A vektoranalízis alapjai

Vincze Csaba

Debreceni Egyetem

2021. március 18.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A többváltozós analízisből ismert, hogy a vektorértékű és/vagy vektorváltozós leképezések deriváltja minden pontban egy lineáris leképezés.

1. Definíció. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ egy összefüggő, nyílt halmaz. Az $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés differenciálható értelmezési tartománya $p \in U$ pontjában, ha van olyan $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, melyre*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p) - \varphi(h)}{\|h\|} = 0.$$

A szokásos jelöléssel $f'(p) := \varphi$. A p pontbeli $v \neq 0$ irányban vett iránymenti deriváltat a

$$D_v f(p) := \lim_{t \to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}$$

képlet definiálja, amennyiben a szóban forgó határérték létezik. Speciálisan az

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

választás mellett a megfelelő változó szerinti parciális deriváltakat kapjuk.

1. Feladat. Számítsa ki az alábbi függvények elsőrendű deriváltjait:

$$f(x) = 3 + x^2 \tan \sin x, \quad f(x, y) = x^3 \ln y + 2y^2 x + 5, \quad f(x, y, z) = \frac{z}{xz + y}.$$

Megoldás:

$$f'(x) = 2x \tan \sin x + x^2 \frac{1}{\cos^2 \sin x} \cos x,$$

$$D_1 f(x, y) = 3x^2 \ln y + 2y^2,\ D_2 f(x, y) = \frac{x^3}{y} + 4yx,$$

$$D_1 f(x, y, z) = -\frac{z^2}{(xz + y)^2},\ D_2 f(x, y, z) = -\frac{z}{(xz + y)^2},\ D_3 f(x, y, z) = \frac{xz + y - zx}{(xz + y)^2} = \frac{y}{(xz + y)^2}.$$

2. Feladat. Számítsa ki az $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x - 2y - 1$ függvény másodrendű parciális deriváltjait és állapítsa meg, hogy van-e szélsőértéke.

Megoldás: mivel

$$D_1 f(x, y) = 2x - 1,\ D_2 f(x, y) = 4y - 2,$$

szélsőérték lehetséges az első deriváltak zérushelyeiként adódó $P(1/2, 1/2)$ pontban. Rátérve a másodrendű deriváltakra

$$\begin{pmatrix} D_1 D_1 f & D_1 D_2 f \\ D_2 D_1 f & D_2 D_2 f \end{pmatrix} (x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

függetlenül a kiértékelés helyétől. A másodrendű parciális deriváltak mátrixa tehát pozitív definit a stacionárius pontban, vagyis minimumhelyről van szó.

3. Feladat. Határozza meg az $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ függvény szélsőértékeit az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ feltétel mellett.

Megoldás: alkalmazva a Lagrange-féle multiplikátoros eljárást,

$$F(x, y, z, \lambda) := x - 2y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1),$$

ami a

$$D_1F(x,y,z,\lambda) = 1-2\lambda x = 0,\ D_2F(x,y,z,\lambda) = -2-2\lambda y = 0,\ D_3F(x,y,z,\lambda) = 2-2\lambda z = 0,$$

$$D_4F(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$$

egyenletrendszert adja. Az

$$x = \frac{1}{2\lambda},\ y = -\frac{1}{\lambda},\ z = \frac{1}{\lambda}$$

helyettesítésekkel az utolsó egyenletből $\lambda = \pm 3/2$, azaz $P(1/3,-2/3,2/3)$ és $Q(-1/3,2/3,-2/3)$ adódik. Mivel $f(P) = 3$ és $f(Q) = -3$, ezért P az f lineáris funkcionál maximum-, Q pedig a minimumhelye az egységgömbön.

4. Feladat. Számítsa ki az alábbi integrálok értékét, illetve határozza meg a primitív függvényt:

$$\int_0^1 r^2 + \frac{r}{2} + 6\,dr,\quad \int_0^\pi \cos^2 t\,dt,\quad \int_0^1 \ln x\,dx,\quad \int t\sqrt{1+2t^2}\,dt,\quad \int \frac{6x}{x^2+x-2}\,dx,\quad \int \cos\ln t\,dt.$$

Megoldás: a polinomiális kifejezés integrálása rutinfeladat. A másodfokú trigonometrikus kifejezés integrálásához alkalmazzuk a

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos^2 t - (1-\cos^2 t) = 2\cos^2 t - 1 \quad\Rightarrow\quad \cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$$

linearizáló formulát:

$$\int_0^\pi \cos^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^\pi = \pi.$$

Az improprius integrál értéke

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \int_0^1 x'\ln x\,dx = [x\ln x]_0^1 - \int_0^1 x\ln' x\,dx = [x\ln x]_0^1 - \int_0^1 1\,dx =$$

$$-1 + \lim_{x\to 0^+} x\ln x,$$

ahol a L' Hospital szabály szerint

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

A soron következő két integrál meghatározásához alkalmazzuk az

$$\int f'(x)f^\alpha(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\quad (\alpha \neq -1),$$

$$\int f'(x)f^\alpha(x)\,dx = \ln|f(x)| + C\quad (\alpha = -1)$$

integrálási szabályokat. Az $\alpha = 1/2$ esetben

$$\int t\sqrt{1+2t^2}\,dt = \frac{1}{4}\int 4t\sqrt{1+2t^2}\,dt = \frac{1}{4}\frac{(1+2t^2)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{6}(1+2t^2)^{3/2} + C,$$

míg az $\alpha = -1$ esetben (a számláló a nevező deriváltja):

$$\int \frac{6x}{x^2+x-2}\,dx = 3\int \frac{2x}{x^2+x-2}\,dx = 3\left(\int \frac{2x+1}{x^2+x-2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+x-2}\,dx\right) =$$

$$3\ln|x^2+x-2| - 3\int \frac{1}{x^2+x-2}\,dx,$$

ahol

$$\int \frac{1}{x^2+x-2}\,dx = \int \frac{1}{(x+1/2)^2-9/4}\,dx = \frac{4}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2-1}\,dx = -\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}\,\operatorname{arctanh}\left(\frac{2x+1}{3}\right)+C.$$

Legvégül pedig egy helyettesítéses integrálás: $t = e^x$, azaz

$$\int \cos\ln t\,dt = \int e^x\cos x\,dx.$$

Kétszer parciálisan integrálva

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\cos x + \int e^x\sin x\,dx = e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx.$$

Átrendezéssel pedig

$$\int e^x\cos x\,dx = \frac{e^x\cos x + e^x\sin x}{2} + C.$$

A $h = tv$ helyettesítéssel kapjuk, hogy egy differenciálható leképezés iránymenti deriváltjaira fennáll az

$$D_v f(p) = f'(p)(v) \tag{1}$$

összefüggés. Mivel a vektorműveleteket koordinátánként végezzük el,

$$D_v f(p) = \left(\lim_{t\to 0}\frac{f^1(p+tv)-f^1(p)}{t},\ldots,\lim_{t\to 0}\frac{f^m(p+tv)-f^m(p)}{t}\right),$$

ahol $f^1,\ldots,f^m\colon U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ az $f\colon U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ leképezés koordinátafüggvényei. Speciálisan

$$f'(p)(e_j) = D_j f(p) = (D_j f^1(p),\ldots,D_j f^m(p)).$$

Mindezt figyelembe véve az $f'(p)$ lineáris leképezést a kanonikus bázisra vonatkozóan a $D_j f^i(p)$ ún. Jacobi-mátrix reprezentálja, ahol i sor-, j pedig oszlopindex.

5. Feladat. Határozza meg a síkbeli $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ polárkoordináta-transzformáció Jacobi-mátrixának a determinánsát és integrálja az $f(x,y) = xy$ függvényt az origó középpontú, egységsugarú körlemez fölött.

Megoldás: a Jacobi mátrix

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix},$$

a determináns pedig r. A helyettesítéses integrálás tétele szerint

$$\int_{x^2+y^2\le 1} xy\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos\varphi\sin\varphi\,dr\,d\varphi = \left[\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right]_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\,dr = 0.$$

6. Feladat. Határozza meg a térbeli $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\cos\theta\sin\varphi$, $z = r\sin\theta$ polárkoordináta-transzformáció Jacobi-mátrixának determinánsát és integrálja a konstans 1 függvényt az origó középpontú, R sugarú gömbtest fölött.

Megoldás: a Jacobi mátrix

$$\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix},$$

a determináns pedig (pl. a harmadik sor szerint kifejtve) $-r^2\cos\theta$. Ennélfogva

$$\int_{x^2+y^2+z^2\leq 1} 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 r^2\cos\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = 4\frac{r^3\pi}{3}.$$

7. Feladat. Határozza meg a térbeli $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ hengerkoordináta-transzformáció Jacobi-mátrixának a determinánsát és vezesse le az egyenes körhenger ismert térfogatképletét.

Megoldás: a Jacobi mátrix

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a determináns pedig r. Ennélfogva

$$\int_{x^2+y^2\leq R,\ 0\leq z\leq m} 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^m\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\varphi\,dz = R^2\pi m.$$

Jóllehet a differenciálhatóság maga után vonja az iránymenti (speciálisan: a parciális) deriváltak létezését, a megfordítás általában nem igaz. Ha azonban a parciális deriváltak léteznek a p pont valamely környezetében és a p pontban folytonosak, akkor a leképezés differenciálható a p pontban.

8. Feladat. Mutassa meg, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

skalármező iránymenti deriváltjai léteznek az értelmezési tartomány bármely pontjában, de a skalármező nem differenciálható az origóban.

Útmutatás. Vegyük észre, hogy f elsőrendű homogén, ami azt jelenti, hogy bármely v nemzérus vektor esetén $f(tv) = tf(v)$. Ennélfogva $D_v f(0,0) = f(v)$. A leképezés origóbeli differenciálhatóságát feltételezve $f'(0,0)(v) = f(v)$, azaz f egy lineáris funkcionál, ami nyilvánvalóan ellentmondás:

$$f(1,0) = 0, \quad f(0,1) = 0, \quad \text{de} \quad f(1,1) = \frac{1}{2}.$$

2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f leképezés k-szor folytonosan differenciálható, ha parciális deriváltjai a k-adrendűekkel bezárólag léteznek és folytonosak.*

1.1. A klasszikus vektoranalízis deriváltoperátorai

Röviden áttekintjük a vektorértékű és/vagy vektorváltozós leképezések legfontosabb speciális típusait. Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ egy összefüggő nyílt halmaz és tekintsük az $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezést. Az $m = 1$ speciális esetben skalármezőkről, az $n = 1$ speciális esetben görbékről, míg az $n = m$ speciális esetben vektormezőkről beszélünk, legalábbis alkalmas simasági és regularitási feltételek teljesülése esetén.

Ha $m = 1$ (skalármező), akkor az $f'(p)$ derivált egy $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, mely - a Riesz-féle reprezentációs tétel értelmében - egy alkalmas vektorral vett skaláris szorzást jelent. Ez éppen a pontbeli gradiensvektor, a reprezentáns pedig $1 \times n$ típusú mátrix.

Ha $m = n$ (vektormező), akkor az $f'(p)$ derivált egy $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, mely kvadratikus mátrix segítségével reprezentálható. Az ún. skalárinvariánsok a reprezentáló M mátrix megválasztásától független $\det(M - \lambda E)$ karakterisztikus polinom együtthatói, ahol E a megfelelő méretű egységmátrix. A főegyüttható $(-1)^n$, míg a polinom konstans tagja a mátrix determinánsa. Ezt könnyű látni, ha a polinomot kiértékeljük a $\lambda = 0$ helyen. Az $(n-1)$-edik fokú tag együtthatója pedig az átlósösszeg $(-1)^{n-1}$-szerese. Az átlósösszeg az adott pontbeli divergencia. A felsorolt speciális eseteknek megfelelően további deriváltoperátorok vezethetők be a lineáris leképezések mátrixreprezentása és invariánsai segítségével. A vektormezők rotációját például vektorinvariánsként fogjuk értelmezni. Ezek a deriváltoperátorok tehát a deriváltat jellemző invariáns skalár-, illetve vektormennyiségeket rendelnek hozzá a differenciálható leképezésekhez. Kompozíciójuk segítségével további operátorok képezhetők: a divergencia és a gradiens kompozíciója például az ún. Laplace-operátor.

2. Skalármezők: szintfelületek és gradiens

3. Definíció. *Legyen $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy differenciálható skalármező. A*

$$\langle grad\, f(p), v\rangle = f'(p)(v)$$

összefüggéssel definiált $grad\, f(p)$ vektort a skalármező p-beli gradiensének nevezzük.

Ismeretes a lineáris algebrából, hogy a koordinátatér minden lineáris funkcionálja egy alkalmas vektorral vett skaláris szorzást jelent - a definíció tehát értelmes. Az (1) formula alapján pedig nyilvánvaló, hogy

$$\mathrm{grad}\, f(p) = (D_1 f(p), \ldots, D_n f(p)),$$

hiszen

$$f'(p)(v) = v^1 f'(p)(e_1) + \ldots + v^n f'(p)(e_n) = \langle (D_1 f(p), \ldots, D_n f(p)), v\rangle\,.$$

4. Definíció. *Legyen $V \subset \mathbb{R}^k$ összefüggő, nyílt halmaz. A $\sigma\colon V \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható leképezést k-dimenziós parametrizált felületnek nevezzük, ha az értelmezési tartomány bármely $q \in V$ pontja esetén a*

$$D_1\sigma(q) = (D_1\sigma^1(q), \ldots, D_1\sigma^n(q)),$$

$$D_2\sigma(q) = (D_2\sigma^1(q), \ldots, D_2\sigma^n(q)),$$

.

.

.

$$D_k\sigma(q) = (D_k\sigma^1(q), \ldots, D_k\sigma^n(q))$$

parciális deriváltvektorok lineárisan függetlenek; speciálisan $k \leq n$ és a Jacobi-mátrix maximális rangú.

A $\sigma(q) = p$ pontra illeszkedő és a parciális deriváltvektorok által kifeszitett k-dimenziós lineáris sokaság a felület p-beli érintősokasága. A $k = 1$ speciális esetben görbéről és érintőegyenesről, míg a $k = 2$ esetben felületről és érintősíkról beszélünk.

A gradiensvektor geometriai jellemzéséről szól a következő tétel.

1. Tétel. *Legyen $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy folytonosan differenciálható skalármező és tegyük fel, hogy a gradiens sehol sem tűnik el. Ekkor a skalármező szinthalmazai lokálisan $(n-1)$-dimenziós parametrizált felületek és a gradiensvektor minden pontban merőleges az érintősokaságra.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a klasszikus inverzleképezés-tételt: ha egy folytonosan differenciálható $F: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés Jacobi-mátrixának a determinánsa sehol sem zérus, akkor lokálisan invertálható, azaz értelmezési tartománya bármely pontjának van olyan nyílt környezete, mely fölött F kölcsönösen egyértelmű és inverzével együtt folytonosan differenciálható.

Az írásmunkát egyszerűsítendő, tekintsük az $n = 3$ esetet és tegyük fel, hogy a p ponban $D_3 f(p) \neq 0$. Az általánosság sérelme nélkül feltehető az is, hogy $f(p) = 0$, azaz a 0 valós számhoz tartozó

$$f^{-1}(0) := \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = 0\} \tag{2}$$

szinthalmazt vizsgáljuk. Legyen

$$F: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) := (x - p^1, y - p^2, f(x, y, z))$$

és vegyük észre, hogy $F(p) = 0$. Mivel a Jacobi-mátrix determinánsa a p pontban éppen a nemzérus $D_3 f(p)$ parciális derivált, ezért létezik a folytonosan differenciálható $F^{-1}: U_0 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ inverzfüggvény az origó valamely U_0 környezete fölött és bármely $(x, y, z) \in U_0$ esetén

$$f \circ F^{-1}(x, y, z) = z.$$

Az F^{-1} inverzleképezés megszorítása a $V := U_0 \cap \mathbb{R}^2$ halmazra a (2) szintfelület $\sigma: V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ paraméterezését adja a p pont körül. Mivel a paramétertartomány fölött

$$f \circ \sigma = 0$$

teljesül, azt kapjuk, hogy $(f \circ \sigma)'(0, 0) = 0$. Másfelől viszont leképezések kompozíciójának deriváltmátrixa a deriváltmátrixok szorzata, azaz

$$0 = (D_1 f, D_2 f, D_3 f)_{p=\sigma(0,0)} \begin{pmatrix} D_1\sigma^1 & D_2\sigma^1 \\ D_1\sigma^2 & D_2\sigma^2 \\ D_1\sigma^3 & D_2\sigma^3 \end{pmatrix}_{(0,0)},$$

ami a mátrixszorzás szabályát figyelembe véve pontosan azt jelenti, hogy a gradiensvektor a p pontban merőleges az érintősíkot kifeszítő $D_1\sigma(0, 0)$ és $D_2\sigma(0, 0)$ parciális deriváltvektorokra. $\square$

9. Feladat. Vezesse le az ellipszis-, a hiperbola- és a parabolaérintők általános egyenletét. Mi az analitikus képletek geometriai jelentése?

Megoldás: tekintsük a szóban forgó alakzatok (nullára rendezett) kanonikus egyenleteit:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0,\ y^2-2px=0$$

és számítsuk ki a bal oldalon szereplő kifejezések gradiensét az alakzat $P(x_0,y_0)$ pontjában:

$$(2x_0/a^2,2y_0/b^2),\ (2x_0/a^2,-2y_0/b^2),\ (-2p,2y_0).$$

Ezek a pontra illeszkedó érintők normálisai, az egyenletek tehát

$$\frac{2x_0}{a^2}x+\frac{2y_0}{b^2}y=\frac{2x_0}{a^2}x_0+\frac{2y_0}{b^2}y_0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1,$$

$$\frac{2x_0}{a^2}x-\frac{2y_0}{b^2}y=\frac{2x_0}{a^2}x_0-\frac{2y_0}{b^2}y_0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x_0}{a^2}x-\frac{y_0}{b^2}y=1,$$

$$-2px+2y_0y=-2px_0+2y_0^2 \quad\Rightarrow\quad -px+y_0y=y_0^2/2.$$

Ismeretes a kúpszeletek elemi geometriájából, hogy az ellipszis-érintő felezi az érintési pontba mutató rádiuszvektorok mellékszögét, a hiperbola-érintő felezi az érintési pontba mutató rádiuszvektorok szögét, a parabolaérintő pedig felezi az érintési pontba mutató rádiuszvektor és az érintési pontból a vezéregyenesre bocsátott merőleges szögét. Ez az oka annak, hogy a parabola tengelyével párhuzamos sugarak a fókuszon haladnak át a visszaverődés után.

10. Feladat. Irja fel az

$$\sigma(u,v):=(u-\frac{u^3}{3}+uv^2,v-\frac{v^3}{3}+vu^2,u^2-v^2)$$

Enneper-féle minimálfelület érintősíkjának egyenletét a $p=\sigma(1,-1)$ pontban.

Útmutatás: az érintősíkot az $\sigma(1,-1)=(5/3,-5/3,0)$ pontra kell illesztenünk, a normális pedig a paramétervonal-érintők vektoriális szorzata:

$$D_1\sigma(1,-1)\times D_2\sigma(1,-1)=(1,-2,2)\times(-2,1,2)=-(6,6,3),$$

ahonnan az érintősík egyenlete

$$2(x-5/3)+2(y+5/3)+z=0,$$

hiszen a normálvektor fölött nemzérus skalárszorzó erejéig szabadon rendelkezünk.

11. Feladat. Irja fel az

$$x^2+y^2=25$$

körhenger érintősíkjának egyenletét a $(3,4,12)$ pontban.

Megoldás: A gradiensmódszer szerint

$$D_1 f(x, y, z) = 2x,\ D_2 f(x, y, z) = 2y,\ D_3 f(x, y, z) = 0,$$

ahonnan a normálvektort az $x = 3$, $y = 4$ és $z = 12$ helyettesítésekkel kapjuk. Az egyenlet tehát

$$3(x - 3) + 4(y - 4) = 0;$$

az érintősík párhuzamos a z-tengellyel nyilvánvaló geometriai okokból (ld. a henger alkotói).

12. Feladat. Irja fel az

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{3} = 10$$

ellipszoid érintősíkjának egyenletét a $(2, 5, 3)$ pontban.

Megoldás: A gradiensmódszer szerint

$$D_1 f(x, y, z) = x,\ D_2 f(x, y, z) = \frac{2}{5} y,\ D_3 f(x, y, z) = \frac{2}{3} z,$$

ahonnan a normálvektort az $x = 2$, $y = 5$ és $z = 3$ helyettesítésekkel kapjuk. Az egyenlet tehát

$$x + y + z - 10 = 0.$$

13. Feladat. Irja fel az

$$x^2 + y^2 - z = 0$$

forgásparaboloid érintősíkjának egyenletét a $(\sqrt{2}, -1, 3)$ pontban.

Megoldás: A gradiensmódszer szerint

$$D_1 f(x, y, z) = 2x,\ D_2 f(x, y, z) = 2y,\ D_3 f(x, y, z) = -1,$$

ahonnan a normálvektort az $x = \sqrt{2}$, $y = -1$ és $z = 3$ helyettesítésekkel kapjuk. Az egyenlet tehát

$$2\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) - 2(y + 1) - (z - 3) = 0.$$

14. Feladat. Irja fel az

$$3x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$$

forgáskúp érintősíkjának egyenletét a $(\sqrt{2}, 1, 3)$ pontban.

Megoldás: A gradiensmódszer szerint

$$D_1 f(x, y, z) = 6x,\ D_2 f(x, y, z) = 6y,\ D_3 f(x, y, z) = -2z,$$

ahonnan a normálvektort az $x = \sqrt{2}$, $y = 1$ és $z = 3$ helyettesítésekkel kapjuk. Az egyenlet tehát

$$\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + (y - 1) - (z - 3) = 0.$$

15. Feladat. Irja fel az

$$x^2\left(1-\frac{6}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+y^2\left(1-\frac{6}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+z^2=2$$

tórusz érintősíkjának egyenletét a $(3\sqrt{2}, \sqrt{7}, -1)$ pontban.

Megoldás: A gradiensmódszer szerint

$$D_1f(x,y,z)=2x\left(1-\frac{6}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+2x^2\left(1-\frac{6}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot(-6)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2x}{(x^2+y^2)^{3/2}}+$$

$$2y^2\left(1-\frac{6}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot(-6)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2x}{(x^2+y^2)^{3/2}}=$$

$$2x\left(1-\frac{6}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+12x^3\left(1-\frac{6}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}+$$

$$12y^2x\left(1-\frac{6}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

$$D_2f(x,y,z)=2y\left(1-\frac{6}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+12y^3\left(1-\frac{6}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}+$$

$$12x^2y\left(1-\frac{6}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

(szimmetria-okokból), végül pedig

$$D_3f(x,y,z)=2z.$$

A normálvektort az $x=3\sqrt{2}$, $y=\sqrt{7}$ és $z=-1$ helyettesítésekkel kapjuk, a síkot pedig a megadott pontra kell illesztenünk: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

3. Vektormezők: divergencia, Laplace-operátor és rotáció

5. Definíció. *Egy $X\colon U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ differenciálható vektormező* divergenciáján *a*

$$div\, X(p) := trace\; X'(p)$$

képlettel definiált skalármezőt értjük.

Jól ismert a lineáris algebrából, hogy egy lineáris transzformáció bármely mátrixreprezentánsának az átlósösszege ugyanaz a szám - ez tehát a lineáris transzformációt jellemző skalárinvariáns. További skalárinvariánsnak tekinthető a mátrixreprezentánsok közös determinánsa, illetve - teljes általánosságban - a mátrixreprezentáns segítségével képzett karakterisztikus polinom együtthatói az $(n-1)$-edik fokú taggal bezárólag. Deriváltoperátorok kompozíciójaként áll elő a Laplace-operátor, mely skalármezőkön hat a

$$\Delta f := \mathrm{div}\ \mathrm{grad}\, f$$

formula szerint - az ún. harmónikus skalármezők éppen a Laplace-operátor nullterét feszítik ki:

$$\Delta f = 0.$$

Ha $\Delta f \geq 0$, akkor a skalármezőt szub-, míg $\Delta f \leq 0$ esetén szuperharmónikusnak nevezzük.

1. Állítás. (Kiszámítási formulák)

$$div\, X = D_1 X^1 + \ldots + D_n X^n, \quad \Delta f = D_1 D_1 f + \ldots + D_n D_n f.$$

3.1. Rotáció a háromdimenziós térben

Bármely φ lineáris transzformáció előáll az

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi^*) + \frac{1}{2}(\varphi - \varphi^*)$$

alakban, azaz egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus transzformáció összegeként, ahol φ^* a lineáris transzformáció

$$\langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \varphi^*(w) \rangle \tag{3}$$

képlettel definiált adjungált leképezése. A (3) formula alapján látható, hogy egy lineáris leképezésnek és adjungáltjának mátrixreprezentánsai (ortonormált bázisra vonatkozóan) egymás transzponáltjai.

2. Állítás. *A háromdimenziós koordinátatér bármely antiszimmetrikus lineáris transzformációja felírható a*

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v \longrightarrow \quad \varphi(v) := \mathbf{r} \times v$$

alakban, ahol $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ *a tér rögzített vektora. Ezt a vektort a transzformáció vektorinvariánsának nevezzük.*

Bizonyítás. Mivel φ antiszimmetrikus, ezért $\varphi^* = -\varphi$, ahol φ^* a szóban forgó lineáris transzformáció (3) képlettel definiált adjungáltja - emlékeztetünk rá, hogy a φ transzformációt szimmetrikusnak, vagy önandjungáltnak nevezzük, ha $\varphi^* = \varphi$.

Tekintsük φ mátrixát a kanonikus bázisra vonatkozóan; az antiszimmetria miatt $M^T = -M$. A szóban forgó mátrix tehát

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} & m_{13} \\ -m_{12} & 0 & m_{23} \\ -m_{13} & -m_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

alakú, ahol m_{12}, m_{13} és m_{23} adott valós számok. Bevezetve az $\mathbf{r} := (-m_{23}, m_{13}, -m_{12})$ vektort, egyszerű számolás mutatja, hogy az $\mathbf{r}$-rel történő vektoriális szorzás és az alapul vett lineáris transzformáció hatása ugyanaz. □

Mivel egy antiszimmetrikus mátrix determinánsa automatikusan zérus, ezért a karakterisztikus polinom konstans tagja eltűnik. A 0 valós szám tehát minden esetben sajátérték és - a triviális esettől eltekintve - a vektorinvariáns éppen a 0-hoz tartozó sajátalteret generálja.

1. Megjegyzés. A vektoriális szorzat általánosítása:

$$v_1 \times v_2 \times \ldots, \times v_{n-1} := \det \begin{pmatrix} e_1 & . & . & . & e_n \\ v_1^1 & . & . & . & v_1^n \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ v_{n-1}^1 & . & . & . & v_{n-1}^n \end{pmatrix},$$

ahol $e_1, \ldots, e_n$ a kanonikus bázisa az $\mathbb{R}^n$ koordinátatérnek.

16. Feladat. Mutassa meg, hogy a $v_1, \ldots, v_{n-1}$ vektorok vektoriális szorzata ortogonális a tényezők mindegyikére és - lineárisan független vektorok esetén - a

$$(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_1 \times \ldots \times v_{n-1})$$

vektorrendszer pozitív bázisa az n-dimenziós koordinátatérnek.

Megoldás: Az ortogonalitás a

$$\det \begin{pmatrix} v_i^1 & . & . & . & v_i^n \\ v_1^1 & . & . & . & v_1^n \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ v_{n-1}^1 & . & . & . & v_{n-1}^n \end{pmatrix} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

tulajdonságból adódik. A kanonikus bázisra vonatkozóan képzett transzformációs mátrix determinánsa pedig

$$|v_1 \times v_2 \times \ldots, \times v_{n-1}|^2.$$

6. Definíció. *Egy $X : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormező rotációja a $p \in U$ pontban $2\mathbf{r}(p)$, ahol az $\mathbf{r}(p)$ vektor az $X'(p)$ lineáris transzformáció antiszimmetrikus részének vektorinvariánsa.*

3. Állítás. (Kiszámítási formula: a formális determináns)

$$Rot\, X = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ X^1 & X^2 & X^3 \end{pmatrix} = \left(D_2X^3 - D_3X^2, D_3X^1 - D_1X^3, D_1X^2 - D_2X^1\right).$$

3.2. Rotáció a síkon

7. Definíció. *Egy $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenciálható vektormező rotációja*

$$rot\, X := -\, div\, X^{\perp}, \quad ahol \quad X^{\perp} := (0,0,1) \times (X^1, X^2, 0) = (-X^2, X^1, 0).$$

4. Állítás. (Kiszámítási formula)

$$rot\, X = D_1X^2 - D_2X^1.$$

Geometriai szempontból az $X^{\perp}$ vektormező az $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vektormező $+90°$-fokos elforgatottja. Az értelmezést motiválandó, tekintsük a vektormező interpretációját a térben:

$$X : U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad X(x,y,z) := (X^1(x,y), X^2(x,y), 0).$$

A kiszámítási formulák alapján világos, hogy a térbeli rotációvektor egyetlen nem azonosan zérus koordinátája a síkbeli rotációval egyezik meg.

17. Feladat. Határozza meg az

$$X(x,y) = (e^x \cos y, e^y \sin x)\,, \ X(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right),$$

$$X(x,y,z) = (x\sin y, y\sin(xz), \cos e^z)$$

vektormezők divergenciáját és az

$$X(x,y,z) := (xy, yz, zx)$$

vektormező divergenciájának a gradiensét. Számítsa ki az

$$X(x,y) = (e^x \sin y, e^x \cos y)\,,\ X(x,y) = \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),\ X(x,y,z) = x^2yz^3(1,1,1),$$

$$X(x,y,z) = \left(yz^2 - 2x, xz^2 + 2y, 2xy + x^2\right)$$

vektormezők rotációját és mutassa meg, hogy az

$$X(x,y,z) = \left(xyz^2, 2xy^3, -x^2yz\right)$$

vektormező rotációjának a divergenciája eltűnik.

Megoldás: rendre

$$\operatorname{div} X(x,y) = e^x \cos y + e^y \sin x,\ \operatorname{div} X = 0 \quad \text{(ferdeszimmetria-okokból)},$$

$$\operatorname{div} X(x,y,z) = \sin y + \sin(xz) - e^z \sin e^z.$$

Az

$$X(x,y,z) := (xy, yz, zx)$$

vektormező divergenciája

$$\operatorname{div} X(x,y,z) = y + z + x,$$

s ennélfogva

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} X(x,y,z) = (1,1,1).$$

Alkalmazva a kiszámítási formulákat, rendre

$$\operatorname{rot} X(x,y) = 0,\ \operatorname{rot} X(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\operatorname{Rot} X(x,y,z) = (x^2z^3 - 3x^2yz^2, -(2xyz^3 - 3x^2yz^2), 2xyz^3 - x^2z^3),$$

$$\operatorname{Rot} X(x,y,z) = (2x - 2xz, -(2y + 2x - 2yz), 0).$$

Az

$$X(x,y,z) = \left(xyz^2, 2xy^3, -x^2yz\right)$$

vektormező rotációja

$$\operatorname{Rot} X(x,y,z) = (-x^2z, 4xyz, 2y^3 - xz^2),$$

ahonnan

$$\operatorname{div}\operatorname{Rot} X = -2xz + 4xz - 2xz = 0.$$

18. Feladat. Igazolja, hogy $\operatorname{div}\operatorname{Rot} X = 0$.

Útmutatás: alkalmazzuk a vegyes parciális deriváltak egyenlőségét.

Nyilvánvaló, hogy a bevezetett deriváltoperátorok lineárisak a következő értelemben:

$$\operatorname{grad}(\alpha f+\beta g)=\alpha\operatorname{grad} f+\beta\operatorname{grad} g,\ \operatorname{div}(\alpha X+\beta Y)=\alpha\operatorname{div} X+\beta\operatorname{div} Y,$$
$$\operatorname{rot}(\alpha X+\beta Y)=\alpha\operatorname{rot} X+\beta\operatorname{rot} Y,\ \operatorname{Rot}(\alpha X+\beta Y)=\alpha\operatorname{Rot} X+\beta\operatorname{Rot} Y,$$
$$\Delta(\alpha f+\beta g)=\alpha\Delta f+\beta\Delta g,$$

ahol $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

19. Feladat. Igazolja a következő vektoranalitikai azonosságokat (szorzat-szabály):

$$\operatorname{grad}(fg)=f\operatorname{grad} g+g\operatorname{grad} f,\ \operatorname{div}(fX)=f\operatorname{div} X+\langle\operatorname{grad} f,X\rangle,$$
$$\operatorname{rot}(fX)=f\operatorname{rot} X+\langle\operatorname{grad}^{\perp} f,X\rangle,\ \operatorname{Rot}(fX)=f\operatorname{Rot} X+\operatorname{grad} f\times X,$$
$$\Delta(fg)=f\Delta g+g\Delta f+2\langle\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} g\rangle.$$

Útmutatás: a gradiensre vonatkozó szorzatszabály a szorzatfüggvény differenciálási szabályának következménye. Lényegében az összes többi azonosságra ugyanez vonatkozik: a divergencia, illetve a síkbeli rotáció esetében ugyanis

$$\operatorname{div}(fX)=f\operatorname{div} X+X^1D_1f+X^2D_2f+X^3D_3f=f\operatorname{div} X+\langle\operatorname{grad} f,X\rangle,$$
$$\operatorname{rot}(fX)=D_1(fX^2)-D_2(fX^1)=f\operatorname{rot} X-X^1D_2f+X^2D_1f=f\operatorname{rot} X+\langle\operatorname{grad}^{\perp} f,X\rangle,$$

míg a térbeli $\operatorname{Rot}(fX)$ vektormező első komponense

$$D_2(fX^3)-D_3(fX^2)=f\cdot(\operatorname{Rot} X\text{ első komponense})+X^3D_2f-X^2D_3f=$$
$$f\cdot(\operatorname{Rot} X\text{ első komponense})+\operatorname{grad} f\times X\text{ első komponense}$$

és így tovább. Végül

$$\Delta(fg)=\operatorname{div}\operatorname{grad}(fg)=\operatorname{div}\left(f\operatorname{grad} g+g\operatorname{grad} f\right)=\operatorname{div}(f\operatorname{grad} g)+\operatorname{div}(g\operatorname{grad} f)=$$
$$f\Delta g+g\Delta f+2\langle\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} g\rangle$$

a divergenciára vonatkozó azonosság alapján.

20. Feladat. Igazolja, hogy

$$\operatorname{div}(X\times Y)=\langle\operatorname{Rot} X,Y\rangle-\langle\operatorname{Rot} Y,X\rangle.$$

Megoldás: az áttekinthetőség kedvéért legyen $Z=X\times Y$. Ekkor

$$D_1Z^1=D_1\left(X^2Y^3-X^3Y^2\right)=Y^3D_1X^2+X^2D_1Y^3-Y^2D_1X^3-X^3D_1Y^2.$$

Módosítva a módosítandókat,

$$D_2Z^2=-D_2\left(X^1Y^3-X^3Y^1\right)=-Y^3D_2X^1-X^1D_2Y^3+Y^1D_2X^3+X^3D_2Y^1,$$

végül pedig

$$D_3Z^3=D_3\left(X^1Y^2-X^2Y^1\right)=Y^2D_3X^1+X^1D_3Y^2-Y^1D_3X^2-X^2D_3Y^1.$$

Az egyenleteket összeadva

$$\operatorname{div}(X\times Y)=Y^1\left(D_2X^3-D_3X^2\right)+Y^2\left(D_3X^1-D_1X^3\right)+Y^3\left(D_1X^2-D_2X^1\right)-\ldots=$$
$$\langle\operatorname{Rot} X,Y\rangle-\langle\operatorname{Rot} Y,X\rangle.$$

4. Görbék, vonalintegrálok

A 4. Definíció már szerepelteti a görbe fogalmát, mint a k-dimenziós parametrizált felület speciális esetét. A fogalom azonban a gradiens geometriai interpretációja révén merül fel, amihez az érintőstruktúra (érintőegyenes) differenciálgeometriai leírására van szükség. Lokális konstrukcióról lévén szó, a definícióban szereplő paramétertartomány - a felesleges bonyodalmak elkerülése érdekében - nyílt, összefüggő halmaz. A $k = 1$ esetben tehát egy nyílt intervallum. Az integrálszámítás alkalmazásait előkészítendő, a görbe fogalmát mind regularitási, mind topologikus szempontból kiterjesztjük.

8. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $c\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ leképezés reguláris parametrizált görbe, ha folytonosan differenciálható, azaz előáll a paramétertartományt tartalmazó nyílt halmazon értelmezett folytonosan differenciálható leképezés leszűkítéseként és deriváltvektora sehol sem tűnik el.*

Egy reguláris parametrizált görbét egyszerű ívnek nevezünk, ha invertálható, azaz a paramétertartomány különböző pontjaihoz különböző görbepontok tartoznak. Egyszerű zárt íven olyan reguláris parametrizált görbét értünk, mely az értelmezési tartomány végpontjaitól eltekintve invertálható és $c(a) = c(b)$. Egy $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ folytonos leképezés görbe, ha előáll véges sok, páronként nem átfedő egyszerű ív egyesítéseként.

Egyszerű ívek például a(z)

(i) egyenes szakasz
$$c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n, \quad c(t) := (1-t)p + tq,$$
ahol p és q a koordinátatér különböző, rögzített pontjai,

(ii) hengeres csavarvonal
$$c\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad c(t) := (r\cos t, r\sin t, bt),$$
ahol $r > 0$ és $b \neq 0$ rögzített konstansok,

(iii) kúpos csavarvonal
$$c\colon [0,r] \to \mathbb{R}^3, \quad c(t) := (t\cos t, t\sin t, bt),$$
ahol $r > 0$ és $b \neq 0$ rögzített konstansok.

Egyszerű zárt ívek például a(z)

(i) körvonal
$$c\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad c(t) := (u_0 + r\cos t, v_0 + r\sin t)$$
ahol $r > 0$ a kör sugara, u_0 és v_0 pedig a kör középpontjának koordinátái,

(ii) ellipszis
$$c\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad c(t) := (u_0 + a\cos t, v_0 + b\sin t)$$
ahol $a > 0$ és $b > 0$ az ellipszis féltengelyeinek hossza.

(iii) Milyen alakzat paraméteres előállítása a
$$c\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad c(t) := (\cos t, \sin t, 1 - 3\sin t + \cos t),$$
egyszerű zárt ív?

Útmutatás: vegyük észre, hogy a görbe az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű egyenes körhenger és a $z = 1 - 3y + x$ egyenletű sík metszésvonala, azaz ellipszis.

A háromszögvonal, mint zárt görbe: legyen p, q és r az n-dimenziós koordinátatér három nemkollineáris, rögzített pontja és tekintsük a $c_3\colon [0,3] \to \mathbb{R}^n$ görbét, ahol

$$c_3(t) := \begin{cases} (1-t)p + tq, & \text{ha } 0 \le t \le 1 \\ \\ (2-t)q + (t-1)r, & \text{ha } 1 \le t \le 2 \\ \\ (3-t)r + (t-2)p, & \text{ha } 2 \le t \le 3. \end{cases}$$

21. Feladat. A háromszögvonal mintájára értelmezze a $c_m\colon [0,m] \to \mathbb{R}^n$ sokszögvonal fogalmát a koordinátatérben.

Megoldás:

$$c_m(t) := \begin{cases} (1-t)p_0 + tp_1, & \text{ha } 0 \le t \le 1 \\ \\ (2-t)p_1 + (t-1)p_2, & \text{ha } 1 \le t \le 2 \\ \quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad . \\ (m-t)p_{m-1} + (t-m+1)p_m, & \text{ha } m-1 \le t \le m. \end{cases}$$

Görbén tehát - a definíció értelmében - mindig parametrizált görbét értünk, azaz egy zárt intervallum alkalmas tulajdonságú leképezését a koordinátatérbe. Látszólagos bonyolultsága ellenére a görbe definíciója természetes követelményeket fogalmaz meg: a paramétertartomány kompaktsága és a paraméterezés folytonossága biztosítja, hogy a görbék - mint ponthalmazok - a koordinátatér kompakt részhalmazai, azaz "végesek" és a kezdő-, valamint a végpont is a görbe része (topológikus zártság). A paramétertartomány összefüggőségének és a paraméterezés folytonosságának szemléletes jelentése, hogy minden görbe egy darabból áll. A paramétertartomány pontjainak megfelelő görbepontokban a 4. Definíció alapján határozhatjuk meg az érintőegyenes egyenletét (egyenletrendszerét): ez éppen a $p = c(t)$ pontra illeszkedő és a $c'(t)$ irányvektorú egyenes. A paramétertartomány mérhetősége (véges hossza) a paraméterezésre vonatkozó kikötésekkel együtt maga után vonja, hogy a görbék is mérhetők, azaz rendelkeznek (véges) ívmértékkel. Mivel egy görbe véges sok, nem átfedő egyszerű ív egyesítése, ezért a teljes ívhossz összegzéssel határozható meg az egyszerű ívekre vonatkozó

$$L(c) = \int_a^b |c'(t)|\, dt$$

képlet alapján. A következő tétel értelmében egy egyszerű ív (mint ponthalmaz) két paraméterezése mindig átvihető egymásba ún. paramétertranszformáció segítségével. Ez biztosítja - többek között (ld. 1. Következmény) - hogy az ívhossz független a paraméterezés megválasztásától[1].

2. Tétel. *Ha $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ és $c_*\colon [a_*,b_*] \to \mathbb{R}^n$ két egyszerű ív, melyek képtere - mint ponthalmaz - egybeesik, akkor a paraméterezések ekvivalensek, azaz megadható a paramétertartományok között egy inverzével együtt folytonosan differenciálható $\theta\colon [a_*,b_*] \to [a,b]$ megfeleltetés úgy, hogy $c_* = c \circ \theta$.*

[1] A paraméterezéstől független (de a paraméterezés birtokában meghatározható) mennyiségekre épül a görbék differenciálgeometriája (ívhossz, görbület, torzió).

Bizonyítás. Mivel az egyszerű ívek pontjai kölcsönösen egyértelműen felelnek meg a paramétertartomány elemeinek, a $c_* = c \circ \theta$ előírás egyértelműen meghatározza a θ függvényt. Legyen t_* az értelmezési tartomány egy tetszőlegesen rögzített pontja és tegyük fel, hogy $\theta(t_*) = t$. Tekintsük a

$$H(s) := \frac{c(s) - c(t)}{s - t} \qquad (s \neq t)$$

differenciahányados-leképezést, mely a $H(t) := c'(t)$ előírással folytonosan kiterjeszthető a teljes $[a, b]$ intervallumra. Mivel c egyszerű ív, ezért H sehol sem tűnik el és ennélfogva abszolút értéke élesen pozitív. Kompakt halmazon folytonos függvény azonban felveszi a szélsőértékeit, azaz

$$K := \min_{s \in [a,b]} |H(s)| > 0.$$

Kapjuk tehát, hogy bármely $s \in [a, b]$ paraméter esetén

$$K|s - t| \leq |c(s) - c(t)|. \tag{4}$$

Az $s = \theta(s_*)$ helyettesítéssel

$$K|\theta(s_*) - \theta(t_*)| \leq |c_*(s_*) - c_*(t_*)| \tag{5}$$

következik, ahonnan θ folytonossága nyilvánvaló. A differenciálhatóság ellenőrzéséhez pedig vegyük észre, hogy az $s = \theta(s_*)$ és $t = \theta(t_*)$ jelölések mellett

$$\frac{\theta(s_*) - \theta(t_*)}{s_* - t_*} H(s) = \frac{c_*(s_*) - c_*(t_*)}{s_* - t_*} \qquad (s_* \neq t_*).$$

Mindkét oldal skaláris szorzatát véve a $H(s)$ vektorral

$$\frac{\theta(s_*) - \theta(t_*)}{s_* - t_*} |H(s)|^2 = \left\langle \frac{c_*(s_*) - c_*(t_*)}{s_* - t_*}, H(s) \right\rangle.$$

Tudjuk azonban, hogy a H leképezés abszolút értéke élesen pozitív, s ennélfogva

$$\theta'(t_*) = \lim_{s_* \to t_*} \frac{\theta(s_*) - \theta(t_*)}{s_* - t_*} = \frac{1}{|H(t)|^2} \langle c_*'(t_*), H(t) \rangle$$

írható, hiszen θ folytonossága miatt $s_* \to t_*$ esetén $s \to t$ következik. A formula jobb oldalának folytonos függése a t_* paramétertől nyilvánvaló. Az egyszerű ívek szerepét fölcserélve θ inverzfüggvényéhez és az inverzfüggvény folytonos differenciálhatóságához jutunk. □

9. Definíció. *Egy $c\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ görbe ívhosszán az*

$$L(c) := \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |c_i'(t)|\, dt$$

összeget értjük, ahol a paramétertartomány $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ felosztása megfelel a görbe páronként nem átfedő egyszerű ívek egyesítéseként való előállításának. Egyszerű ívekre

$$L(c) := \int_a^b |c'(t)|\, dt.$$

1. Következmény. *Az ívhossz független a paraméterezés megválasztásától.*

Bizonyítás. Legyen c és c_* két egyszerű ív, melyek egymás átparaméterezései, azaz $c_* = c \circ \theta$. Következésképpen $|c_*'| = |\theta'| \cdot |c' \circ \theta|$ és a helyettesítéses integrálás tétele szerint

$$\int_a^b |c'(t)|\, dt = \int_{\theta^{-1}(a)}^{\theta^{-1}(b)} \theta'(s)\ |c' \circ \theta(s)|\, ds = \int_{a_*}^{b_*} |c_*'(s)|\, ds;$$

vegyük figyelembe ugyanis, hogy $\theta' > 0$ esetén $\theta^{-1}(a) = a_*$ és $\theta^{-1}(b) = b_*$, míg ellenkező esetben θ fölcseréli az intervallum kezdő- és végpontját. □

10. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a θ paramétertranszformáció irányítástartó, illetve irányításváltó, ha $\theta' > 0$, illetve $\theta' < 0$.*

2. Megjegyzés. A fogalom szemléletes tartalmát a $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $c(t) := (1-t)p + tq$ parametrizált szakasz segítségével világítjuk meg. Az irányításváltó $\theta(t) := 1 - t$ paraméter-transzformáció esetén

$$c_*(0) = c(1) = q \quad \text{és} \quad c_*(1) = c(0) = p,$$

azaz a "befutási irány" megváltozik. Általában a "befutási sebesség" is változik. Például az irányítástartó

$$\theta\colon [0,2] \to [0,1], \quad \theta(t) := \frac{1}{2}t$$

paramétertranszformáció esetén éppen a fele lesz az eredetinek a megfelelő görbepontban.

Az ívhossz valójában a skalármezők görbementi integráljának egy speciális esete.

11. Definíció. *Tekintsünk egy $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ görbét és tegyük fel, hogy $Im\ c \subset U$, ahol U a koordinátatér összefüggő, nyílt halmaza. Az $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ skalármező görbementi integrálját a*

$$\int_c f := \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} f \circ c_i(t) |c_i'(t)|\, dt$$

képlettel értelmezzük, ahol a paramétertartomány $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ felosztása megfelel a görbe páronként nem átfedő egyszerű ívek egyesítéseként való előállításának. Egyszerű ívekre

$$\int_c f := \int_a^b f \circ c(t)\ |c'(t)|\, dt.$$

12. Definíció. *Tekintsünk egy $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ görbét és tegyük fel, hogy $Im\ c \subset U$, ahol U a koordinátatér összefüggő, nyílt halmaza. Az $X\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vektormező görbementi integrálját a*

$$\int_c X := \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \langle X \circ c_i(t), c_i'(t) \rangle\, dt$$

képlettel értelmezzük, ahol a paramétertartomány $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ felosztása megfelel a görbe páronként nem átfedő egyszerű ívek egyesítéseként való előállításának. Egyszerű ívekre

$$\int_c X := \int_a^b \langle X \circ c(t), c'(t) \rangle\, dt.$$

22. Feladat. Mutassa meg, hogy a skalármezők görbementi integrálja paramétertranszformációval szemben invariáns, míg a vektormezők görbementi integrálja irányításváltó paramétertranszformáció esetén előjelet vált.

Útmutatás: kövessük a 1. Következmény bizonyításában látott lépéseket.

3. Megjegyzés.

$$L(c) = \int_c 1.$$

A skalármezők görbementi integráljának egy lehetséges fizikai interpretációja a következő: tekintsük a görbénket egy vékony huzalnak, melynek anyagsűrűsége a $c(t)$ pontban éppen az $f \circ c(t)$ érték. A görbementi integrál adja meg a huzal tömegét a pontonként változó sűrűség mellett. A vektormezők görbementi integrálja pedig a

$$\langle X \circ c(t), c'(t) \rangle = |X \circ c(t)| \cdot |c'(t)| \cos \angle (X \circ c(t), c'(t))$$

képlet alapján éppen az X vektormező által meghatározott erőtérben elvégzett munka, miközben a görbén végighaladunk.

23. Feladat. (Skalármezők görbementi integrálja)

(i) Határozza meg az $f(x, y, z) = xyz$ skalármező integrálját a

$$c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \; c(t) := (\cos t, \sin t, t)$$

hengeres csavarvonal fölött.

(ii) Határozza meg az $f(x, y) = x^2 - y^2$ skalármező integrálját az origó középpontú, egységsugarú körvonal fölött.

(iii) Határozza meg az $f(x, y, z) = xy - z$ skalármező integrálját a

$$c\colon [0, \frac{3}{4}\pi] \to \mathbb{R}^3, \; c(t) := (a \cos t, a \sin t, bt)$$

görbe fölött.

(iv) Határozza meg az $f(x, y) := x - y$ skalármező integrálját a koordinátatengelyek egységpontjai által meghatározott négyszögvonal fölött.

(v) Határozza meg az $f(x, y, z) = z + 1$ skalármező integrálját a

$$c\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^3, \quad c(t) := (t \cos t, t \sin t, t)$$

kúpos csavarvonal fölött.

Megoldás: a hengeres csavarvonal esetén

$$c'(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \quad \Rightarrow \quad |c'(t)| = \sqrt{2},$$

azaz

$$\int_c f = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} t \cos t \sin t \, dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} t \sin(2t) \, dt = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[t \frac{\cos(2t)}{2} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{2} \, dt =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \left[t \frac{\cos(2t)}{2} \right]_0^{2\pi}$$

a parciális integrálás módszerét követve. A szóban forgó körvonal $c(t) = (\cos t, \sin t)$ paraméterezése segítségével

$$\int_c f = \int_0^{2\pi} \cos^2 t - \sin^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} \cos(2t) \, dt = 0,$$

figyelembe véve, hogy $|c'(t)| = 1$. Mivel

$$c'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b),$$

ezért $|c'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$, ahonnan

$$\int_c f = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{3\pi/4} a^2 \cos t \sin t - bt \, dt = \sqrt{a^2 + b^2} \left[-a^2 \frac{\cos(2t)}{4} - b \frac{t^2}{2} \right]_0^{3\pi/4}.$$

Az $f(x, y) = x - y$ skalármező integrálja (szimmetria-okokból) zérus a koordinátatengelyek egységpontjai által meghatározott négyszögvonal fölött. Explicit számítással,

$$c_1(t) = (1-t)(1,0) + t(0,1) = (1-t, t), \ c_2(t) = (1-t)(0,1) + t(-1,0) = (-t, 1-t),$$

$$c_3(t) = (1-t)(-1,0) + t(0,-1) = (t-1, -t), \ c_4(t) = (1-t)(0,-1) + t(1,0) = (t, t-1),$$

azaz

$$\int_c f = \sum_{i=1}^{4} \int_{c_i} f = \sqrt{2} \int_0^1 (1-t-t) + (-t-(1-t)) + (t-1+t) + (t-(t-1)) \, dt = 0,$$

hiszen az érintővektorok hossza egységesen $\sqrt{2}$ (a négyzet oldala) és a paramétertartomány is ugyanaz. Végül pedig

$$c(t) := (t \cos t, t \sin t, t) \quad \Rightarrow \quad c'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1), \ |c'(t)| = \sqrt{2 + t^2},$$

azaz

$$\int_c f = \int_0^{\pi} (t+1) \sqrt{2 + t^2} \, dt = \frac{1}{2} \left[\frac{(2 + t^2)^{3/2}}{3/2} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sqrt{2 + t^2} \, dt,$$

ahol az integrálást hiperbolikus helyettesítéssel végezhetjük el:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{2 + t^2} \, dt = \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 + (t/\sqrt{2})^2} \, dt = 2 \int_0^{\sinh^{-1}(\pi/\sqrt{2})} \cosh^2 x \, dx,$$

ha $\sinh x = t/\sqrt{2}$. Mivel

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

ezért négyzetének integrálja exponenciális hatványok integrálását jelenti:

$$\int \cosh^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int e^{2x} + e^{-2x} + 2\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{2} + 2x\right) + C =$$

$$\frac{1}{4}\left(\sinh(2x) + 2x\right) + C,$$

ahonnan

$$\int_0^{\pi} \sqrt{2+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\sinh(2x) + 2x\right]_0^{\sinh^{-1}(\pi/\sqrt{2})}.$$

24. Feladat. (Vektormezők görbementi integrálja 2D) Tekintsük a koordinátasík origó középpontú, r sugarú körlapját, melynek határa a pozitívan irányított c parametrizált görbe. Határozza meg az

$$X(x,y) := (x,y), \quad X(x,y) := (x,-y), \quad X(x,y) := (y,x), \quad X(x,y) := (y,-x)$$

vektormezők integrálját a görbe mentén.

Megoldás: a görbe paraméterezése $c(t) = (r\cos t, r\sin t)$, azaz

$$\int_c X = r\int_0^{2\pi} \langle X \circ c(t), (-\sin t, \cos t)\rangle\,dt,$$

ahol az egyes esetekben

$$X\circ c(t) = r(\cos t, \sin t),\ X\circ c(t) = r(\cos t, -\sin t),\ X\circ c(t) = r(\sin t, \cos t),\ X\circ c(t) = r(\sin t, -\cos t).$$

Az integrálandó skaláris szorzatok tehát rendre

$$0,\ -2\sin t\cos t = -\sin(2t),\ \cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t),\ -1,$$

eltekintve az r^2 szorzótól. Nyilvánvalóan csak az utolsó esetben kapunk zérustól különböző értéket, nevezetesen

$$\int_c X = -2\pi r^2.$$

25. Feladat. (Vektormezők görbementi integrálja 3D) Legyen

$$c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad c(t) = (t, t^2, t^3)$$

és számítsa ki az

$$X(x,y,z) = (x-z, y-x, z-y),\ X(x,y,z) = (xz, yx, zy)$$

és a $\operatorname{Rot} X$ vektormezők görbementi integrálját.

Útmutatás: figyelembe véve a kiszámítási formulákat, az integrálandó kifejezések a t változó polinomjai - ezek integrálása rutinfeladat.

4.1. Konzervatív vektormezők: potenciál

13. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy vektormező konzervatív, ha előáll egy folytonosan differenciálható skalármező gradienseként; a szóban forgó skalármezőt a vektormező potenciáljának nevezzük.*

26. Feladat. Bizonyítsa be, hogy $\operatorname{Rot}\operatorname{grad} f = \mathbf{0}$, azaz a rotáció eltűnése szükséges feltétele annak, hogy egy vektormező konzervatív legyen: egy (folytonosan differenciálható) konzervatív vektormező rotációja zérus.

Útmutatás: alkalmazzuk a vegyes parciális deriváltak egyenlőségét.

3. Tétel. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ egy összefüggő, nyílt halmaz. Ha az $X\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonos vektormező konzervatív, akkor az U tartomány bármely két pontját összekötő görbére vett integrálja csak a kezdő- és a végponttól függ, a görbe választásától nem. Ez azt jelenti, hogy az U tartományban haladó bármely zárt görbére vett integrál zérus.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a szóban forgó vektormező az f skalármező gradiense és tekintsünk egy az U tartományban haladó egyszerű ívet. Ekkor

$$\int_c X = \int_a^b \langle \operatorname{grad} f \circ c(t), c'(t)\rangle \, dt = \int_a^b (f \circ c)'(t)\, dt = f(c(b)) - f(c(a))$$

és hasonlóan kapjuk, hogy a p és a q pontokat összekötő c görbe esetén

$$\int_c X = f(q) - f(p).$$

Ha az egyszerű ív, illetve a görbe zárt, akkor nyilvánvalóan zérus az integrál értéke. □

14. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy $U \subset \mathbb{R}^n$ összefüggő, nyílt halmaz csillagszerű a $p_* \in U$ pontra nézve, ha bármely $p \in U$ esetén a p és p_* pontokat összekötő szakasz az U tartományban halad.*

4. Tétel. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ egy csillagtartomány, azaz összefüggő, nyílt és csillagszerű halmaz, $X\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pedig egy folytonos vektormező. Ekkor a következő kijelentések ekvivalensek:*

(i) a vektormező konzervatív,

(ii) a csillagtartomány bármely két pontját összekötő görbére vett integrálja csak a kezdő- és a végponttól függ, a görbe választásától nem,

(iii) a csillagtartományban haladó bármely zárt görbére vett integrálja zérus.

Bizonyítás. Az $(i) \Rightarrow (ii)$ és a $(ii) \Rightarrow (iii)$ implikációk a 3. Tétel alapján nyilvánvalóak. Bevezetve a többé-kevésbé értelemszerű

$$\int_p^q X := \int_c X$$

jelölést a p és q pontokat összekötő $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $c(t) := (1-t)p + tq$ egyenes szakasz fölötti integrálra, legyen

$$f(p) := \int_{p_*}^p X,$$

ahol p_* a tartomány csillagpontja. A (iii) feltétel szerint az X vektormező integrálja zérus a p_*, p és $p+tv$ pontok által meghatározott háromszögvonal fölött, ahol v nemzérus vektor és a t paraméter elegendően kicsi ahhoz, hogy ne lépjünk ki az értelmezési tartományból. Ennélfogva

$$f(p+tv) = \int_{p_*}^{p+tv} X = \int_{p_*}^{p} X + \int_{p}^{p+tv} X = f(p) + \int_0^t \langle X(p+sv), v\rangle \, ds,$$

$$f(p+tv) - f(p) = \int_0^t \langle X(p+sv), v\rangle \, ds.$$

Alkalmazva az integrálszámítás középérték-tételét

$$\frac{f(p+tv)-f(p)}{t} = \langle X(p+s_t v), v\rangle,$$

ahol s_t a 0 és a t paraméterek közé esik. A $t \to 0$ határátmenetet véve pedig $D_v f(p) = \langle X(p), v\rangle$, ahonnan következik, hogy f iránymenti (speciálisan: parciális) deriváltjai léteznek és folytonosak az értelmezési tartomány bármely pontjában. Ennélfogva f folytonosan differenciálható és $\operatorname{grad} f = X$. $\square$

4. Megjegyzés. A koordinátasík, illetve a koordinátatér folytonosan differenciálható vektormezői esetében a rotáció eltűnését is be fogjuk illeszteni az elegendő feltételek közé - ld. Stokes-tétel.

27. Feladat. Bizonyítsa be, hogy az

$$X(x,y,z) := -\frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z)$$

gravitációs mező konzervatív és mutassa meg, hogy a potenciálja harmónikus skalármező.

Útmutatás. Első lépés a

$$D_1 f(x,y,z) = -\frac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

differenciálegyenlet megoldása. Integrálva az első változó szerint,

$$f(x,y,z) = \frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} + f(x_0,y,z).$$

Differenciálva a második változó szerint,

$$D_2 f(x,y,z) = -\frac{ky}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + D_2 f(x_0,y,z).$$

Másfelől viszont

$$D_2 f(x,y,z) = X^2(x,y,z) = -\frac{ky}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Kapjuk tehát, hogy

$$D_2 f(x_0,y,z) = 0.$$

Integrálva a második változó szerint,

$$f(x_0, y, z) = f(x_0, y_0, z) \quad \Rightarrow \quad f(x, y, z) = \frac{k}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} + f(x_0, y_0, z).$$

Differenciálva a harmadik változó szerint

$$D_3 f(x, y, z) = -\frac{kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + D_3 f(x_0, y_0, z).$$

Másfelől viszont

$$D_3 f(x, y, z) = X^3(x, y, z) = -\frac{kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Kapjuk tehát, hogy

$$D_3 f(x_0, y_0, z) = 0.$$

Integrálva a harmadik változó szerint,

$$f(x_0, y_0, z) = f(x_0, y_0, z_0) \quad \Rightarrow \quad f(x, y, z) = \frac{k}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} + f(x_0, y_0, z_0).$$

28. Feladat. Számítsa ki az

$$f(x, y, z) := \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \text{ illetve az } f(x, y) = \log\sqrt{x^2 + y^2}$$

skalármezők gradiensét és keresse meg - amennyiben létezik - az alábbi vektormezők potenciálját:

$$X(x, y, z) = (x, y, z), \; X(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right),$$

$$X(x, y, z) = \left(2xy + z^2, 2yz + x^2, 2zx + y^2\right), \; X(x, y, z) = \left(e^x \cos z, 2y, -e^x \sin z\right).$$

Útmutatás. (Csillagpont-módszer) Illusztrációképpen tekintsük például a

$$X(x, y, z) = \left(2xy + z^2, 2yz + x^2, 2zx + y^2\right)$$

vektormezőt. Feltéve, hogy konzervatív vektormezőről van szó, potenciálját az

$$f(p) = \int_{\mathbf{0}}^{p} X$$

alakban kereshetjük az origó, mint csillagpont választása mellett. Részletesen kiírva:

$$f(x, y, z) = \int_0^1 t^2 \left(x(2xy + z^2) + y(2yz + x^2) + z(2zx + y^2)\right)\, dt,$$

azaz

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}\left(2x^2 y + xz^2 + 2y^2 z + yx^2 + 2xz^2 + y^2 z\right) = yx^2 + z^2 x + zy^2.$$

A változók szerint parciálisan deriválva könnyen meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.

5. Megjegyzés. (A direkt módszer) Első lépés a

$$D_1 f(x, y, z) = 2xy + z^2$$

differenciálegyenlet megoldása. Integrálva az első változó szerint,

$$f(x, y, z) = yx^2 + z^2 x + f(x_0, y, z).$$

Differenciálva a második változó szerint,

$$D_2 f(x, y, z) = x^2 + D_2 f(x_0, y, z) = 2yz + x^2,$$

ahonnan

$$D_2 f(x_0, y, z) = 2yz.$$

Integrálva a második változó szerint,

$$f(x_0, y, z) = zy^2 + f(x_0, y_0, z) \quad \Rightarrow \quad f(x, y, z) = yx^2 + z^2 x + zy^2 + f(x_0, y_0, z).$$

Differenciálva a harmadik változó szerint

$$D_3 f(x, y, z) = 2zx + y^2 + D_3 f(x_0, y_0, z) = 2zx + y^2,$$

ahonnan

$$D_3 f(x_0, y_0, z) = 0.$$

Integrálva a harmadik változó szerint,

$$f(x_0, y_0, z) = f(x_0, y_0, z_0) \quad \Rightarrow \quad f(x, y, z) = yx^2 + z^2 x + zy^2 + f(x_0, y_0, z_0).$$

29. Feladat. Keresse meg - amennyiben létezik - az

$$X(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

vektormezők potenciálját.

Útmutatás. Mivel a rotáció zérus, ezért a vektormező potenciálja létezik az origóban kilyukasztott euklideszi sík bármely csillagszerű résztartománya fölött és a csillagpont-módszerrel meghatározható. Globális megoldás azonban nincs, hiszen

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \, dt = 2\pi,$$

azaz a vektormező integrálja nem zérus az origó középpontú r sugarú körvonalak mentén.

5. Integráltételek I: Stokes tétele a síkon

Legyen D egy körszerű lemez a síkon, azaz D egy összefüggő, korlátos nyílt halmaz lezártja, csillagszerű a p_* belső pontra nézve és határa egy $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt ív úgy, hogy

$$y'(t)\,(x(t)-x_*) - x'(t)\,(y(t)-y_*) \neq 0 \tag{6}$$

teljesül a paramétertartomány bármely belső pontja esetén. A (6) feltétel szemléletes tartalma az, hogy a sebességvektor egyetlen belső paraméterhez tartozó pont esetén sem párhuzamos a p_* pontra nézve vett helyzetvektorral. Ennélfogva

$$\rho\colon [a,b]\times[0,1] \to U, (t,s) \mapsto \rho(t,s) := (1-s)p_* + sc(t) = p_* + s\,(c(t)-p_*)$$

általánosított polárkoordináta-transzformáció, ahol a polárszög szerepét a peremgörbe paramétere veszi át, a regularitás pedig úgy értendő, hogy

$$\det \rho' = \det \begin{bmatrix} D_1\rho^1 & D_2\rho^1 \\ D_1\rho^2 & D_2\rho^2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} sx'(t) & x(t)-x_* \\ sy'(t) & y(t)-y_* \end{bmatrix} =$$

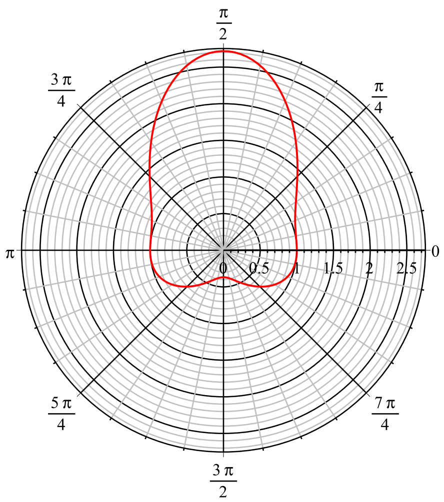
$$-s\,(y'(t)\,(x(t)-x_*) - x'(t)\,(y(t)-y_*)) \neq 0,$$

azaz a Jacobi-determináns nem tünik el a paramétertartomány egyetlen belső pontja esetén sem. Azt mondjuk, hogy a határ pozitívan irányított, ha a (6) feltételben szereplő kifejezés élesen pozitív a paramétertartomány belső pontjaiban.

Példaként tekintsük a $c(t) = r(t)(\cos t, \sin t)$ alakú parametrizált görbéket, ahol r pozitív értékű, 2π-szerint periodikus függvény és legyen $p_* = \mathbf{0}$. Egyszerű számítás mutatja, hogy a (6) kifejezés bal oldala $r^2(t)$, azaz a polárkoordináták segítségével megadott

$$D = \{(r,t) \mid r < r(t), 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

tartomány körszerű lemez a síkon.



1. ábra. Az $r(t) := e^{\sin^3(t)}$ polártávolságfüggvény esete

5. Tétel. (Stokes tétele a síkon) *Legyen $U \subset \mathbb{R}^2$ egy összefüggő, nyílt halmaz, $X\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ egy folytonosan differenciálható vektormező. Ha $D \subset U$ egy körszerű lemez a síkon, melynek pozitívan irányított c határgörbéje az U tartományban halad, akkor*

$$\int_D rot\, X = \int_c X.$$

Bizonyítás. Az integrál eltolásinvarianciája miatt szorítkozhatunk a $p_* = \mathbf{0}$ esetre, azaz

$$y'(t)x(t) - x'(t)y(t) > 0, \quad \rho\colon [a,b] \times [0,1] \to U, (t,s) \mapsto \rho(t,s) := sc(t) = (sx(t), sy(t)).$$

Bevezetve az $\alpha := X^1 \circ \rho$ függvényt, a parciális deriváltakra vonatkozó láncszabály szerint

$$\begin{aligned} D_1\alpha &= sx'(t)D_1X^1 \circ \rho + sy'(t)D_2X^1 \circ \rho, \\ D_2\alpha &= x(t)D_1X^1 \circ \rho + y(t)D_2X^1 \circ \rho. \end{aligned}$$

A Cramer-szabályt alkalmazva

$$D_1X^1 \circ \rho = \frac{y(t)D_1\alpha - sy'(t)D_2\alpha}{\det \rho'}, \quad D_2X^1 \circ \rho = \frac{sx'(t)D_2\alpha - x(t)D_1\alpha}{\det \rho'}.$$

Hasonlóan

$$D_1X^2 \circ \rho = \frac{y(t)D_1\beta - sy'(t)D_2\beta}{\det \rho'}, \quad D_2X^2 \circ \rho = \frac{sx'(t)D_2\beta - x(t)D_1\beta}{\det \rho'},$$

ahol $\beta = X^2 \circ \rho$. Következésképpen

$$\int_D \mathrm{rot}\, X = \int_a^b \int_0^1 \mathrm{rot}\, X \circ \rho\, |\det \rho'|\, ds\, dt =$$

$$-\int_a^b \int_0^1 y(t)D_1\beta(t,s) - sy'(t)D_2\beta(t,s) - sx'(t)D_2\alpha(t,s) + x(t)D_1\alpha(t,s)\, ds\, dt =$$

$$\int_a^b \int_0^1 sy'(t)D_2\beta(t,s) + sx'(t)D_2\alpha(t,s) - y(t)D_1\beta(t,s) - x(t)D_1\alpha(t,s)\, ds\, dt,$$

mivel az integrandusok az integrálási tartomány bizonyos határpontjaitól ($\det \rho'$ zérushelyei) eltekintve egybeesnek és folytonosak. Koncentráljunk az azonos változójú parciális deriváltakra. A D_2 parciális deriváltoperátort tartalmazó tagokat integráljuk először az s változó szerint (parciális integrálás):

$$\int_0^1 sx'(t)D_2\alpha(t,s) + sy'(t)D_2\beta(t,s)\, ds = x'(t)\left([s\alpha(t,s)]_0^1 - \int_0^1 \alpha(t,s)\, ds\right) +$$

$$y'(t)\left([s\beta(t,s)]_0^1 - \int_0^1 \beta(t,s)\, ds\right) = x'(t)\left(\alpha(t,1) - \int_0^1 \alpha(t,s)\, ds\right) + y'(t)\left(\beta(t,1) - \int_0^1 \beta(t,s)\, ds\right).$$

Figyelembe véve, hogy $\alpha(t,1) = X^1(x(t),y(t))$ és $\beta(t,1) = X^2(x(t),y(t))$, integráljunk most a t változó szerint:

$$\int_a^b \int_0^1 sx'(t)D_2\alpha(t,s) + sy'(t)D_2\beta(t,s)\, ds\, dt =$$

$$\int_a^b x'(t)X^1(x(t),y(t)) + y'(t)X^2(x(t),y(t))\, dt - \int_a^b x'(t)\int_0^1 \alpha(t,s)\, ds\, dt - \int_a^b y'(t)\int_0^1 \beta(t,s)\, ds\, dt =$$

$$\int_c X - \int_a^b x'(t) \int_0^1 \alpha(t,s)\, ds\, dt - \int_a^b y'(t) \int_0^1 \beta(t,s)\, ds\, dt.$$

A D_1 parciális deriváltoperátort tartalmazó tagokat integráljuk először a t, majd az s változók szerint:

$$\int_a^b x(t)D_1\alpha(t,s) + y(t)D_1\beta(t,s)\, dt = [x(t)\alpha(t,s)]_a^b - \int_a^b x'(t)\alpha(t,s)\, dt + [y(t)\beta(t,s)]_a^b -$$

$$\int_a^b y'(t)\beta(t,s)\, dt = -\int_a^b x'(t)\alpha(t,s)\, dt - \int_a^b y'(t)\beta(t,s)\, dt,$$

hiszen $sc(a) = sc(b)$ bármely s paraméter esetén. Kapjuk tehát, hogy

$$\int_0^1 \int_a^b x(t)D_1\alpha(t,s) + y(t)D_1\beta(t,s)\, dt\, ds = -\int_a^b x'(t) \int_0^1 \alpha(t,s)\, ds\, dt - \int_a^b y'(t) \int_0^1 \beta(t,s)\, ds\, dt.$$

Összevetve a kapott kettős integrálkifejezéseket,

$$\int_D \operatorname{rot} X = \int_c X$$

következik. □

6. Megjegyzés. Ha D_k a p_* pontra zsugorodó körszerű síklemezek sorozata, akkor az integrálszámítás középértéktétele szerint

$$\operatorname{rot} X(p_*) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{D_k \text{ területe}} \int_{D_k} \operatorname{rot} X = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{D_k \text{ területe}} \int_{c_k} X.$$

Ennek az eredménynek a birtokában a rotációt szokás örvénysűrűségnek is nevezni [4]. A síkbeli Stokes-tétel bizonyítása érdemi változtatások nélkül átvihető a szakaszonként folytonosan differenciálható határgörbék esetére:

$$\int_a^b \ldots\, dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \ldots\, dt.$$

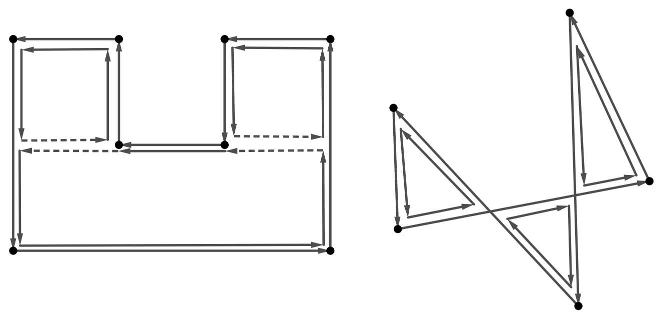
Érvényben marad az integráltétel akkor is, ha a D tartomány maga nem körszerű síklemez, de körszerű síklemezekre darabolható, szükség esetén közbülső ívek beiktatásával. A szomszédos tartományok közös ívein ugyanis ellentétes befutással integrálunk, ami az összegzésnél zérust ad. Gyakorlati szempontból érdekes még a gyűrűszerű lemezek esete. Ezek - szemléletesen szólva - egymásba ágyazott körszerű lemezek különbségeként foghatók fel a legegyszerűbben. Az ábráról leolvasható, hogy a Stokes-tétel gyűrűszerű lemezekre vonatkozó analogonja

$$\int_G \operatorname{rot} X = \int_{c_k} X - \int_{c_b} X, \tag{7}$$

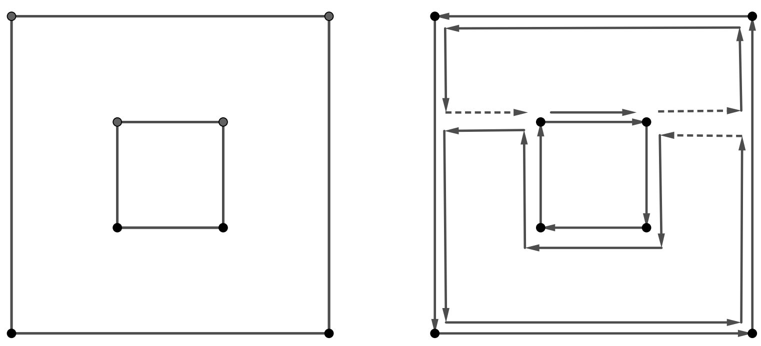
ahol c_k a külső, c_b pedig a belső körszerű síklemez pozitívan irányított határa. Indukcióval adódik, hogy több, páronként szeparálható belső körszerű lemez eltávolítása esetén a

$$\int_G \operatorname{rot} X = \int_{c_k} X - \int_{c_b^1} X - \ldots - \int_{c_b^m} X \tag{8}$$

formula érvényes, ahol minden szereplő síklemez határa pozitívan irányított.



2. ábra. Közbülső ívek



3. ábra. Gyűrűszerű halmazok

30. Feladat. Igazolja, hogy

- ha G_y normáltartomány az y-tengelyre nézve és a határa pozitívan irányított zárt görbe, akkor

$$\int_{G_y} D_2 f = -\int_c f\,dx,$$

ahol $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ egy folytonosan differenciálható skalármező, $U \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő, nyílt halmaz és a vetületi integrált a görbe mentén a

$$\int_c f\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f \circ c_i(t) x_i'(t)\,dt$$

formula értelmezi. Egyszerű, zárt ív esetén

$$\int_c f\,dx = \int_a^b f \circ c(t) x'(t)\,dt.$$

- ha G_x normáltartomány az x-tengelyre nézve és a határa pozitívan irányított zárt görbe, akkor

$$\int_{G_x} D_1 f = \int_c f\,dy,$$

ahol $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ egy folytonosan differenciálható skalármező, $U \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő, nyílt halmaz és a vetületi integrált a görbe mentén a

$$\int_c f\,dy = \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f \circ c_i(t) y_i'(t)\,dt$$

formula értelmezi. Egyszerű, zárt ív esetén

$$\int_c f\,dy = \int_a^b f \circ c(t) y'(t)\,dt.$$

Útmutatás. Legyen

$$G_y = \{(x, y) \mid \alpha(x) \le y \le \beta(x),\ a \le x \le b\}$$

normáltartomány az y-tengelyre nézve, ahol α és β folytonosan differenciálható leképezések. A normáltartomány határának y-tengellyel párhuzamos élein a deriváltvektor első koordinátája zérus, ami azt jelenti, hogy az

$$\int_c f\,dx = \sum_{i=1}^{4} \int_{c_i} f\,dx$$

összegben az y-tengellyel párhuzamos (esetleg elfajuló) élek fölötti vetületi integrál automatikusan zérus. Marad tehát a

$$c^+\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2,\ c^+(t) = (t, \alpha(t))$$

paraméterezéssel adott alsó és a

$$c^-\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2,\ c^-(t) = (t, \beta(t))$$

paraméterezéssel adott felső határgörbe. Tekintettel arra, hogy a G_y tartomány határát pozitívan kell irányítanunk

$$\int_c f\,dx = \int_{c^+} f\,dx - \int_{c^-} f\,dx = \int_a^b f(t,\alpha(t))\,dt - \int_a^b f(t,\beta(t))\,dt =$$

$$-\int_a^b \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} D_2 f = -\int_{G_y} D_2 f,$$

ami bizonyítandó volt. A második eset vizsgálata hasonló. Ha G mindkét tengelyre vonatkozóan normáltartomány, akkor

$$\int_G \operatorname{rot} X = \int_G D_1 X^2 - \int_G D_2 X^1 = \int_c X^2\,dy + \int_c X^1\,dx = \int_c X,$$

ami a síkbeli Stokes-tétel egy klasszikus bizonyítása.

2. Következmény. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^2$ csillagtartomány és tekintsünk egy $X\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható vektormezőt. Ekkor a következő kijelentések ekvivalensek:*

(i) *a vektormező konzervatív,*

(ii) *a csillagtartomány bármely két pontját összekötő görbére vett integrálja csak a kezdő- és a végponttól függ, a görbe választásától nem,*

(iii) *a csillagtartományban haladó bármely zárt görbére vett integrálja zérus,*

(iv) $\mathit{rot}\, X = 0$.

Bizonyítás. Az (*i*), (*ii*) és a (*iii*) feltételek ekvivalenciája már bizonyítást nyert; ld. 4. Tétel. Az is világos, hogy a rotáció eltűnése szükséges feltétele annak, hogy a vektormező konzervatív legyen (26. Feladat). Stokes tétele alapján pedig elegendő ahhoz, hogy a vektormező integrálja a tartományban haladó háromszögvonalak fölött eltünjön: X tehát éppen az

$$f(p) := \int_{p_*}^p X$$

összefüggéssel definiált skalármező gradiense. □

31. Feladat. Alkalmazzuk a Stokes-tételt a 24. Feladatban szereplő integrálok kiszámítására.

Útmutatás: vegyük észre, hogy az utolsó kivételével valamennyi vektormező rotációja zérus; az utolsó esetben pedig

$$\operatorname{rot} X(x,y) = -2,$$

azaz a peremgörbe menti integrál a határolt tartomány $r^2\pi$ területének -2-szerese.

32. Feladat. (Ivhossz- és területszámítás) Tekintsük az

$$X := \frac{1}{2}(y, -x)$$

vektormezőt; mivel $\operatorname{rot} X = -1$, ezért Stokes tétele szerint

$$D \text{ területe } = \int_D 1 = \Big| \int_c X \Big|,$$

ahol c a D síklemez határa. Egyszerű zárt ív esetén

$$D \text{ területe } = \frac{1}{2}\Big| \int_a^b y(t)x'(t) - x(t)y'(t)\, dt \Big|,$$

ahol $c(t) = (x(t), y(t))$.

(i) Számítsa ki annak az ellipszisnek a területét, melynek nagyobbik féltengelye a, kisebbik pedig b hosszúságú.

(ii) Határozza meg a

$$c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad c(t) := (\cos t(1 + \cos t), \sin t(1 + \cos t))$$

kardioid ívhosszát és az általa határolt síktartomány területét.

(iii) Határozza meg a

$$c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad c(t) := (\cos^3 t, \sin^3 t)$$

asztroid ívhosszát és az általa határolt síklemez területét.

Útmutatás. Az ellipszis esetében $x(t) = a \cos t$, $y = b \sin t$ és az integrandus

$$y(t)x'(t) - x(t)y'(t) = -ab \quad \Rightarrow \quad \text{az ellipszis területe} = \pi ab.$$

A kardioid (körön gördülő, azonos sugarú külső kör) ívhossza:

$$x'(t) = -\sin t(1 + \cos t) - \cos t \sin t = -\left(\sin t + \sin(2t)\right), \quad y'(t) = \cos t + \cos(2t),$$

$$|c'(t)|^2 = 2\left(1 + \cos(2t)\cos t + \sin(2t)\sin t\right) = 2\left(1 + \cos(2t - t)\right) = 2(1 + \cos t) =$$
$$2(1 + \cos^2(t/2) - \sin^2(t/2)) = 4\cos^2(t/2),$$

ahonnan

$$L(c) = 2\int_0^{2\pi} |\cos(t/2)|\, dt = 4\int_0^{\pi} \cos(t/2)\, dt = 8.$$

A határolt terület:

$$y(t)x'(t) = -\sin t(1 + \cos t)(\sin t + \sin(2t)), \quad x(t)y'(t) = \cos t(1 + \cos t)(\cos t + \cos(2t)),$$

ahonnan

$$y(t)x'(t) - x(t)y'(t) = -(1 + \cos t)^2 \quad \Rightarrow \quad \text{a határolt terület} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos t)^2\, dt = \frac{3}{2}\pi.$$

Az asztroid (körön gödülő, negyed sugarú belső kör) ívhossza

$$L(c) = 3\int_0^{2\pi} |\cos t \sin t|\, dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} |\sin(2t)|\, dt = 6\int_0^{\pi/2} \sin(2t)\, dt = 6,$$

míg a határolt terület

$$\frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\, dt = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\, dt = \frac{3}{8}\pi.$$

6. Felületek, felületi integrálok

A 4. Definíció már szerepelteti a felület fogalmát, mint a k-dimenziós parametrizált felület speciális esetét. A fogalom azonban a gradiens geometriai interpretációja révén merül fel, amihez az érintőstruktúra (érintősík) differenciálgeometriai leírására van szükség. Lokális konstrukcióról lévén szó, a definícióban szereplő paramétertartomány - a felesleges bonyodalmak elkerülése érdekében - nyílt, összefüggő halmaz. A $k = 1$ esetben például egy nyílt intervallum. Az integrálszámítás alkalmazásait előkészítendő, a felület fogalmát mind regularitási, mind topologikus szempontból kiterjesztjük: a $k = 2$ esetben a korlátos, zárt intervallumok Descartes-szorzataként előálló

$$T = [a, b] \times [c, d]$$

téglalap tűnik természetes választásnak egy felületek paramétertartományaként. Valójában a paramétertartomány elegendően sima deformációja megengedett a parametrizált felületek elméletében. Így téglalap helyett gondolhatunk például körszerű síklemezre is, ami az általánosított polárkoordináta-transzformáció segítségével téglalapba vihető át. Hasonló a helyzet a szakirodalomban gyakran szerepeltetett normáltartományokkal [2]: a

$$N = \{(x, y) \mid \alpha(x) \leq y \leq \beta(x),\ a \leq x \leq b\}$$

normáltartományt az $(x, s) \longrightarrow (x, (1-s)\alpha(x)+s\beta(x))$ leképezés inverze a $T = [a, b]\times[0, 1]$ téglalapba viszi át.

15. Definíció. *A $\sigma\colon T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ leképezés reguláris parametrizált felület, ha folytonosan differenciálható, azaz előáll a paramétertartományt tartalmazó nyílt halmazon értelmezett folytonosan differenciálható leképezés leszűkítéseként és parciális deriváltvektorai lineárisan függetlenek.*

Egy reguláris parametrizált felületet elemi felületnek nevezünk, ha invertálható, azaz a paramétertartomány különböző elemeinek képe különböző. A $\sigma\colon T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ folytonos leképezés felület, ha előáll véges sok, páronként nem átfedő elemi felület egyesítéseként.

Az elemi felület fogalma tehát továbbra is *parametrizált felület*, azaz a koordinátasík alkalmas tulajdonságú részhalmazának alkalmas tulajdonságú leképezése a koordinátatérbe. Látszólagos bonyolultsága ellenére a felület definíciója természetes követelményeket fogalmaz meg: a paramétertartomány kompaktsága és a paraméterezés folytonossága biztosítja, hogy a felületek - mint ponthalmazok - a koordinátatér kompakt részhalmazai, azaz "végesek" és egy-egy felület "kontúrja" is a felület része (topológikus zártság). A paramétertartomány összefüggőségének és a paraméterezés folytonosságának szemléletes jelentése, hogy minden felület egy darabból áll. A paramétertartomány pontjainak megfelelő felületi pontokban a 4. Definíció alapján határozhatjuk meg az érintősík egyenletét: ez éppen a $p := \sigma(u, v)$ pontra illeszkedő és a $D_1\sigma(u, v) \times D_2\sigma(u, v)$ normálvekorú sík. A paramétertartomány mérhetősége (véges területmérték) a paraméterezésre vonatkozó kikötésekkel együtt maga után vonja, hogy a felületek is mérhetők, azaz rendelkeznek (véges) felszínmértékkel. Mivel egy felület véges sok, nem átfedő elemi felület egyesítése, ezért a teljes felszín összegzéssel határozható meg az elemi felületekre vonatkozó

$$A(\sigma) = \int_T |D_1\sigma \times D_2\sigma|(u, v)\, du\, dv$$

képlet alapján.

16. Definíció. *Egy* $\sigma : T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *felület felszíne*

$$A(\sigma) := \sum_{i=1}^{m} \int_{T_i} |D_1\sigma_i \times D_2\sigma_i|(u,v)\, du\, dv,$$

ahol a paramétertartomány közös belső pont nélküli $T_1, T_2, \ldots, T_m$ *téglalapokra való felosztása megfelel a felület páronként nem átfedő elemi felületek egyesítéseként való előállításának. Elemi felületekre*

$$A(\sigma) = \int_T |D_1\sigma \times D_2\sigma|(u,v)\, du\, dv.$$

33. Feladat. Bizonyítsa be, hogy $|D_1\sigma \times D_2\sigma|^2 = \det g_{ij}$, ahol a

$$g_{ij} := \langle D_i\sigma, D_j\sigma\rangle \quad (i,j = 1,2)$$

függvények a felület úgynevezett első alapmennyiségei.

Megoldás: a vektoriális és a skaláris szorzat geometriai értelmezéséből kiindulva

$$|D_1\sigma \times D_2\sigma|^2 = |D_1\sigma|^2|D_2\sigma|^2 \sin^2\alpha = |D_1\sigma|^2|D_2\sigma|^2(1-\cos^2\alpha) =$$

$$|D_1\sigma|^2|D_2\sigma|^2\left(1 - \frac{\langle D_1\sigma, D_2\sigma\rangle^2}{|D_1\sigma|^2|D_2\sigma|^2}\right) = |D_1\sigma|^2|D_2\sigma|^2 - \langle D_1\sigma, D_2\sigma\rangle^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2.$$

Felületek például a(z)

(i) $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}$ bázisvektorok átal kifeszített paralelepipedon lapjai:

$$\sigma_{\mathbf{vw}} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \sigma_{\mathbf{vw}}(u,v) := u\mathbf{v} + v\mathbf{w},$$

$$\sigma_{\mathbf{wz}} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \sigma_{\mathbf{wz}}(u,v) := u\mathbf{w} + v\mathbf{z},$$

$$\sigma_{\mathbf{vz}} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \sigma_{\mathbf{vz}}(u,v) := u\mathbf{v} + v\mathbf{z},$$

(ii) hengerpalást

$$\sigma : [0,2\pi] \times [0,m] \to \mathbb{R}^3, \quad \sigma(u,v) := (r\cos u, r\sin u, v),$$

ahol $r > 0$ és $m > 0$ rögzített konstansok,

(iii) kúppalást

$$\sigma : [0,2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \sigma(u,v) := v(r\cos u, r\sin u, m),$$

ahol $r > 0$ és $m > 0$ rögzített konstansok.

7. Megjegyzés. A kúppalást fenti paraméterezése túlmutat az eddigi felületfogalom keretein, ugyanis a kúp $(0,0)$ paraméterű csúcspontja szingularitás:

$$D_1\sigma \times D_2\sigma(0,0) = \mathbf{0}.$$

Ezen segít, ha a paramétertartomány határpontjaiban eltekintünk regularitási feltételek előírásától [2] és csupán a folytonosság követelményét tartjuk meg. Cserébe viszont meg kell követelni (például) a parciális deriváltvektorok hosszának korlátosságát a paramétertartomány belseje fölött (a felületi integrálok létezése). Esetünkben ez automatikusan teljesül, hiszen egy folytonosan differenciálható leképezés leszűkítéséről van szó. Univerzális felületfogalom helyett tekintsük a következő fontos felületcsaládot.

Alapul véve a z-tengely körüli forgások

$$M(u) := \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

egyparaméteres csoportját, legyen

$$c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3, \quad c(v) := (x(v), 0, z(v))$$

egy görbe úgy, hogy $x(v) > 0$, legalábbis a paramétertartomány véges sok elemétől eltekintve (ld. pl. a forgáskúp esetét). A $\sigma(u,v) := M(u)c(v)$ képlettel definiált felületeket forgásfelületeknek nevezzük.

34. Feladat. Milyen alakzat paraméteres előállítása

$$\sigma(u,v) := ((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v).$$

Megoldás:

$$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R + r\cos v \\ 0 \\ r\sin v \end{pmatrix},$$

azaz az xz-koordinátasíkban fekvő, $(R,0,0)$ középpontú, r sugarú kör megforgatottja a z-tengely körül, az ún. tórusz.

35. Feladat. Vezesse le a forgásfelületek felszínének kiszámítására vonatkozó képletet.

Megoldás:

$$D_1\sigma(u,v) = M'(u)c(v) = \begin{pmatrix} -\sin u & -\cos u & 0 \\ \cos u & -\sin u & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(v) \\ 0 \\ z(v) \end{pmatrix} = (-x(v)\sin u, x(v)\cos u, 0),$$

$$D_2\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(v) \\ 0 \\ z'(v) \end{pmatrix} = (x'(v)\cos u, x'(v)\sin u, z'(v)),$$

ahonnan

$$D_1\sigma \times D_2\sigma(u,v) = (x(v)z'(v)\cos u, x(v)z'(v)\sin u, -x(v)x'(v)),$$
$$|D_1\sigma \times D_2\sigma|(u,v) = x(v)|c'(v)|,$$

figyelembe véve, hogy $x(v) \geq 0$. Kapjuk tehát, hogy

$$\int_T |D_1\sigma \times D_2\sigma|(u,v)\,du\,dv = 2\pi \int_a^b x(v)|c'(v)|\,dv.$$

Ha a profilgörbe egy függvény gráfjaként megadható ún. Euler-Monge-féle $c(v) = (f(v), 0, v)$ paraméterezéssel, akkor

$$\int_T |D_1\sigma \times D_2\sigma|(u,v)\,du\,dv = 2\pi \int_a^b f(v)\sqrt{1 + f'(v)^2}\,dv.$$

36. Feladat. Számítsa ki a $\sigma\colon [0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]\to\mathbb{R}^3$,

$$\sigma(u,v) := (r\cos u\cos v, r\sin u\cos v, r\sin v)$$

paraméterezéssel adott gömbfelület, továbbá a kúp- és a hengerpalást felszínét.

Megoldás: a gömbfelület esetében

$$D_1\sigma(u,v) = r(-\sin u\cos v, \cos u\cos v, 0),$$

$$D_2\sigma(u,v) = r(-\cos u\sin v, -\sin u\sin v, \cos v),$$

vektoriális szorzatuk pedig

$$D_1\sigma\times D_2\sigma(u,v) = r^2(\cos u\cos^2 v, \sin u\cos^2 v, \sin v\cos v),$$

$$|D_1\sigma\times D_2\sigma|(u,v) = r^2\cos v,$$

figyelembe véve, hogy $\cos v\geq 0$, ha $v\in[-\pi/2,\pi/2]$. Következésképpen

$$\int_T |D_1\sigma\times D_2\sigma|(u,v)\,du\,dv = 2r^2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos v\,dv = 2r^2\pi\,[\sin v]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4r^2\pi.$$

Alapul véve a kúppalást

$$\sigma\colon [0,2\pi]\times[0,1]\to\mathbb{R}^3,\quad \sigma(u,v) := v(r\cos u, r\sin u, m)$$

paraméterezését,

$$D_1\sigma(u,v) = v(-r\sin u, r\cos u, 0),$$

$$D_2\sigma(u,v) = (r\cos u, r\sin u, m),$$

vektoriális szorzatuk pedig

$$D_1\sigma\times D_2\sigma(u,v) = v(mr\cos u, mr\sin u, -r^2) = vr(m\cos u, m\sin u, -r),$$

$$|D_1\sigma\times D_2\sigma|(u,v) = vr\sqrt{m^2+r^2}.$$

Következésképpen

$$\int_T |D_1\sigma\times D_2\sigma|(u,v)\,du\,dv = \pi r\sqrt{m^2+r^2}.$$

Végül pedig a hengerpalást

$$\sigma\colon [0,2\pi]\times[0,m]\to\mathbb{R}^3,\quad \sigma(u,v) := (r\cos u, r\sin u, v)$$

paraméterezéséből kiindulva

$$D_1\sigma(u,v) = (-r\sin u, r\cos u, 0),$$

$$D_2\sigma(u,v) = (0,0,1),$$

vektoriális szorzatuk pedig

$$D_1\sigma\times D_2\sigma(u,v) = r(\cos u, \sin u, 0),$$

$$|D_1\sigma\times D_2\sigma|(u,v) = r.$$

Következésképpen

$$\int_T |D_1\sigma\times D_2\sigma|(u,v)\,du\,dv = 2\pi rm.$$

37. Feladat. Bizonyítsa be, hogy a gömbfelület vetítése a köré írt hengerpalástra felszíntartó leképezés - Archimédesz tétele.

Útmutatás: tegyük fel, hogy az origó középpontú egységsugarú gömbfelületről van szó, melynek a köré írt hengerpalástra való projekcióját a

$$(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \longrightarrow (\cos u, \sin u, \sin v)$$

képlettel értelmezzük - vegyük észre, hogy a vetítés a z-tengelyre merőleges irányban történik és a hengerpalást

$$\sigma(u, v) := (\cos u, \sin u, \sin v)$$

paraméterezéséhez vezet. A gömb és a hengerpalást paraméterezéseihez tartozó első alapmennyiségek determinánsának egyenlősége Archimédesz tételének bizonyítását adja.

38. Feladat. Igazolja, hogy $(u, v) \longrightarrow (\cos u, \sin u, v)$ a sík távolságtaró leképezése a hengerre.

Útmutatás: igazolja, hogy a szóban forgó paraméterezésnél az első alapmennyiségek megegyeznek.

39. Feladat. Igazolja, hogy a sztereografikus projekció a gömbfelület szögtartó leképezése a síkra.

Megoldás: a sztereografikus projekció a gömbfelület vetítése az északi pólusból az egyenlítő síkjára. Az egyszerűség kedvéért legyen egységnyi a sugár és az origó a gömb centruma, azaz egyenlítőjének egyenlete $z = 0$. A gömb $P(x, y, z)$ pontjának képét a

$$(0, 0, 1) + t\left((x, y, z) - (0, 0, 1)\right) = (tx, ty, 1 + t(z - 1))$$

kifejezés harmadik koordinátájának eltünésével határozhatjuk meg:

$$t = \frac{1}{1 - z},$$

azaz

$$u = \frac{x}{1 - z}, \;\; v = \frac{y}{1 - z}$$

már az egyenlítő síkjának paraméterei. Figyelembe véve, hogy

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

meghatározhatjuk x, y és z értékét az u és v paraméterek függvényében: az $x = (1 - z)u$, $y = (1 - z)v$ helyettesítésekkel

$$(u^2 + v^2)(1 - z)^2 + z^2 = 1,$$

$$(u^2 + v^2)(1 - z) = 1 + z,$$

azaz

$$z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1},$$

következésképpen

$$x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}.$$

A gömbfelület

$$(u,v)\mapsto\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\frac{2v}{u^2+v^2+1},\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$$

paraméterezését alapul véve hosszadalmas, de lépésenként egyszerű számítás mutatja, hogy az első alapmennyiségekre a

$$g_{ij}(u,v)=\frac{4}{(u^2+v^2+1)^2}\delta_{ij}$$

összefüggés adódik, ahol δ_{ij} az ún. Kronecker-delta, melynek értéke 0 különböző indexek esetén, illetve 1, ha az indexek egybeesnek:

$$D_1\sigma(u,v)=\frac{2}{(u^2+v^2+1)^2}\left(v^2+1-u^2,-2uv,2u\right),$$

$$D_2\sigma(u,v)=\frac{2}{(u^2+v^2+1)^2}\left(-2uv,u^2+1-v^2,2v\right),$$

ahonnan

$$|D_1\sigma|^2(u,v)=|D_2\sigma|^2(u,v)=\frac{4}{(u^2+v^2+1)^2},\ \langle D_1\sigma,D_2\sigma\rangle(u,v)=0.$$

Másképp fogalmazva, az első alapmennyiségek a gömbön a sík első alapmennyiségeinek (ugyanazon) függvényszeresei. Ez azt jelenti, hogy metsző felületi görbék érintőinek a belső szorzatát a normák szorzatával osztva, ugyanazt az értéket kapjuk, mint a paramétertartomány megfelelő görbéi esetén.

17. Definíció. *Tekintsünk egy $\sigma\colon T\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ felületet és tegyük fel, hogy $Im\ \sigma\subset U$, ahol U a koordinátatér összefüggő, nyílt halmaza. Az $f\colon U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ skalármező felületi integrálját az*

$$\int_\sigma f=\sum_{i=1}^m\int_{T_i} f\circ\sigma_i(u,v)|D_1\sigma_i\times D_2\sigma_i|(u,v)\,du\,dv$$

képlettel értelmezzük, ahol a paramétertartomány közös belső pont nélküli $T_1,T_2,\dots,T_m$ téglalapokra való felosztása megfelel a felület páronként nem átfedő elemi felületek egyesítéseként való előállításának. Elemi felületekre

$$\int_\sigma f=\int_T f\circ\sigma(u,v)|D_1\sigma\times D_2\sigma|(u,v)\,du\,dv.$$

A felszín valójában a skalármezők felületi integráljának egy speciális esete.

18. Definíció. *Tekintsünk egy $\sigma\colon T\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ felületet és tegyük fel, hogy $Im\ \sigma\subset U$, ahol U a koordinátatér összefüggő, nyílt halmaza. Az $X\colon U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ vektormező felületi integrálját az*

$$\int_\sigma X:=\sum_{i=1}^m\int_{T_i}\langle X\circ\sigma_i,D_1\sigma_i\times D_2\sigma_i\rangle(u,v)\,du\,dv$$

képlettel értelmezzük, ahol a paramétertartomány közös belső pont nélküli $T_1,T_2,\dots,T_m$ téglalapokra való felosztása megfelel a felület páronként nem átfedő elemi felületek egyesítéseként való előállításának. Elemi felületekre

$$\int_\sigma X=\int_T\langle X\circ\sigma,D_1\sigma\times D_2\sigma\rangle(u,v)\,du\,dv.$$

8. Megjegyzés. Ha a vektormező folyadékáramlást reprezentál, akkor felületi integrálja az adott felületen egységnyi idő alatt átáramló folyadék mennyisége. Ezt az adott felületre vonatkozó fluxusnak[2] is nevezzük.

[2] A fluxus latin eredetű szó, jelentése: áramlás.

7. Integráltételek II: a Gauss-Osztrogradszkij-tétel és a térbeli Stokes-tétel

40. Feladat. Igazolja, hogy ha G_z normáltartomány a z-tengelyre nézve és a határa pozitívan irányított felület, akkor

$$\int_{G_z} D_3 f = \int_\sigma f \cos\gamma_3,$$

ahol $f\colon U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ egy folytonosan differenciálható skalármező, $U \subset \mathbb{R}^3$ összefüggő, nyílt halmaz és γ_3 a felületi normálisnak az $e_3 = (0,0,1)$ vektorral bezárt szöge.

Útmutatás. G_z normáltartomány a z-tengelyre nézve, ha az (x,y)-síkra eső

$$H_z = \{(x,y) \mid (x,y,z) \in G_z\}$$

vetülete normáltartomány a síkon és

$$G_z = \{(x,y,z) \mid \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y),\ (x,y) \in H_z\}.$$

A normáltartomány határának z-tengellyel párhuzamos lapjain $\gamma_3 = 90^\circ$, ami azt jelenti, hogy a z-tengellyel párhuzamos (esetleg elfajuló) lapok fölötti integrál automatikusan zérus. Marad tehát a

$$\sigma^+\colon H_z \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \sigma^+(x,y) = (x,y,\beta(x,y))$$

paraméterezéssel adott felső és a

$$\sigma^-\colon H_z \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \sigma^-(x,y) = (x,y,\alpha(x,y))$$

paraméterezéssel adott alsó lap. A G_z tartomány határa akkor pozitívan irányított, ha

$$\int_\sigma f\cos\gamma_3 = \int_{\sigma^+} f\cos\gamma_3 - \int_{\sigma^-} f\cos\gamma_3,$$

azaz a felső lap normálisa a $(0,0,1)$ vektorral zár be legfeljebb 90° fokos szöget, míg az alsó lap normálisa az ellentett vektorral. Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\int_{\sigma^+} f\cos\gamma_3 = \int_{H_z} f\circ\sigma^+(x,y)\cos\gamma_3\circ\sigma^+(x,y)|D_1\sigma^+ \times D_2\sigma^+|(x,y)\,dx\,dy =$$

$$\int_{H_z} f\circ\sigma^+(x,y)\langle D_1\sigma^+ \times D_2\sigma^+, e_3\rangle(x,y)\,dx\,dy = \int_{H_z} f(x,y,\beta(x,y))\,dx\,dy.$$

Hasonlóan

$$\int_{\sigma^-} f\cos\gamma_3 = \int_{H_z} f(x,y,\alpha(x,y))\,dx\,dy,$$

ahonnan

$$\int_\sigma f\cos\gamma_3 = \int_{H_z} f(x,y,\beta(x,y))\,dx\,dy - \int_{H_z} f(x,y,\alpha(x,y))\,dx\,dy =$$

$$\int_{H_z}\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} D_3 f(x,y,z)\,dz\,dy,\ dx = \int_{G_z} D_3 f.$$

6. Tétel. (Gauss-Osztrogradszkij-tétel) *Legyen $U \subset \mathbb{R}^3$ egy összefüggő, nyílt halmaz, $X\colon U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pedig egy folytonosan differenciálható vektormező. Ha $G \subset U$ mindhárom tengelyre vonatkozóan normáltartomány, melynek pozitívan irányított σ határfelülete az U tartományban halad, akkor*

$$\int_G div\, X = \int_\sigma X.$$

Bizonyítás. Ha G mindhárom tengelyre vonatkozóan normáltartomány, akkor az előző feladat eredményének birtokában

$$\int_G \operatorname{div} X = \int_G D_1X^1 + \int_G D_2X^2 + \int_G D_3X^3 = \int_\sigma X^1\cos\gamma_1 + X^2\cos\gamma_2 + X^3\cos\gamma_3 = \int_\sigma X,$$

ahol az utolsó egyenlőséget elegendő elemi felületekre igazolni:

$$\int_\sigma X^1\cos\gamma_1 + X^2\cos\gamma_2 + X^3\cos\gamma_3 = \int_T X^1\circ\sigma(u,v)\langle D_1\sigma\times D_2\sigma, e_1\rangle(u,v) + \ldots\, du\, dv =$$

$$\int_T \langle D_1\sigma\times D_2\sigma, X\circ\sigma\rangle(u,v)\, du\, dv = \int_\sigma X.$$

□

A Gauss-Osztrogradszkij-tétel általánosabb verzióit illetően a síkbeli Stokes-tétel kapcsán tett megjegyzések érvényesek; 6 Megjegyzés. Ha G_k a p_* pontra zsugorodó tartományok sorozata, akkor az integrálszámítás középértéktétele szerint

$$\operatorname{div} X(p_*) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{G_k \text{ térfogata}}\int_{G_k}\operatorname{div} X = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{G_k \text{ térfogata}}\int_{\sigma_k} X.$$

Ennek az eredménynek a birtokában a divergenciát szokás fluxus-, vagy forrássűrűségnek is nevezni [4].

A Stokes-tétel térbeli verziójának levezetéséhez számítsuk ki a rotáció felületi integrálját a definíciókig visszafejtve a szereplő mennyiségeket:

$$\int_\sigma \operatorname{Rot} X = \int_T \langle \operatorname{Rot} X\circ\sigma, D_1\sigma\times D_2\sigma\rangle(u,v)\, du\, dv,$$

ahol az integrandus

$$\langle \operatorname{Rot} X\circ\sigma, D_1\sigma\times D_2\sigma\rangle(u,v) = -\langle D_1\sigma, \operatorname{Rot} X\circ\sigma\times D_2\sigma\rangle(u,v) =$$

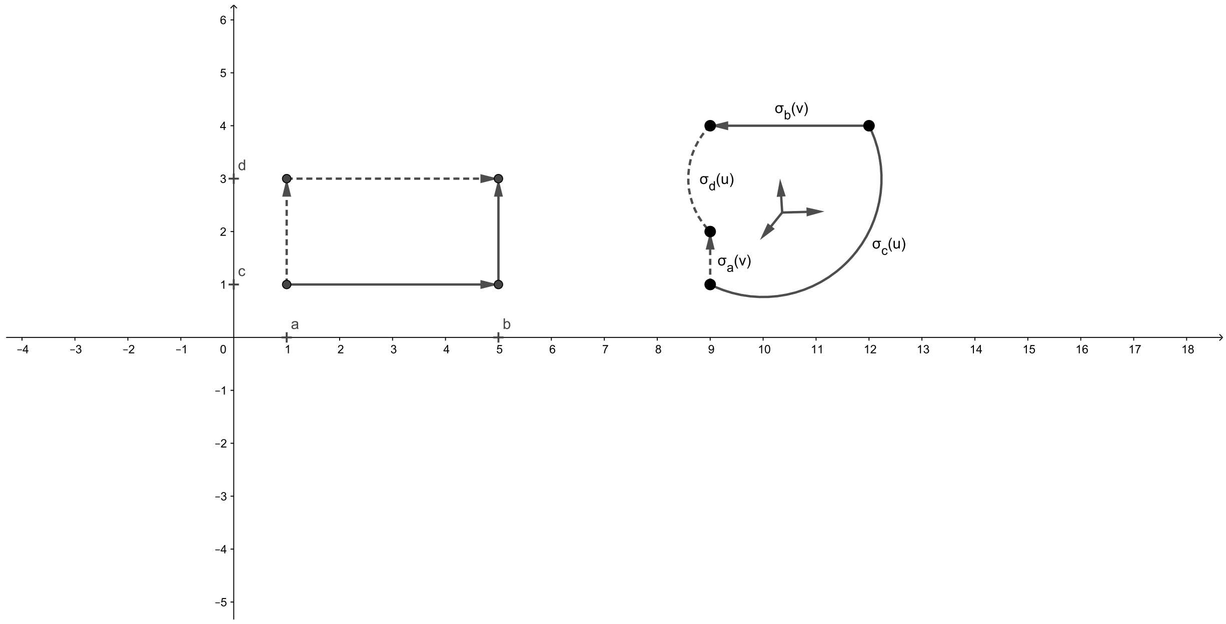
$$-\langle D_1\sigma(u,v), X'(\sigma(u,v))\,(D_2\sigma(u,v))\rangle + \langle D_2\sigma(u,v), X'(\sigma(u,v))\,(D_1\sigma(u,v))\rangle,$$

hiszen a rotáció a $\sigma(u,v)$ (felületi) pontban az $X'(\sigma(u,v))$ lineáris leképezés ferdeszimmetrikus részének vektorinvariánsa (konstans szorzótól eltekintve). A láncszabály szerint

$$X'(\sigma(u,v))\,(D_2\sigma(u,v)) = D_2\,(X\circ\sigma)\,,\quad X'(\sigma(u,v))\,(D_1\sigma(u,v)) = D_1\,(X\circ\sigma)\,.$$

Következésképpen

$$\langle \operatorname{Rot} X\circ\sigma, D_1\sigma\times D_2\sigma\rangle = -\langle D_1\sigma, D_2\,(X\circ\sigma)\rangle + \langle D_2\sigma, D_1\,(X\circ\sigma)\rangle.$$



4. ábra. A térbeli Stokes-tétel

A számításokat egyszerűsítendő, tegyük fel, hogy a felület paraméterezése kétszer folytonosan differenciálható és alkalmazzuk a szorzatszabályt:

$$\langle D_1\sigma, D_2 (X \circ \sigma)\rangle = D_2\langle D_1\sigma, X \circ \sigma\rangle - \langle D_2D_1\sigma, X \circ \sigma\rangle,$$

$$\langle D_2\sigma, D_1 (X \circ \sigma)\rangle = D_1\langle D_2\sigma, X \circ \sigma\rangle - \langle D_1D_2\sigma, X \circ \sigma\rangle,$$

ahonnan (a vegyes parciális deriváltak egyenlőségére való tekintettel)

$$\int_\sigma \operatorname{Rot} X = -\int_T D_2\langle D_1\sigma, X \circ \sigma\rangle(u,v)\,du\,dv + \int_T D_1\langle D_2\sigma, X \circ \sigma\rangle(u,v)\,du\,dv$$

következik, azaz

$$\int_\sigma \operatorname{Rot} X = -\int_a^b \left[\langle D_1\sigma, X \circ \sigma\rangle(u,v)\right]_c^d du + \int_c^d \left[\langle D_2\sigma, X \circ \sigma\rangle(u,v)\right]_a^b dv =$$

$$\int_a^b \langle D_1\sigma, X \circ \sigma\rangle(u,c)\,du - \int_a^b \langle D_1\sigma, X \circ \sigma\rangle(u,d)\,du +$$

$$\int_c^d \langle D_2\sigma, X \circ \sigma\rangle(b,v)\,dv - \int_c^d \langle D_2\sigma, X \circ \sigma\rangle(a,v)\,dv.$$

Ha a kapott formulát megfelelően interpretáljuk, akkor Stokes-tételének térbeli verziójához jutunk. Vegyük észre, hogy a σ_a, σ_b, σ_c és σ_d paramétervonalak (mint felületi görbék) érintői éppen a paraméterezés megfelelő helyen kiértékelt parciális deriváltvektorai:

$$\sigma_a'(v) = D_2\sigma(a,v), \quad \sigma_b'(v) = D_2\sigma(b,v), \quad \sigma_c'(u) = D_1\sigma(u,c), \quad \sigma_d'(u) = D_1\sigma(u,d).$$

Ennélfogva

$$\int_\sigma \operatorname{Rot} X = \int_{\sigma_c} X - \int_{\sigma_d} X + \int_{\sigma_b} X - \int_{\sigma_a} X.$$

A fellépő negatív előjelek figyelmeztetnek arra, hogy a σ_d és a σ_a paramétervonalak befutási irányát meg kell fordítanunk az ábrának megfelelően:

$$\int_\sigma \operatorname{Rot} X = \int_c X, \tag{9}$$

ahol c a peremgörbe pozitív irányítású paraméterezése, ami megfelel a paramétertartomány határának pozitív irányban történő befutásával.

3. Következmény. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^3$ csillagtartomány és tekintsünk egy $X\colon U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható vektormezőt. Ekkor a következő kijelentések ekvivalensek:*

(i) a vektormező konzervatív,

(ii) a csillagtartomány bármely két pontját összekötő görbére vett integrálja csak a kezdő- és a végponttól függ, a görbe választásától nem,

(iii) a csillagtartományban haladó bármely zárt görbére vett integrálja zérus,

(iv) $Rot\, X = 0$.

Bizonyítás. A bizonyítás a 2. Következmény bizonyításának mintájára végezhető el: X tehát éppen az

$$f(p) := \int_{p_*}^{p} X$$

összefüggéssel definiált skalármező gradiense. □

41. Feladat. Igazolja a térbeli Stokes-tételt olyan felületekre, melyek peremgörbéje síkgörbe.

Útmutatás. Zárjuk le a felület által határolt térrészt a peremgörbére illeszkedő D síklemezzel. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a síklap külső egységnormálisa az $e_3 = (0, 0, 1)$ vektor. Mivel $\operatorname{div} \operatorname{Rot} X = 0$, a Gauss-Osztrogradszkij-tétel szerint

$$\int_D \operatorname{Rot} X + \int_\sigma \operatorname{Rot} X = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_\sigma \operatorname{Rot} X = -\int_D \operatorname{Rot} X.$$

Mivel az egységnormális első két koordinátája zérus, ezért

$$\int_D \operatorname{Rot} X = \int_D \operatorname{rot} X_z,$$

ahol $X_z = (X^1, X^2)$. A síkbeli Stokes-tétel szerint

$$\int_D \operatorname{rot} X_z = \int_c X_z,$$

ahol c az e_3 irányából nézve pozitívan irányított határa a D síklemeznek. Ennélfogva

$$\int_\sigma \operatorname{Rot} X = -\int_c X_z = \int_{c^+} X_z,$$

ahol a c^+ görbe ezúttal már a σ felületet tartalmazó féltérből nézve pozitívan irányított. Végül pedig, mivel a deriváltvektorok harmadik koordinátája zérus a peremgörbe mentén, ezért

$$\int_\sigma \operatorname{Rot} X = \int_{c^+} X_z = \int_{c^+} X,$$

ami bizonyítandó volt.

42. Feladat. Számítsa ki az

$$X(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$$

vektormezőnek

- a $G = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ kocka felületére vonatkozó integrálját,
- a $G = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ kocka felületére vonatkozó integrálját,
- az origó középpontú, R sugarú gömbfelületre vonatkozó integrálját.

Útmutatás. Alkalmazzuk a Gauss-Osztrogradszkij-tételt: $\operatorname{div} X = 2(x + y + z)$, ahonnan rendre

$$\int_\sigma X = 3 \text{ és } \int_\sigma X = 0$$

az origóra nézve centrálszimmetrikus alakzatok esetében.

43. Feladat. Számítsa ki az

$$X(x, y, z) = (x, y, z)$$

vektormezőnek

- a $G = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ kocka felületére vonatkozó integrálját,
- a $G = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ kocka felületére vonatkozó integrálját,
- az origó középpontú, R sugarú gömbfelületre vonatkozó integrálját.

Útmutatás. Alkalmazzuk a Gauss-Osztrogradszkij-tételt: $\operatorname{div} X = 3$, ahonnan

$$\frac{1}{3}\int_\sigma X = G \text{ térfogata.}$$

44. Feladat. Számítsa ki az

$$X(x, y, z) = (x^2, xy, xz)$$

vektormezőnek a

$$\sigma\colon [0, 2\pi] \times [0, m] \to \sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

hengerfelületre vonatkozó integrálját.

Útmutatás. Zárjuk le a hengert az alsó és a felső fedőlappal és alkalmazzuk a Gauss-Osztrogradszkij-tételt:

$$\int_\sigma X = 4\int_G x - \int_{\text{alsó körlap}} X - \int_{\text{felső körlap}} X,$$

ahol

$$\int_{\text{alsó körlap}} X = 0,$$

hiszen a felületi normálissal történő skaláris szorzás eltünteti az X^1 és X^2 koordinátafüggvényeket, míg a harmadik koordinátafüggvény azonosan nulla az alsó körlapon. A felső körlapon a felületi egységnormális a $(0, 0, 1)$ vektor:

$$\int_{\text{felső körlap}} X = \int_T X^3 \circ \sigma(u, v)|D_1\sigma \times D_2\sigma|(u, v)\, du\, dv,$$

ahol $\sigma(u,v) = (u\cos v, u\sin v, m)$ a felső körlap paraméterezése a $T = [0,1] \times [0,2\pi]$ paramétertartományon[3]. Következésképpen

$$\int_{\text{felső körlap}} X = m \int_0^1 \int_0^{2\pi} u^2 \cos v \, dv \, du = 0.$$

Végül pedig

$$\int_\sigma X = 4 \int_G x = \int_0^m \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos\varphi \, dr \, d\varphi \, dz = 0$$

a hengerkoordináta-transzformációt alkalmazva.

45. Feladat. Számítsa ki az

$$X(x,y,z) = (\sin y, e^x, z^2)$$

vektormezőnek a $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ felső félgömbre vonatkozó integrálját.

Útmutatás. Zárjuk le a félgömböt az alsó lappal és alkalmazzuk a Gauss-Osztrogradszkij-tételt:

$$\int_\sigma X = 2 \int_G z - \int_{\text{alsó körlap}} X,$$

ahol

$$\int_{\text{alsó körlap}} X = 0,$$

hiszen X harmadik koordinátafüggvénye eltűnik (jegyezzük meg, hogy a felület pozitív irányításánál az alsó körlap normálisa a (0,0,-1) vektorral párhuzamos). Másfelől

$$2\int_G z = \int_{\text{alsó körlap}} \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} 2z \, dz \, dx \, dy = \int_{\text{alsó körlap}} R^2 - x^2 - y^2 \, dx \, dy =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R (R^2 - r^2) r \, dr \, d\varphi = 2\pi \left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2}$$

a síkbeli polárkoordináta-transzformációt alkalmazva.

46. Feladat. Számítsa ki az

$$X(x,y,z) = (x^2 y, e^y, z^2)$$

vektormező rotációjának a $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ felső félgömbre vonatkozó integrálját.

Útmutatás. A térbeli Stokes-tétel alkalmazásával

$$\int_\sigma \operatorname{Rot} X = \int_c X = \int_0^{2\pi} \big\langle (R^3 \cos^2 t \sin t, e^{R\sin t}, 0), (-R\sin t, R\cos t, 0) \big\rangle \, dt =$$

$$-\int_0^{2\pi} R^4 \sin^2 t \cos^2 t + R\cos t e^{R\sin t} \, dt = -\frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) \, dt = -\frac{R^4 \pi}{4}.$$

[3] A paraméterezésből adódó felületi normális párhuzamos a $(0,0,1)$ vektorral.

47. Feladat. Számítsa ki az általánosított kúp térfogatát.

Útmutatás. Tegyük fel, hogy a kúp csúcspontja az origó, alapja a $z = m$ magasságban lévő egyszerű zárt ív és tekintsük az

$$X(x, y, z) = (x, y, z)$$

helyzetvektormezőt. A Gauss-Osztrogradszkij-tétel szerint

$$\text{A kúp térfogata} = \int_G 1 = \frac{1}{3}\int_G \operatorname{div} X = \frac{1}{3}\left(\int_{\text{palást}} X + \int_{\text{alap}} X\right) = \frac{1}{3}\int_{\text{alap}} X,$$

mivel a palást normálisa merőleges a helyzetvektormezőre. Az alap külső egységnormálisa pedig a $(0, 0, 1)$ vektor a felület mentén. Ennélfogva

$$\text{A kúp térfogata} = \frac{1}{3}\int_T \langle X(0, 0, m), (0, 0, 1)\rangle |D_1\sigma \times D_2\sigma|(u, v)\, du\, dv = \frac{\text{alapterület} \times m}{3}.$$

7.1. A Maxwell-egyenletek

A vektoranalízis deriváltoperátorai fontos szerepet játszanak például a fizikában. Elegendő csupán a XIX. századi fizika legnagyobb hatású elméletére utalnunk, amit az ún. Maxwell-egyenletek alapoznak meg. Az első egyenlet integrális alakja

$$c^2 \int_\gamma \mathbf{B} = \int_\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_\sigma \mathbf{j},$$

ami a szereplő σ felület és γ peremgörbéjének pontra zsugorításával a

$$c^2 \operatorname{Rot} \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{j}$$

differenciális alakba írható. (ld. térbeli Stokes-tétel). Ez azt jelenti, hogy az időben változó elektromos tér ($\mathbf{E}$: elektromos térerősség, $\mathbf{j}$: térfogati áramsűrűség) mágneses teret kelt ($\mathbf{B}$: mágneses indukció). A második egyenlet integrális alakja

$$\int_\sigma \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_G \rho,$$

amit a szereplő G térrész és σ határfelületének pontra zsugorításával a

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

differenciális alakba írhatunk (ld. Gauss-Osztrogradszkij-tétel). Szemléletesen fogalmazva, az elektromos tér forrásai a töltések (ρ az ún. térfogati töltéssűrűség). A harmadik egyenlet:

$$\int_\gamma \mathbf{E} = -\int_\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

ahonnan

$$\operatorname{Rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

következik, azaz az időben változó mágneses tér elektromos teret kelt. Az első egyenlet szerint azonban az időben változó elektromos tér mágneses teret kelt és így tovább. Ez az ún. elektromágneses hullám, melynek terjedési sebessége $c = 3 \cdot 10^8$ méter/másodperc, azaz a fény sebessége. Például egy huzalban oszcilláló áram elektromágneses hullámokat bocsát ki és azokat, egy tőle nagy távolságban elhelyezett vezetőhuzalban ki is lehet mutatni. Ezt a kísérletet először Heinrich Hertz végezte el és igazolta vele a Maxwell-elmélet helyességét. *Hertz sikere egy egészen új technológia kezdetét jelentette. Ma már a tér tele van ilyen hullámokkal. Ezek a rádióhullámok, melyeket antennákban folyó váltakozó irányú áramok keltenek és a közönséges fényhullámoktól csak frekvenciájukban és hullámhosszukban különböznek* [5]. A teljesség kedvéért megemlítjük, hogy Maxwell negyedik egyenletének integrális alakja

$$\int_\sigma \mathbf{B} = 0,$$

míg a differenciális alak $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, ami azt a kísérleti tényt fejezi ki, hogy a mágneses tér forrásmentes (mágneses töltés nincs).

8. Függelék

8.1. Csoportfelületek: a speciális lineáris csoport és az ortogonális csoport

Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ egy összefüggő, nyílt halmaz és tekintsünk egy $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható leképezést. Tegyük fel, hogy $\det f'(p_*) \neq 0$, azaz a Jacobi-determináns nem tűnik el az értelmezési tartomány p_* pontjában, s ennélfogva - a folytonos differenciálhatóságra való tekintettel - a pont valamely r sugarú gömbkörnyezetében sem. Legyen G_k gömbszerű testek p_*-ra zsugorodó sorozata. Az integráltranszformáció tétele szerint

$$\int_{f(G_k)} 1 = \int_{G_k} |\det f'|,$$

ahonnan kiolvasható, hogy

$$\inf_{G_k} |\det f'| \leq \frac{\text{térfogat } f(G_k)}{\text{térfogat } G_k} \leq \sup_{G_k} |\det f'|;$$

mind a pontos alsó korlát, mind pedig a pontos felső korlát egy véges pozitív szám, hiszen a deriváltleképezés folytonos és felveszi a szélsőértékeit a G_k test lezártján. Az $k \to \infty$ határátmenetet véve

$$|\det f'(p_*)| = \lim_{k\to\infty} \frac{\text{térfogat } f(G_k)}{\text{térfogat } G_k},$$

ami azt jelenti, hogy az infinitézimális térfogatváltozás (előjeles) mértéke éppen a Jacobi-determináns értéke az adott pontban. Különös figyelmet érdemelnek tehát az olyan koordinátatranszformációk, melyek Jacobi determinánsa ± 1. Ilyen például a hengerkoordináta-transzformáció. A klasszikus geometriai transzformációk közül pedig azok az affin leképezések (ún. ekviaffin transzformációk) jöhetnek szóba, melyek lineáris részét az

$$SL(n) := \{A \in Mat_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

speciális lineáris csoport valamely eleme reprezentálja a kanonikus bázisban.

8.1.1. A speciális lineáris csoport

Tekintsük az n-edrendű kvadratikus mátrixok valós vektorterét, ellátva egy olyan skaláris szorzattal, melyre nézve az

$$E_{k=(i-1)n+j} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 \\ . & 0 & 1 & 0 & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

kanonikus bázis ortonormált rendszert alkot, ahol az egyetlen egyes a mátrix i-dik sorának j-dik oszlopában áll. Tekintettel az i-dik sor szerinti kifejtési szabályra,

$$D_{k=(i-1)n+j} \det(A) = \lim_{t \to 0} \frac{\det(A + tE_{k=(i-1)n+j}) - \det A}{t} = A_{ij},$$

ahol A_{ij} az a_{ij} mátrixelemhez tartozó algebrai aldetermináns. A determinánsfüggvény összes parciális deriváltja tehát akkor és csak akkor tűnik el az A pontban, ha a szóban forgó mátrix determinánsa zérus. Ez azonban az

$$SL(n) := \det^{-1}(1)$$

szinthalmaz elemeinek esetében kizárt. A speciális lineáris csoport tehát - legalábbis lokálisan - egy (n^2-1)-dimenziós hiperfelületet alkot az n-edrendű kvadratikus mátrixok vektorterében. A szóban forgó skaláris szorzatra nézve

$$\operatorname{grad} \det(A) = \sum_k D_{k=(i-1)n+j} \det(A) E_{k=(i-1)n+j} = \sum_k A_{ij} E_{k=(i-1)n+j}.$$

Speciálisan: $\operatorname{grad} \det(E) = E$, ami azt jelenti, hogy a felület érintősíkját az

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & 0 & 1 & 0 & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

egységpontban azok a mátrixok feszítik ki, melyek ortogonálisak az egységmátrixra. Mivel

$$E = \sum_k \delta_{ij}\ E_{k=(i-1)n+j} = \sum_{i=1}^{n} E_{(i-1)n+i},$$

ezért az

$$M = \sum_k m_{ij} E_{k=(i-1)n+j}$$

mátrix pontosan akkor érintőleges az $SL(n)$ hiperfelülethez az E pontban, ha

$$\langle M, E \rangle\ = m_{11} + \ldots + m_{nn} = 0;$$

az érintősíkot kifeszítő mátrixok átlósösszege tehát zérus és viszont.

8.1.2. Az ortogonális csoport

Tekintsük az ortogonális mátrixok

$$O(n) := \{A \in Mat_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = E\}$$

csoportját (lineáris izometriacsoport), mint az $f(A) := AA^T - E$ leképezéshez tartozó $f^{-1}(0)$ szintfelületet, ahol 0 a megfelelő méretű zérusmátrix. Egyszerű számítás mutatja, hogy

$$f'(A)(B) = \lim_{t\to 0} \frac{(A+tB)(A+tB)^T - AA^T}{t} = AB^T + BA^T.$$

Ha $A \in f^{-1}(0)$ és C egy tetszőleges szimmetrikus mátrix, akkor $f'(A)(B) = C$, ahol $B := \frac{1}{2}CA$. Ez azt jelenti, hogy $f'(A)$ szürjektív lineáris leképezése a valós elemű kvadratikus mátrixok vektorterének a szimmetrikus mátrixok alterére. A továbbiakban a gradiens geometriai jellemzéséről szóló 1. Tétel bizonyításában látottak mintájára okoskodunk. Mivel minden kvadratrikus mátrix előáll egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegeként az

$$A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$$

formula szerint, a mátrixok vektortere is felbomlik a szimmetrikus, illetve antiszimmetrikus mátrixok alterének direkt összegére. Könnyű látni, hogy ezek az alterek ortogonálisak is a kanonikus belső szorzatra vonatkozóan. Tekintsük az

$$F\colon \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}),\ F(A) = f(A) + \frac{A-A^T}{2}$$

leképezést, melynek Jacobi-mátrixa ($f'(A)$ szürjektivitása miatt) reguláris bármely $A \in f^{-1}(0)$ pontban. Ha $A \in f^{-1}(0)$, akkor

$$F(A) = f(A) + \frac{A-A^T}{2} = \frac{A-A^T}{2}$$

és a lokális F^{-1} inverz-leképezés megszorítása segítségével az ortogonális csoport egy paraméterezését kapjuk az A pont körül. A paramétertartomány az antiszimmetrikus mátrixok vektorterének $F(A)$-körüli összefüggő, nyílt halmaza. Az ortogonális csoport tehát egy

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \ - \ \text{dimenziós}$$

felület a kvadratikus mátrixok vektorterében. Érintővektorai az E egységpontban pedig az

$$f'(E)(M) = 0$$

egyenlet megoldásai (v.ö. a gradiens minden pontban merőleges az érintősokaságra):

$$0 = f'(E)(M) = M^T + M,$$

azaz éppen a ferdeszimmetrikus mátrixok.

1. Példa. Legyen

$$a(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

egy négydimenziós euklideszi tér ortogonális csoportjának egyparaméteres részcsoportja (az egységelemre illeszkedő sima görbe). Látható, hogy az első két koordinátavektor által kifeszített altér elemei helyben maradnak, a komplementer altérben pedig egy forgás zajlik a t paraméter függvényében. Differenciálással kapjuk, hogy $a'(t) = Aa(t)$, ahol

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in A_n(\mathbb{R}).$$

Egy lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldásáról van szó, melynek alapmátrixa A és az $a(0) = E$ kezdeti feltétel mellett a megoldás $e^{tA} = a(t)$ (ld. mátrixexponens).

Az $O_n(\mathbb{R})$ csoportfelület egy másik interpretációja azon alapszik, hogy az ortogonális mátrixok oszlopai egymásra merőleges egységvektorok. Az oszlopvektorokon (balról jobbra) végighaladva minden mátrixot beazonosíthatunk az

$$S_{n-1} \times S_{n-2} \times \ldots \times S_1 \times \{\pm u\}$$

felület egy elemével, ahol S_i jelöli a megfelelő dimenziós egységgömbfelületet, az utolsó tagban pedig u a tér egységvektora. Innen látható, hogy az ortogonális csoport kompakt felület, melynek pontosan két összefüggő komponense van. Az egységkomponens (azaz az egységelemet tartalmazó maximális összefüggő részfelület) éppen a pozitív determinánsú ortogonális mátrixokat tartalmazza, azaz nem más, mint a valódi forgások csoportja.

8.2. A maximum-elv

Legyen $U \subset \mathbb{R}^2$ egy összefüggő, nyílt halmaz, $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kétszer folytonosan differenciálható skalármező és $p_* \in U$. Tekintsünk egy p_* centrumú, r sugarú $D_r \subset U$ körlapot, melynek pozitívan irányított c_r határgörbéje az U tartományban halad. A Stokes-tétel síkbeli verziója alapján

$$\int_{D_r} \Delta f = \int_{D_r} \operatorname{rot} \operatorname{grad}^{\perp} f = \int_{c_r} \operatorname{grad}^{\perp} f$$

ahol $\operatorname{grad}^{\perp} f = (-D_2 f, D_1 f)$, azaz

$$\int_{D_r} \Delta f = \int_0^{2\pi} r D_2 f(x_* + r\cos t, y_* + r\sin t)\sin t + r D_1 f(x_* + r\cos t, y_* + r\sin t)\cos t\, dt.$$

Bevezetve a

$$g(r,t) := f(x_* + r\cos t, y_* + r\sin t)$$

függvényt,

$$D_1 g(r,t) = \cos t D_1 f(x_* + r\cos t, y_* + r\sin t) + \sin t D_2 f(x_* + r\cos t, y_* + r\sin t),$$

ahonnan

$$\int_{D_r} \Delta f = r \int_0^{2\pi} D_1 g(r,t)\, dt.$$

Ha f szubharmónikus skalármező, akkor $\Delta f \geq 0$ és azt kapjuk, hogy

$$\int_0^{2\pi} D_1 g(r,t)\, dt \geq 0.$$

Integrálva mindkét oldalt az r változó szerint:

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} D_1 g(r,t)\, dt\, dr \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{2\pi} g(R,t) - g(0,t)\, dt \geq 0,$$

azaz

$$\int_{c_R} f = R \int_0^{2\pi} g(R,t)\, dt \geq R \int_0^{2\pi} g(0,t)\, dt = 2\pi R f(p_*),$$

felhasználva, hogy $g(0,t) = f(p_*)$. Átrendezéssel

$$\frac{1}{2\pi R} \int_{c_R} f \geq f(p_*). \tag{10}$$

Szuperharmónikus skalármezőkre a fordított irányú

$$\frac{1}{2\pi R} \int_{c_R} f \leq f(p_*) \tag{11}$$

becslés érvényes, míg a harmónikus skalármezők esetében

$$\frac{1}{2\pi R} \int_{c_R} f = f(p_*), \tag{12}$$

azaz $f(p_*)$ éppen a skalármező c_R körre vonatkozóan számított középértéke. Ez a harmónikus skalármezők ún. középértéktétele. A maximum-, illetve minimumelv pedig kimondja, hogy

- ha egy szubharmónikus skalármező felveszi a maximumát a $p_* \in U$ belső pontban, akkor konstans U fölött.

Legyen ugyanis $M = f(p_*)$ és

$$E := f^{-1}(M) = \{p \in U \mid f(p) = M\}.$$

Ekkor E nemüres ($p_* \in E$) és bármely $p \in E$ esetén

$$M = f(p) \leq \frac{1}{2\pi R} \int_{c_R} f \leq M,$$

ami azt jelenti, hogy f konstans minden olyan R sugarú körvonal mentén, melynek középpontja p és az U tartományban halad. Kapjuk tehát, hogy E nyílt részhalmaza U-nak. Egyszersmind zárt, mint zárt halmaz folytonos ősképe. Mivel az U értelmezési tartomány összefüggő, ezért $E = U$, azaz $f(p) = M$ $(p \in U)$ következik. Hasonlóan kapjuk, hogy

- ha egy szuperharmónikus skalármező felveszi a minimumát a $p_* \in U$ belső pontban, akkor konstans U fölött.

Mindez azt jelenti, hogy egy nemkonstans harmónikus skalármező se a minimumát, se pedig a maximumát nem veheti fel értelmezési tartománya belső pontjában.

48. Feladat. Igazolja, hogy a

$$\Delta f(x,y) = f^3(x,y) \quad (x^2+y^2<1) \;\text{ és }\; f(x,y)=0 \quad (x^2+y^2=1)$$

peremértékfeladat egyetlen megoldása az azonosan nulla függvény.

Útmutatás. A megoldófüggvény felveszi a maximumát és a minimumát is az $x^2+y^2 \le 1$ zárt körlapon. Amennyiben a maximum határpontban lép fel, akkor $f(x,y) \le 0$, hiszen a peremen a függvény azonosan nulla. Ha az (x_0,y_0) maximumhely a körlap belsejében van, akkor a másodrendű parciálisokból álló mátrix negatív szemidefinitségét felhasználva

$$0 \ge \Delta f(x_0,y_0) = f^3(x_0,y_0),$$

ami azt jelenti, hogy $f(x,y) \le f(x_0,y_0) \le 0$ ebben az esetben is. Végül

$$\Delta f(x,y) = f^3(x,y) \le 0,$$

azaz f szuperharmónikus. Ha a minimumot az értelmezési tartomány belsejében veszi fel, akkor a minimum-elv alapján készen vagyunk. Ha pedig a peremen, akkor a függvény maximuma és minimuma is zérus, ami azt jelenti, hogy a függvény azonosan zérus.

7. Tétel. *Legyen U egy összefüggő, nyílt halmaz, melynek határa a c egyszerű zárt ív. Az*

$$\Delta f = \alpha \;\; (U \textit{ pontjaiban}) \;\; \textit{és} \;\; f \circ c = \beta$$

ún. Dirichlet-féle, vagy első peremértékprobléma megoldása - amennyiben létezik - egyértelműen meghatározott.

Bizonyítás. Legyen f_1 és f_2 is megoldás; ekkor a $g = f_2 - f_1$ differenciafüggvény a

$$\Delta g = 0 \;\; (U \text{ pontjaiban}) \;\; \text{és} \;\; g \circ c = 0$$

Dirichlet-feladat megoldása. Ha a megoldófüggvény minimuma, vagy maximuma belső pontban lép fel, akkor a minimum- (vagy a maximum-) elv alapján készen vagyunk. Ha pedig mindkettő a peremgörbére esik, akkor mindkettő zérus, ami azt jelenti, hogy $f_1 = f_2$. □

49. Feladat. Mely α hatvány esetén harmónikus, szubharmónikus, illetve szuperharmónikus az

$$f(x_1,\ldots,x_n) := \left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right)^\alpha$$

skalármező.

Útmutatás. Mivel

$$D_1 f(x_1, \dots, x_n) = 2x_1\alpha\left(x_1^2 + \dots + x_n^2\right)^{\alpha-1},$$

$$D_1 D_1 f(x_1, \dots, x_n) = 2\alpha\left(x_1^2 + \dots + x_n^2\right)^{\alpha-1} + 4x_1^2\alpha(\alpha-1)\left(x_1^2 + \dots + x_n^2\right)^{\alpha-2},$$

azt kapjuk, hogy

$$\Delta f = 2\alpha(n + 2(\alpha-1))\left(x_1^2 + \dots + x_n^2\right)^{\alpha-1},$$

azaz harmónikus skalármezőt kapunk $\alpha = 0$, vagy $\alpha = 1 - n/2$ esetén stb.

50. Feladat. Fejezze ki a sík Laplace operátorának hatását polárkoordináták segítségével.

Útmutatás. Formális differenciálással

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial x} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial \varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial x}.$$

Hasonlóan,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial \varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial y}.$$

A polártávolság és a polárszög deriváltjainak meghatározásához induljunk ki a polárkoordináta-transzformáció

$$x = r\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\varphi.$$

képleteiből. Az x változó szerint differenciálva

$$1 = \frac{\partial r}{\partial x}\cos\varphi - r\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$0 = \frac{\partial r}{\partial x}\sin\varphi + r\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

ahonnan a Cramer-szabály szerint

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r}$$

és hasonlóan

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r}.$$

Ezeknek a képleteknek a birtokában

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial x} = -\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\sin^2\varphi}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial y} = \frac{\cos^2\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial x} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\sin\varphi - \frac{1}{r}\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\sin(2\varphi)}{r^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial y} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y}\cos\varphi - \frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\sin(2\varphi)}{r^2}.$$

Kapjuk tehát, hogy

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}. \tag{13}$$

51. Feladat. Igazolja, hogy az $f(r,\varphi)=r^n\cos(n\varphi)$ és az $f(r,\varphi)=r^n\sin(n\varphi)$ skalármezők harmonikusak.

Útmutatás. Alkalmazzuk a (13) formulát:

$$\Delta f = n(n-1)r^{n-2}\cos(n\varphi) - n^2r^{n-2}\cos(n\varphi) + nr^{n-2}\cos(n\varphi) = 0.$$

8.3. Liouville-tétel: összenyomhatatlan folyadék áramlása

Legyen U egy összefüggő, nyílt halmaz, $X\colon U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható vektormező és $p\in U$. A vektormező p-ből induló integrálgörbéje a

$$X\circ c_p(t)=c_p'(t)$$

differenciálegyenlet megoldása a $c_p(0)=p$ kezdeti feltétel mellett. A vektormező által generált lokális folyam a p pont elegendően kicsiny G_0 környezetét alapul véve

$$\varphi\colon G_0\times(-\varepsilon,\varepsilon),\ \ \varphi(q,t):=c_q(t).$$

A következőkben arra leszünk kíváncsiak, hogy egy $D\subset U$ tartomány térfogata hogyan vátozik a vektormező által reprezentált folyadékáramlás során (az áramvonalak éppen a vektormező integrálgörbéi). Legyen $\varphi_t(q):=c_q(t)$ és tekintsük a D tartomány pontjainak helyzetét a t időpillanatban:

$$D_t:=\{\varphi_t(q)\mid q\in D\}.$$

A D_t tartomány térfogata

$$V(t)=\int_{D_t}1=\int_D|\det\varphi_t'|.$$

Mivel φ_0 az identikus leképezés, ezért feltehetjük, hogy $\det\varphi_t'>0$, legalábbis az origó elegendően kicsiny környezetében. Következésképpen

$$V(t):=\int_D\det\varphi_t'\quad\Rightarrow\quad V'(0)=\int_D\lim_{t\to 0}\frac{\det\varphi_t'-\det\varphi_0'}{t}.$$

Legyen $q\in D$ rögzített; bevezetve a $C(t):=\varphi_t'(q)$ görbét a 3×3-as mátrixok vektorterében,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\det\varphi_t'(q)-\det\varphi_0'(q)}{t}=(\det\circ C)'(0)=\det{}'(C(0))(C'(0))=\operatorname{trace}C'(0)$$

a 8.1.1. alfejezetben látottak szerint. Mivel a $C'(0)$ mátrix sorai

$$D_4D_i\varphi(q,0)=D_iD_4\varphi(q,0),$$

ahol

$$D_4\varphi(q,0)=c_q'(0)=X\circ c_q(0)=X(q),$$

az következik, hogy

$$\lim_{t\to 0}\frac{\det\varphi_t'(q)-\det\varphi_0'(q)}{t}=\ \operatorname{trace}X'(q),$$

s ennélfogva

$$V'(0)=\int_D\operatorname{trace}X'=\int_D\operatorname{div}X.$$

A $t = 0$ pozíciót egy áramvonal mentén eltolva

$$V'(t) = \int_{D_t} \operatorname{div} X.$$

Ez az ún. Liouville-tétel, szemléletes tartalma pedig az, hogy divergenciamentes vektromező által reprezentált folyadékáramlás megőrzi a tartományok térfogatát. Más szavakkal, összenyomhatatlan fázisfolyadék áramlik a fázistérben. [1]. Jegyezzük meg, hogy a bizonyítás érdemi változtatás nélkül elmondható mind a magasabb dimenziós terek ($n \geq 4$), mind pedig az euklideszi sík ($n = 2$) esetében.

Hivatkozások

[1] V. I. Arnold, Közönséges differenciálegyenletek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

[2] Serény György, Formális és szemléletes vektoranalízis, Műegyetemi Kiadó, 2002.

[3] Szőkefalvi-Nagy Gyula, Gehér László, Nagy Péter, Differenciálgeometria, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

[4] J. Hass, F. R. Giordano, G. B. Thomas Jr., M. D. Weir, Thomas-féle kalkulus 3, Typotex Kiadó 2007.

[5] V. F. Weisskopf, Tudás és csoda (A természet, ahogyan az ember megismerte), Gondolat Kiadó, Budapest, 1987.