolkodás életkori sajátosságai**

A geometriai gondolkodás szintjeivel, a szinteknek az életkori sajátosságokkal történő összevetésével a Van Hiele elmélet foglalkozik. Az alábbiakban áttekintjük, hogy az általunk vizsgált fogalmak, és azok megértési szintjei hogyan jelennek meg az elméletben.

Az első szint a globális felismerés szintje. Ezen a szinten a tanulók a geometriai alakzatok egészének felismerésére képesek, az alakzatokat csak globális képük alapján, „ránézésre” tudják megkülönböztetni egymástól. Így tehát érthető, hogy ők merőlegesnek tekintik azokat az egyeneseket, amelyek merőlegesnek látszanak.

A második szint az elemzés szintje. A tanulók már képesek a globális kép részleteinek megfigyelésére, elemzésére is. Így pl. a merőlegesség megállapításához megvizsgálják, hogy az egyenesek derékszögben metszik-e egymást, vagy a párhuzamosságnál ellenőrzik, hogy az egyik egyenes pontjainak a másik egyenestől vett távolsága ugyanakkora.

A harmadik szint az informális dedukció szintje. Ekkor van lehetőség a fogalmak közötti kapcsolatok megértésére, egyszerűbb fogalmi hierarchiák felépítésére. Ezen a szinten már beszélhetünk arról, hogy a metszőnek speciális esete a merőleges.

Az elmélet szerint nem lehetséges az egyes szintekhez egyértelműen életkorokat, évfolyamokat rendelni, hiszen igen nagy egyéni eltérések is lehetnek a fejlődésben, hozzávetőlegesen azonban az első szintnek az 1-2. évfolyam, a második szintnek a 3-4. évfolyam, míg a harmadik szintnek az 5-6. évfolyam feleltethető meg. Bemutatott vizsgálatunk szerint a tanulók gondolkodása a legtöbb esetben nem haladja meg a globális felismerés szintjét.

### **A fogalomalkotás folyamata**

A hétköznapi és a tudományos fogalmak kialakításának lépései hasonlóak, ezeket a lépéseket lehet és szükséges követni az általunk vizsgált fogalmak esetében is.

1. lépés: Cselekvés, tapasztalatgyűjtés.  
Különböző tárgyi tevékenységekkel létrehozunk metsző (merőleges), párhuzamos „egyenespárokat”. Ez a tevékenység lehet papírhajtogatás, hurkapálcás kirakás, stb.
2. lépés: Lényeges fogalmi jegyek kiszűrése irányított megfigyelésekkel.  
Méréssel ellenőrizzük, hogy a párhuzamos egyenesek közé húzott, mindkét egyenesre merőleges szakaszok hossza egyenlő. Hajtogatott derékszöggel vizsgáljuk a metsző egyenesek szögének nagyságát (derékszöggel egyenlő, derékszögnél kisebb).
3. lépés: Zajok kiszűrése ellenpéldákkal.  
Függőleges, vízszintes helyzetű egyenesek vizsgálata, példák nem speciális helyzetű merőleges ill. párhuzamos egyenespárokra.
4. lépés: Egyszerű fogalmak megnevezése.  
A párhuzamos, metsző, merőleges szavak bevezetése, tudatos használatának kezdete.
5. lépés: A bevezetett fogalmak használata, műveletvégzés.  
Válogatás különböző helyzetű egyenesek között, adott ponton átmenő, adott egyenessel párhuzamos, azt metsző, rá merőleges egyenesek rajzolása, szerkesztése. Metsző egyenesek hajlásszögének megmérése.
6. lépés: Alá-, fölérendelt fogalmak kialakítása, fogalmi rendszerbe helyezés.  
A síkbeli egyenesek kölcsönös helyzetének elemzése. A metsző és a párhuzamos fogalmak komplementer jellegének, ill. a metsző és a merőleges fogalmak hierarchikus kapcsolatának felismerése.
7. lépés: Komplex fogalmi struktúrák (szkémák) kialakítása.  
A síkban megismert kapcsolatok kiterjesztése a térelemekre. Nem csak egyenesek, hanem szakaszok lehetséges kölcsönös helyzeteinek elemzése.

### **Vizuális szimbólumok**

A geometriai fogalmak jelölésére, szemléltetésére vizuális szimbólumokat használunk. Ennek előnye, hogy a rajz jól felidézi a fogalom tulajdonságait, a fogalmak közötti viszonyok jól látszanak. Ugyanakkor hátrányt jelenthet az, hogy az ábrázolás kevésbé absztrakt, konkrétabb szint, tehát az absztrakció egy részét a tanulóknak maguknak kell elvégezni. Ezzel a problémával találkozunk a szakasz és az egyenes fogalmának megkülönböztetésénél is, hiszen rajzolni csak szakaszt tudunk.

## Köznyelvi jelentés

A Magyar értelmező kéziszótárban valamint az Etimológiai szótárban a vizsgált matematikai fogalmakkal kapcsolatban az alábbiakat találjuk:

*metsz.:*

- Éles eszközzel levág valamit.
- Vés valamibe.
- metszőolló, metszőfog, metsző hideg, metsző fájdalom

*párhuzamos:*

- összetett szó, párban+(huzamos = tartós), nyelvújítás kori matematikai-geometriai műszó
- egyidejű (párhuzamos közlekedés, párhuzamos beszéd)
- valamihez hasonló (párhuzamos életutak)

*merőleges:*

- „származékszó, az elavult merőleg=függőleges melléknév –s képzős alakja, nyelvújítás kori tudatos szóalkotás”

Tekintettel arra, hogy a tanulók a felsorolt szavakkal hamarabb találkoznak a mindennapi életben, mint a matematikában, nem hagyhatjuk figyelmen kívül a hozzájuk kapcsolódó jelentésárnyalatokat. A fogalmak tisztázatlanságához mindezek mellett az is hozzájárulhat, hogy a magyarban a metsző és a merőleges szavak hasonló hangzásúak.

## Összegzés

A tanulmányban bemutatott fogalmak elemzése rávilágít arra, hogy a matematika, ezen belül a geometria tanítása igen sok lehetőséget nyújt, ugyanakkor sok buktatót is rejt a tanulók fogalmi gondolkodásának fejlesztési folyamatában. Mindezekre hívja fel a figyelmet az alábbi két idézet is:

„... a tanulás kezdetén kialakított, nem megfelelő szkémák (fogalmi struktúrák) a későbbi fogalmak asszimilációját sokkal nehezebbé, esetleg lehetetlenné teszik.” (Skemp, 1975)

„Néha azért vezetünk be fogalmakat szűkebb tartalommal, mert annak a megértésére van még csak esély. A fogalmi bővítés, kiterjesztés azonban nem maradhat el.” (Szendrei, 2005)

## Irodalom

- [1] Ambrus, A. (1995). *Bevezetés a matematika didaktikába*. Budapest: ELTE Eötvös.
- [2] Herendiné Kónya, E. (2003). A tanítójelöltek geometriai gondolkodásának jellegzetességei, *Iskolakultúra*, 12, 51-61.
- [3] Herendiné Kónya, E. (2004). Az alsó tagozatos geometriatanítás helyzetének elemzése, In. Lőrincz I. (Ed.) *Apáczai-Napok 2003–Tanulmánykötet*, Győr: NYME AJK. (pp. 242-247).
- [4] Nahalka, I. (1998). A tanulás, In I. Falus (Ed.): *Didaktika*, (pp. 117-155). Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.
- [5] Pusztai, F. (Ed.). (2003). *Magyar Értelmező Kéziszótár*. Budapest: Akadémiai.
- [6] Skemp, R. R. (1975). *A matematikatanulás pszichológiája*, Budapest: Gondolat.
- [7] Szendrei, J. (2005). *Gondolod, hogy egyre megy?* Budapest: Typotex.
- [8] Vigotszkij, L. (2000). *Gondolkodás és beszéd*. Budapest: Trezor.
- [9] Zaicz, G. (Ed.). (2006). *Etimológiai szótár*, Budapest: Tinta.