Az affin geometria alapjai

Vincze Csaba

Debreceni Egyetem

2022. március 18.

Tartalomjegyzék

1. Az affin geometria axiómái

1.1. Illeszkedési axiómák, a Hilbert-féle illeszkedési tér

Nemdefiniált fogalmak: pont, egyenes és sík. Jelölje ezek halmazát rendre $\mathbb{E}$, $\mathbb{L}$ és $\mathbb{P}$. A pont, egyenes és sík közelebbi meghatározását mellőzzük. Ehelyett a közöttük lévő ún. illeszkedési reláció (kapcsolat) szabályait fogalmazzuk meg, mint axiómákat. Ha az illeszkedési reláció kielégíti az

(I1) Bármely két pontra illeszkedik egy és csak egy egyenes

(I2) Bármely egyenesre illeszkedik legalább két pont

(I3) Van három nem egy egyenesre illeszkedő pont

(I4) Bármely három nem egy egyenesre illeszkedő pontra illeszkedik egy és csak egy sík

(I5) Egyetlen sík sem az üreshalmaz

(I6) Ha egy egyenes két pontja illeszkedik egy síkra, akkor az egyenes is illeszkedik a síkra

(I7) Ha két síknak van közös pontja, akkor további közös pontjuk is van

(I8) Van négy nem egy síkra illeszkedő pont

illeszkedési axiómákat, akkor $(\mathbb{E}, \mathbb{L}, \mathbb{P})$ egy ún. Hilbert-féle illeszkedési tér. Az $(\mathbb{E}, \mathbb{L})$ pár Hilbert-féle illeszkedési sík, ha (I1)-(I3) teljesül. Az elmélet kifejtése két szálon fut: egyrészt az axiómákból, illetve a már bizonyított állításokból levezethető állítások megfogalmazása, másrészt pedig a fogalmak körének szélesítése a nemdefiniált fogalmak, illetve a már definiált fogalmak felhasználásával.

1. Állítás. *Két nem diszjunkt sík metszete egyenes.*

Bizonyítás. A következő axiómákra hivatkozunk:
I7. Ha két síknak van közös pontja, akkor további közös pontjuk is van
I1. Bármely két pontra illeszkedik egy és csak egy egyenes
I6. Ha egy egyenes két pontja illeszkedik egy síkra, akkor az egyenes is illeszkedik a síkra.
További pontokat a két sík metszetében kizár
I4. Bármely három nem egy egyenesre illeszkedő pontra illeszkedik egy és csak egy sík □

Az állítás megfogalmazásánál halmazelméleti terminológiát használtunk. Bár nem szükségszerű, hogy az egyenesek és a síkok pontokból álló részhalmazok legyenek, a szemléletnek tett engedmény megkönnyíti a fogalmazást.

1. Definíció. (térelemek kölcsönös helyzete: egyenesek) *Két egyenest metszőnek nevezünk, ha van közös pontjuk és nem esnek egybe. Az egyenesek kitérők, ha nincsenek egy síkban. Két egyenes párhuzamos, ha egy síkban vannak és nincs közös pontjuk, vagy ha egybeesnek.*

1. Feladat. Igazolja logikailag ekvivalens átalakításokkal, hogy a párhuzamosság a metsző, vagy kitérő állítás tagadása.

2. Definíció. (térelemek kölcsönös helyzete: síkok) *Két síkot metszőnek nevezünk, ha van közös pontjuk és nem esnek egybe. Két sík párhuzamos, ha nincs közös pontjuk, vagy ha egybeesnek.*

1. Megjegyzés. Az 1. Állítás szerint metsző síkok közös része egyenes.

3. Definíció. (térelemek kölcsönös helyzete: egyenes és sík) *Egy egyenes és egy sík metsző, ha van közös pontjuk és az egyenes nem illeszkedik a síkra. Egy egyenes és egy sík párhuzamos, ha nincs közös pontjuk, vagy ha az egyenes illeszkedik a síkra.*

2. Állítás. *Egy Hilbert-féle illeszkedési tér minden síkja Hilbert-féle illeszkedési sík.*

A bizonyítást illetően ld. [7].

1. Példa. (a minimális modell) A Hilbert-féle illeszkedési tér minimális modelljében

$$\mathbb{E} = \{A, B, C, D\},\ \mathbb{L} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\},$$
$$\mathbb{P} = \{\{A, B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, C, D\}, \{B, C, D\}\},$$

azaz az egyenesek a kételemű, a síkok pedig a háromelemű részhalmazok. (I8) szerint ennél kevesebb pontja nem lehet egy illeszkedési térnek. Az illeszkedési sík minimális modellje a tér minimális modelljének síkja.

2. Feladat. Állapítsa meg a térelemek kölcsönös helyzetét a minimális modellben.

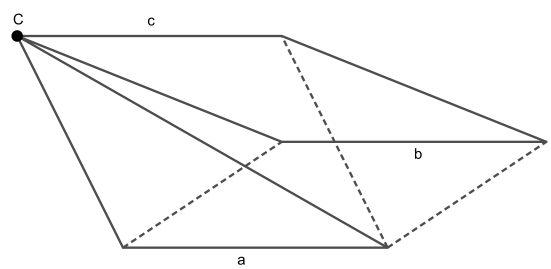
1.2. Az affin párhuzamossági axióma

Egy illeszkedési teret (illetve egy illeszkedési síkot) **affin tér**nek (illetve **affin sík**nak) nevezünk, ha teljesül az ún. **affin párhuzamossági axióma** (APP): megadva egy pontot és egy rá nem illeszkedő egyenest, létezik egy és csak egy olyan egyenes, mely illeszkedik az adott pontra és párhuzamos az adott egyenessel.

1. Tétel. *Egy affin tér minden síkja affin sík.*

3. Feladat. Bizonyítsa be, hogy

- ha egy egyenes párhuzamos egy sík valamely egyenesével, akkor párhuzamos magával a síkkal is,
- ha egy egyenes párhuzamos az S síkkal, akkor az egyenesre illeszkedő bármely további sík vagy párhuzamos az S síkkal, vagy az egyenessel párhuzamos egyenesben metszi az S síkot,
- párhuzamos síkok transzverzális síkja a síkokat párhuzamos egyenesekben metszi.



1. ábra. A párhuzamosság tranzitív

2. Tétel. *A párhuzamosság ekvivalenciareláció az affin tér egyeneseinek halmazán; az általa indukált osztályokat irányoknak, vagy másodfajú sugársornak nevezzük.*

Bizonyítás. A reflexivitás és a szimmetria nyilvánvaló. A tranzitivitás igazolásához tegyük fel, hogy $a \parallel b$ és $b \parallel c$. Feladatunk annak bizonyítása, hogy $a \parallel c$. Feltehető, hogy az a, b és c egyenesek páronként különbözőek. Ellenkező esetben a tranzitivitás automatikusan teljesül. Az a és c egyenesnek nem lehet közös pontja, mert akkor a közös ponton keresztül két, a b egyenessel párhuzamos egyenes haladna, ami ellentmond az (APP) axiómának. Mivel c párhuzamos az S_{ab} sík egy egyenesével, ezért párhuzamos az S_{ab} síkkal is. Két eset lehetséges: $c \subset S_{ab}$, vagy $c \cap S_{ab} = \emptyset$. Az első esetben az a

és c egyenesek nyilvánvalóan közös síkban vannak, a második eset diszkussziójához pedig válasszunk egy $C \in c$ pontot (1. ábra). Mivel b párhuzamos az S_{aC} sík egy egyenesével (ez éppen az a egyenes), ezért párhuzamos az S_{aC} síkkal is. A b egyenesre illeszkedő S_{bc} sík tehát egy a C pontra illeszkedő és a b egyenessel párhuzamos egyenesben metszi az S_{aC} síkot. Ez (APP) miatt nem lehet más, mint a c egyenes: $c = S_{aC} \cap S_{bc}$, azaz a és c közös síkban vannak. □

1. Következmény. *Megadva egy pontot és egy rá nem illeszkedő síkot, létezik egy és csak egy sík, mely illeszkedik az adott pontra és párhuzamos az adott síkkal.*

Bizonyítás. Legyen S az adott sík és vegyünk fel egy az S síkot kifeszítő metsző egyenespárt. Ezek tagjaival párhuzamos egyeneseket húzva az adott ponton keresztül, az általuk kifeszített sík párhuzamos lesz az adott síkkal. Metszésvonaluk ugyanis párhuzamos lenne a metsző egyenespár mindkét tagjával a 3. Feladat eredményeinek alapján. Az egyértelműség abból következik, hogy az adott pontra illeszkedő párhuzamos sík tartalmazza a metsző egyenespár tagjaival párhuzamos és az adott pontra illeszkedő egyeneseket. □

2. Következmény. *A párhuzamosság ekvivalenciareláció az affin tér síkjainak halmazán.*

1.3. Az affin tér vektortérmodellje

Tekintsük a rendezett valós számhármasok vektorterét:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

A szemléletet segítő volta miatt használni fogjuk a formális $\vec{AB} = B - A$ rövidítést. Jegyezzük meg, hogy

$$\vec{AB} = \vec{CD} \;\Leftrightarrow\; B - A = D - C \;\Leftrightarrow\; A + D = B + C.$$

A modell $P_1(x_1, y_1, z_1)$ és $P_2(x_2, y_2, z_2)$ pontokra illeszkedő egyenese

$$l := \{P_1 + tv \mid t \in \mathbb{R}\},$$

ahol $v = \vec{P_1P_2}$ az egyenes ún. irányvektora. A P_1 kezdőpontot az egyenes mentén szabadon eltolhatjuk, az irányvektor fölött pedig nemzérus skalárszorzó erejéig szabadon rendelkezünk. A (nem kollineáris) P_1, P_2 és P_3 pontokra illeszkedő sík

$$S = \{P_1 + tv + sw \mid t, s \in \mathbb{R}\},$$

ahol $v = \vec{P_1P_2}$, $w = \vec{P_1P_3}$. A P_1 kezdőpontot a sík mentén szabadon eltolhatjuk, a kifeszítő vektorok fölött pedig nemzérus determinánsú mátrixszorzó erejéig szabadon rendelkezünk:

$$\begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Igazolni fogjuk, hogy a modell két egyenese akkor és csak akkor párhuzamos, ha irányvektoraik egymás (nemzérus) skalárszorosai. Ebből nyilvánvalóan következik, hogy a modellben teljesül az affin párhuzamossági axióma. A bizonyításra rátérve, legyen l_1 a P_1 pontra illeszkedő, v_1 irányvektorú, l_2 pedig a P_2 pontra illeszkedő, v_2 irányvektorú egyenes és tegyük fel, hogy $v_2 = \lambda v_1$. Ha a két egyenesnek P közös pontja, akkor

$$l_2 = \{P + tv_2 \mid t \in \mathbb{R}\} = \{P + tv_1 \mid t \in \mathbb{R}\} = l_1$$

következik. Ha nincs közös pontjuk, akkor P_1, $P_1 + v_1$ és P_2 nemkollineáris pontok, melyekre az

$$S = \{P_1 + tv_1 + s\vec{P_1P_2} \mid t, s \in \mathbb{R}\} = \{P_2 + tv_2 + s\vec{P_1P_2} \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

sík illeszkedik, hiszen a kezdőpontot a sík mentén szabadon eltolhatjuk ($t = 0, s = 1$) és - feltevésünk szerint - $v_2 = \lambda v_1$. Az $s = 0$ választás mellett egyfelől $l_1 \subset S$, másfelől pedig $l_2 \subset S$ következik. Az egyenesek tehát egy síkban vannak, azaz $l_1 \mid\mid l_2$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy l_1 és l_2 különböző párhuzamos egyenesek ($l_1 = l_2$ esetén a $v_2 = \lambda v_1$ összefüggés nyilvánvaló). Mivel a P_2 pontra illeszkedő, v_1 irányvektorú egyenes - az előző eset szerint - párhuzamos az l_1 egyenessel és közös síkjuk[1]

$$S = \{P_1 + tv_1 + s\vec{P_1P_2} \mid t, s \in \mathbb{R}\},$$

kapjuk, hogy

$$P_2 + v_2 = P_1 + t_2v_1 + s_2\vec{P_1P_2} \;\Rightarrow\; \vec{P_1P_2} + v_2 = t_2v_1 + s_2\vec{P_1P_2} \tag{1}$$

írható bizonyos t_2, s_2 valós számok esetén. Ha $s_2 = 1$, akkor $v_2 = t_2v_1$ és készen vagyunk. Ha pedig $s_2 \neq 1$, akkor

$$\vec{P_1P_2} = \frac{t_2v_1 - v_2}{1 - s_2}.$$

Felcserélve az egyenesek szerepét,

$$\vec{P_2P_1} = \frac{t_1v_2 - v_1}{1 - s_1},$$

ami azt jelenti, hogy

$$\frac{t_2v_1 - v_2}{1 - s_2} = -\frac{t_1v_2 - v_1}{1 - s_1} \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{t_2}{1 - s_2} - \frac{1}{1 - s_1}\right)v_1 = -\left(\frac{t_1}{1 - s_1} - \frac{1}{1 - s_2}\right)v_2.$$

Ha

$$\frac{t_2}{1 - s_2} - \frac{1}{1 - s_1} \neq 0,$$

akkor készen vagyunk, míg

$$\frac{t_2}{1 - s_2} - \frac{1}{1 - s_1} = 0 \quad\Rightarrow\quad t_2 = \frac{1 - s_2}{1 - s_1}$$

esetén visszahelyettesítve az (1) egyenletbe:

$$\vec{P_1P_2} + v_2 = \frac{1 - s_2}{1 - s_1}v_1 + s_2\vec{P_1P_2} \quad\Rightarrow\quad P_2 + \frac{1}{1 - s_2}v_2 = P_1 + \frac{1}{1 - s_1}v_1,$$

ami azt jelenti, hogy az l_1 és l_2 egyeneseknek közös pontja van - ellentmondás.

2. Megjegyzés. Jóllehet a háromdimenziós vektortérmodell bármely síkja modell az affin sík számára, az affin sík vektortérmodelljét ettől függetlenül is megkonstruálhatjuk a rendezett valós számpárok $\mathbb{R}^2$ vektorteréből kiindulva. Egyik konstrukciónál sem lényeges, hogy a koordináták valós számok legyenek. Használhatunk tetszőleges $\mathbb{K}$ testet, sőt elegendő megkövetelni, hogy $\mathbb{K}$ csupán ferdetest legyen. Ezek létező általánosítások, az írásmunkát azonban elbonyolítaná a szorzás kommutativitásának feladása (ferdetest) [6].

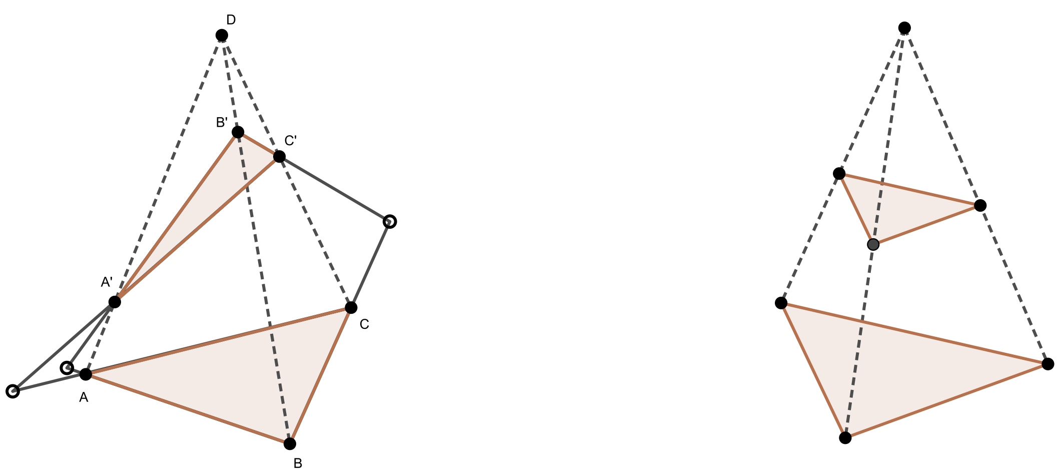
[1] A közös sík meghatározása illeszkedési probléma és megoldása felhasználható a párhuzamossággal kapcsolatos vizsgálatainkban.

2. A Desargues-féle tételek

1. Lemma. *Legyenek a, b és c az affin tér különböző egyenesei, melyek páronként egy síkban vannak. Ekkor a következő esetek lehetségesek*

- *a, b és c közös síkban van,*
- *a, b és c párhuzamosak,*
- *a, b és c konkurrensek, azaz közös pontban futnak össze.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az egyeneseket tartalmazó S_{ab}, S_{bc} és S_{ac} síkok páronként különbözőek és például b és c metszik egymást a P pontban. Ekkor $P \in S_{ab} \cap S_{ac} = a$ ami bizonyítandó volt. □



2. ábra. A Desargues-tétel és az affin alak

3. Tétel. *Ha a, b és c konkurrens egyenesek, $A \neq A' \in a$, $B \neq B' \in b$ és $C \neq C' \in c$ úgy, hogy*

(i) *$P \in l_{AB} \cap l_{A'B'}$, $Q = l_{BC} \cap l_{B'C'}$ és $R = l_{AC} \cap l_{A'C'}$, akkor P, Q, R kollineáris.*

(ii) *$l_{AB} \,||\, l_{A'B'}$ és $l_{BC} \,||\, l_{B'C'}$, akkor $l_{AC} \,||\, l_{A'C'}$.*

Bizonyítás. A triviális eseteket elkerülendő, tegyük fel, hogy A, B és C, illetve A', B' és C' nemkollineáris ponthármasok és legyen D a megfelelő csúcsokat összekötő a, b és c egyenesek közös pontja (pontra nézve perspektív háromszögek). Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor az S_{ABC} és az $S_{A'B'C'}$ síkok különbözőek. Az (i) részállítás feltételei szerint a két sík metsző és mindhárom pont illeszkedik a metszésvonalra.

Ha $S = S_{ABC} = S_{A'B'C'}$, akkor válasszunk egy $E \notin S$ pontot. Húzzunk párhuzamos egyeneseket az l_{DE} egyenessel az A', B' és C' pontokon keresztül és jelölje ezeket rendre a', b' és c' (3.

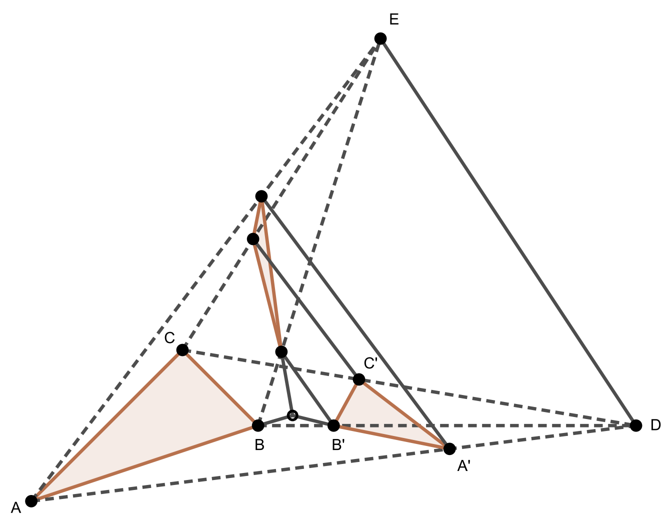
ábra). Nyilvánvaló, hogy az l_{AE} egyenes metszi az a' egyenest, hiszen ellenkező esetben az a' egyenes párhuzamos lenne mind az l_{AE}, mind pedig az l_{DE} egyenessel. (APP) miatt tehát $l_{AE} = l_{DE}$, ami az E pont választásának köszönhetően nyilvánvaló ellentmondás. Kapjuk tehát az

$$A'' = a' \cap l_{AE}, \quad B'' = b' \cap l_{BE}, \quad C'' = c' \cap l_{CE}$$

pontokat. Az l_{AE}, l_{BE} és l_{CE} egyenesek konkurrensek, $A \neq A'' \in l_{AE}$, $B \neq B'' \in l_{BE}$ és $C \neq C'' \in l_{CE}$ úgy, hogy

$$P \in l_{A''B''} \cap l_{A'B'} \cap l_{AB}, \; Q = l_{B''C''} \cap l_{B'C'} \cap l_{BC} \text{ és } R = l_{A''C''} \cap l_{A'C'} \cap l_{AC},$$

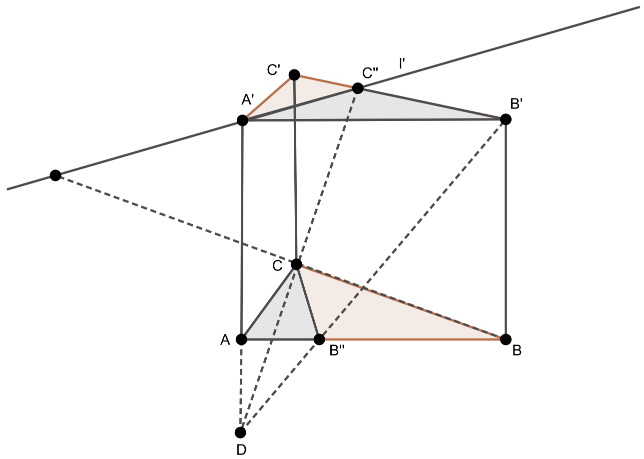
hiszen (például) l_{AB}, $l_{A'B'}$ és $l_{A''B''}$ páronként közös síkban vannak, de nem párhuzamosak és nincsenek közös síkban. Az előző lemma szerint ez azt jelenti, hogy közös ponton haladnak át (3. ábra). Mivel az S_{ABC} és az $S_{A''B''C''}$ síkok különbözőek, alkalmazható a különböző síkokra vonatkozó gondolatmenet: P, Q, R kollineáris. Térjünk át a (ii) részállítás igazolására. Ha az S_{ABC} és az $S_{A'B'C'}$ síkok különbözőek, akkor párhuzamosak is, hiszen (ii) feltételei miatt olyan metsző egyenespárok feszítik ki őket, melyek tagjai párhuzamosak. Az l_{AC} és az $l_{A'C'}$ egyeneseket pedig közös síkjuk metszi ki a párhuzamos S_{ABC} és az $S_{A'B'C'}$ síkokból. Ennélfogva a metszésvonalak maguk is párhuzamosak. Ha pedig $S = S_{ABC} = S_{A'B'C'}$, akkor az $E \notin S$ segédpontot felvéve, a problémát visszavezethetjük a különböző síkok esetére a már látott módon. Jegyezzük meg, hogy az 1. Lemma második esete lép majd fel. A részletek átgondolása hasznos gyakorlófeladat. $\square$



3. ábra. A Desargues-tétel

3. Megjegyzés. A 3. Tétel első része a Desargues-tétel, második része pedig a Desargues-tétel affin alakja (nagy Desargues-tétel) néven ismeretes.

4. Tétel. (a kis Desargues-tétel) *Ha a, b és c párhuzamos egyenesek, $A \neq A' \in a$, $B \neq B' \in b$ és $C \neq C' \in c$ úgy, hogy $l_{AB} \parallel l_{A'B'}$ és $l_{BC} \parallel l_{B'C'}$, akkor $l_{AC} \parallel l_{A'C'}$.*



4. ábra. A kis Desargues-tétel

Bizonyítás. A triviális eseteket elkerülendő, tegyük fel, hogy A, B és C, illetve A', B' és C' nemkollineáris ponthármasok. Ha az S_{ABC} és az $S_{A'B'C'}$ síkok különbözőek, akkor párhuzamosak is, hiszen a feltételek szerint olyan metsző egyenespárok feszítik ki őket, melyek tagjai párhuzamosak. Az l_{AC} és az $l_{A'C'}$ egyeneseket pedig közös síkjuk metszi ki a párhuzamos S_{ABC} és az $S_{A'B'C'}$ síkokból. Ennélfogva a metszésvonalak maguk is párhuzamosak. Tegyük fel ezek után, hogy $S = S_{ABC} = S_{A'B'C'}$ és okoskodjunk indirekte: tekintsük az A' pontra illeszkedő és az l_{AC} egyenessel párhuzamos l' egyenest, mely - indirekt feltevésünk értelmében - különbözik az $l_{A'C'}$ egyenestől (4. ábra). Az l_{AC} és az l' egyenesek párhuzamossága segítségével megkonstruáljuk a Desargues-tétel affin alakjához tartozó konfigurációt (ld. az $AB''C\triangle$ és az $A'B'C''\triangle$ háromszögeket). Ennek részleteit ismertetjük a továbbiakban. (APP) miatt l' és l_{BC} biztosan metszők, ami maga után vonja, hogy l' metszi az $l_{B'C'}$ egyenest is egy C'-től különböző pontban. Ennélfogva a $C'' = l' \cap l_{B'C'}$ metszéspont nem eshet az $l_{CC'}$ egyenesre. Mivel $C'' \notin l_{CC'}$, ezért az $l_{CC''}$ és az $l_{AA'}$ egyenesek szintén metszik egymást egy D pontban. Végül tekintsük az $l_{B'D}$ és az l_{AB} egyenesek B'' metszéspontját[2]. Van tehát három konkurrens egyenesünk, nevezetesen

$$l_{AA'}, \quad l_{CC''}, \quad l_{B''B'},$$

melyek a D pontban metszik egymást, továbbá $l_{AB''} \,||\, l_{A'B'}$ (hiszen A, B, B'' kollineáris és $l_{AB} \,||\, l_{A'B'}$) és $l_{AC} \,||\, l_{A'C''} = l'$. Alkalmazva a Desargues-tétel affin alakját, azt kapjuk, hogy $l_{B''C} \,||\, l_{B'C''} = l_{B'C'}$, hiszen B', C' és C'' kollineáris. (APP) szerint tehát $l_{B''C} = l_{BC}$, ami a $B'' = B$ ellentmondáshoz vezet, tekintettel arra, hogy $l_{AA'} \,||\, l_{BB'}$. □

2.1. A Moulton-féle affin sík

Az affin sík Moulton-féle modellje világossá teszi, hogy a Desargues-féle tételcsalád egyik tagja sem igazolható pusztán az affin sík axiómái segítségével. A bizonyításban szereplő $E \notin S$ pont

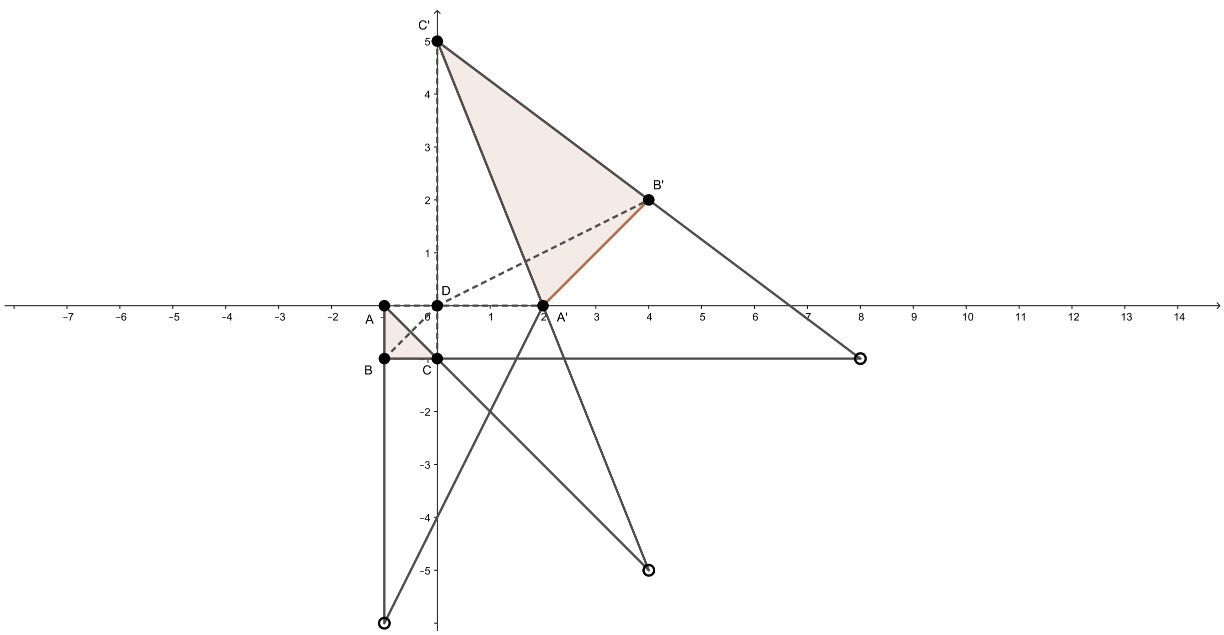
[2] Utóbbi létezése abból következik, hogy az egyenesek párhuzamossága esetén - (APP) szerint - $l_{B'D} = l_{A'B'}$, azaz $A' = D \in l_{CC''}$, ami azt jelenti, hogy $C \in l_{A'C''} = l'$. Ezt azonban kizárja az l' egyenes megválasztása.

választásának nincs alternatívája a síkon. A szóban forgó modell pontjai az $\mathbb{R}^2$ valós koordinátasík elemei. A szokásos értelemben vett egyenesek közül a koordinátatengelyekkel párhuzamos és a negatív iránytangensű egyenesek a Moulton-féle sík egyenesei is, míg a szokásos értelemben vett pozitív iránytangensű egyenesek megtörnek a koordinátatengely mentén az

$$y = ax + b \quad (y \geq 0), \quad y = 2(ax + b) \quad (y < 0)$$

képleteknek megfelelően - utóbbiak a Moulton-féle affin sík egyenesei a pozitív iránytangensű egyenesek helyett. Az alábbi konfigurációk mutatják, hogy a modellben nem teljesülnek a Desargues-féle tételek. Speciálisan: a Moulton-féle affin sík nem ágyazható be egy affin térbe.

- (Moulton-féle affin sík vs. Desargues-tétel) $A = (-1, 0)$, $B = (-1, -1)$, $C = (0, -1)$, $A' = (2, 0)$, $B' = (4, 2)$ és $C' = (0, 5)$ esetén $D = (0, 0)$ és $P = (-1, -6)$, $Q = (8, -1)$, $R = (4, -5)$ nem kollineáris a Moulton-féle affin síkban,



5. ábra. Moulton-féle affin sík vs. Desargues-tétel

- (Moulton-féle affin sík vs. a Desargues-tétel affin alakja) $A = (-1, 0)$, $B = (-1, -1)$, $C = (0, -1)$, $A' = (2, 0)$, $B' = (2, 1)$ és $C' = (0, 1)$ esetén $D = (0, 0)$, $l_{AB} \,||\, l_{A'B'}$ és $l_{BC} \,||\, l_{B'C'}$, de l_{AC} és $l_{A'C'}$ metszik egymást az $R = (-4, 3)$ pontban,

- Moulton-féle affin sík vs. kis Desargues-tétel) $A = (1, 1)$, $B = (4, 1)$, $C = (5/2, 3)$, $A' = (1, -5/2)$, $B' = (4, -5/2)$ és $C' = (5/2, -1/2)$ esetén a megfelelő csúcsokat összekötő vertikális egyenesek nyilván párhuzamosak és ugyanez áll a horizontális l_{AB} és $l_{A'B'}$, továbbá a negatív iránytangensű l_{BC} és $l_{B'C'}$ egyenesekre. Ennek dacára az l_{AC} és az $l_{A'C'}$ Moulton-féle egyenesek metszik egymást az alsó félsíkban.

2.2. Az affin sík vektortérmodellje

Az affin sík Moulton-féle modelljével szemben az affin sík vektortérmodelljében teljesülnek a Desargues-féle tételek, hiszen $\mathbb{R}^2$ a szokásos egyeneseivel és illeszkedéssel ellátva beágyazható az

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ affin térbe (ld. az affin tér vektortérmodellje). A vektortérstruktúra és a Desargues-féle tételek kapcsolatáról - valójában ekvivalenciájáról - még szó lesz a továbbiakban.

4. Feladat. Adjon belső geometriai bizonyítást a Desargues-féle tételekre az affin sík vektortérmodelljében.

Útmutatás. A belső geometriai bizonyítás azt jelenti, hogy nem hivatkozunk a beágyazó affin térre. Például a Desargues-tételben ismertetett konfiguráció vektoralgebrai leírása

$$\vec{DA'} = \lambda \vec{DA},\ \vec{DB'} = \mu \vec{DB},\ \vec{DC'} = \nu \vec{DC},$$

ahol a skalárok egyike sem zérus. Fejezzük ki az l_{AB} és az $l_{A'B'}$ egyenesek metszéspontjának D pontra vonatkozó helyvektorát, azaz oldjuk meg a

$$\vec{DA} + t\vec{AB} = \vec{DA'} + s\vec{A'B'}$$

vektoregyenletet:

$$\vec{DA} + t\left(\vec{DB} - \vec{DA}\right) = \lambda \vec{DA} + s\left(\mu \vec{DB} - \lambda \vec{DA}\right),$$

$$(1 - t - \lambda + s\lambda)\,\vec{DA} + (t - s\mu)\,\vec{DB} = \mathbf{0}.$$

Mivel a szereplő vektorok nem egymás skalárszorosai (lineárisan függetlenek), ezért

$$1 - t - \lambda + s\lambda = 0,\ t - s\mu = 0,$$

aminek a megoldása

$$s = \frac{\lambda - 1}{\lambda - \mu},\ t = \mu\frac{\lambda - 1}{\lambda - \mu}.$$

Jegyezzük meg, hogy $\lambda \neq \mu$, hiszen az l_{AB} és az $l_{A'B'}$ egyenesek nem párhuzamosak. Következésképpen

$$\vec{DP} = \vec{DA} + \mu\frac{\lambda - 1}{\lambda - \mu}\vec{AB}.$$

Hasonlóan

$$\vec{DQ} = \vec{DB} + \nu\frac{\mu - 1}{\mu - \nu}\vec{BC},$$

$$\vec{DR} = \vec{DC} + \lambda\frac{\nu - 1}{\nu - \lambda}\vec{CA} = \vec{DA} - \vec{CA} + \lambda\frac{\nu - 1}{\nu - \lambda}\vec{CA} = \vec{DA} + \left(\lambda\frac{\nu - 1}{\nu - \lambda} - 1\right)\vec{CA} =$$

$$\vec{DA} + \left(1 - \lambda\frac{\nu - 1}{\nu - \lambda}\right)\vec{AC} = \vec{DA} + \left(1 - \lambda\frac{\nu - 1}{\nu - \lambda}\right)(\vec{AB} + \vec{BC}).$$

Különbségvektorokat képezve

$$\vec{PQ} = \vec{DQ} - \vec{DP} = (1 - \mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda - \mu}\vec{AB} - \frac{\nu}{\mu - \nu}\vec{BC}\right),$$

$$\vec{PR} = \vec{DR} - \vec{DP} = \frac{(\lambda - 1)(\mu - \nu)}{\nu - \lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda - \mu}\vec{AB} - \frac{\nu}{\mu - \nu}\vec{BC}\right),$$

ahonnan nyilvánvaló, hogy $\vec{PQ}$ és $\vec{PR}$ egymás skalárszorosai.

3. Affin transzformációk, nyújtások: transzlációk és homotéciák

4. Definíció. *Az affin tér egy önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezését affin transzformációnak nevezzük, ha egyenes- és síktartó. Egy affin transzformáció nyújtás, ha minden egyenest egy vele párhuzamos egyenesbe visz.*

Könnyen látható, hogy az affin transzformációk párhuzamosságtartók, azaz ha két egyenes, egy egyenes és egy sík, vagy két sík párhuzamos, akkor affin képeik is párhuzamosak. Az affin transzformációk csoportot alkotnak a leképezéskompozíció műveletére nézve. Figyelembe véve, hogy a párhuzamosság ekvivalenciareláció (ld. tranzitivitás) az is igaz, hogy a nyújtások csoportot alkotnak a leképezéskompozíció műveletére nézve (részcsoport az affin transzformációcsoportban).

5. Feladat. Igazolja, hogy egy nyújtás minden síkot egy vele párhuzamos síkba visz.

Útmutatás. Tekintsünk egy a síkot kifeszítő metsző egyenespárt; az egyenesek nyújtás általi képei (melyek párhuzamosak az eredeti egyenesekkel) feszítik ki a képsíkot.

5. Tétel. (a nyújtások fixponttétele) *Egy $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ nem identikus nyújtásnak legfeljebb egy fixpontja van. Ha P fixpont, akkor a P pontra illeszkedő valamennyi egyenes a nyújtás invariáns egyenese, míg ha P nem fixpont, akkor a P pontra illeszkedő egyetlen invariáns egyenes $l_{P\varphi(P)}$.*

Bizonyítás. Ha P fixpont és $P \in l$, akkor $\varphi(l)$ a $P = \varphi(P)$ pontra illeszkedő és az l egyenessel párhuzamos egyenes, azaz $l = \varphi(l)$. Ha P nem fixpont, de illeszkedik az invariáns l egyenesre, akkor $\varphi(P) \in \varphi(l) = l$, azaz $l = l_{P\varphi(P)}$. Megfordítva, az $l = l_{P\varphi(P)}$ egyenes nyilvánvalóan invariáns, hiszen $\varphi(P)$ közös pontja a párhuzamos l és $\varphi(l)$ egyenesnek. Ha pedig P és Q fixpontok, $l = l_{PQ}$, akkor bármely $R \notin l$ esetén

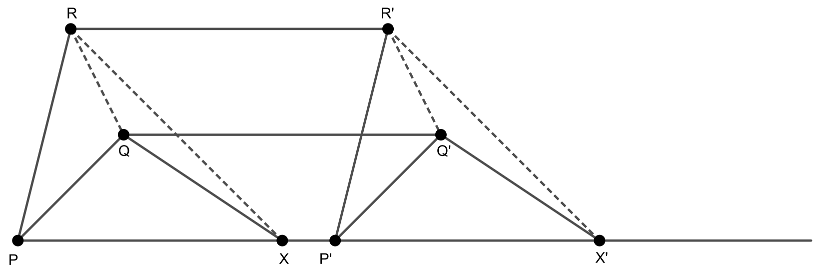
$$R = l_{PR} \cap l_{QR}$$

ugyancsak fixpont, hiszen a fixpontokra illeszkedő, és ezért invariáns egyenesek egyértelműen meghatározott metszéspontja. Az l_{PQ} egyenes további pontjairól ezek után (például) P és R segítségével láthatjuk be, hogy fixen maradnak, azaz a nyújtás identikus transzformáció. $\square$

5. Definíció. *Egy fixpontmentes nyújtást transzlációnak, vagy eltolásnak nevezünk, míg O centrumú homotécián, vagy középpontos hasonlóságon olyan nyújtást értünk, melynek O az egyetlen fixpontja. Az identikus transzformációt egyidejűleg tekintjük transzlációnak és tetszőleges centrumú homotéciának is.*

3. Állítás. *Egy nem identikus $\tau\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ transzláció invariáns egyeneseinek halmaza másodfajú sugársor, azaz irány; ezt az irányt nevezzük a transzláció irányának. Egy nem identikus $\delta\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ homotécia invariáns egyeneseinek halmaza elsőfajú sugársor, melynek elemei a centrumra illeszkedő egyenesek.*

Bizonyítás. Az invariáns egyenesek $l_{P\tau(P)}$ alakban vehetők fel; ha $Q \notin l_{P\tau(P)}$, akkor az $l_{P\tau(P)}$ és az $l_{Q\tau(Q)}$ egyeneseknek nem lehet közös pontja, hiszen egy ilyen pont - invariáns egyenesek metszéspontjaként - fixpont lenne. Mivel - definíció szerint - l_{PQ} párhuzamos az $l_{\tau(P)\tau(Q)}$ egyenessel, ezek közös síkja egyben az $l_{P\tau(P)}$ és az $l_{Q\tau(Q)}$ egyenesek közös síkja is, azaz $l_{P\tau(P)} \parallel l_{Q\tau(Q)}$. A homotéciákkal kapcsolatos észrevételünk nyilvánvaló. $\square$



6. ábra. Transzlációk

6. Tétel. (a transzlációk egzisztencia- és unicitástétele) *Ha P és P' az affin tér két, nem feltétlenül különböző pontja, akkor egy és csak egy olyan $\tau\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ transzláció létezik, melyre $P' = \tau(P)$.*

Bizonyítás. Ha $P = P'$, akkor nyilvánvalóan az identikus transzformációról van szó, hiszen ez az egyetlen transzláció, melynek van fixpontja. Most tegyük fel, hogy $P \neq P'$ és $\tau(P) = P'$. Tekintsük az $l := l_{PP'}$ invariáns egyenest és válasszunk egy $Q \notin l$ pontot. Mivel egy transzláció invariáns egyenesei másodfajú sugársort (irányt) alkotnak, ezért $l_{QQ'} \parallel l_{PP'}$, továbbá - definíció szerint - $l_{PQ} \parallel l_{P'Q'}$. Vegyük észre, hogy ezzel egy szerkesztési eljárást adtunk a Q' pont előállítására: Q' a Q ponton át az l invariáns egyenessel húzott párhuzamos és a P' ponton át az l_{PQ} egyenessel húzott párhuzamos metszéspontja (paralelogramma-szabály, 6. ábra). Hogyan mozognak az l invariáns egyenes pontjai? Legyen $X \in l$ tetszőleges és szerkesszük meg az X' pontot ezúttal az egymásnak megfelelő (Q, Q') rendezett pontpár segítségével. Ellenőrizendő, hogy X' nem függ a $Q \notin l$ segédpont választásától. Ebből a kívánt transzláció egzisztenciája és unicitása is következik, hiszen a szerkesztési eljárás explicit módon definiálja. Legyen tehát $R \notin l$ egy további segédpont. Ha P, Q és R nem kollineáris, akkor alkalmazzuk a kis Desargues-tételt a $PQR\triangle$ és a $P'Q'R'\triangle$ háromszögekre, ahonnan $l_{QR} \parallel l_{Q'R'}$ következik. Kollineáris ponthármas esetén az egyenesek párhuzamossága automatikus a Q' és R' pontokra vonatkozó szerkesztési eljárás alapján. Ennek birtokában a nem kollineáris X, Q és R, illetve a megfelelő X', Q' és R' pontokra alkalmazott kis Desargues-tétel szerint $l_{XR} \parallel l_{X'R'}$. Ez azt jelenti - szabadon fogalmazva -, hogy az X, X', R, R' pontok által meghatározott alakzat egy paralelogramma. Következésképpen az (R, R') pár által a paralelogramma-szabály szerint konstruált képpont egybeesik az X' ponttal. Ha pedig X, Q és R kollineárisak, akkor $l_{XR} = l_{XQ} \parallel l_{X'Q'} = l_{X'R'}$ és a bizonyítás a paralelogramma-szabályra hivatkozva fejezhető be - a menet közben igazolt $l_{QR} \parallel l_{Q'R'}$ párhuzamosság mutatja, hogy valóban (fixpontmentes) nyújtásról van szó. $\square$

7. Tétel. *A transzlációk kommutatív csoportot alkotnak a leképezéskompozíció műveletére nézve.*

Bizonyítás. Ellenőrizendő, hogy transzlációk kompozíciója transzláció: tegyük fel, hogy a $\tau_2 \circ \tau_1$ nyújtásnak van fixpontja, azaz

$$\tau_2 \circ \tau_1(P) = P \quad \Rightarrow \quad \tau_1(P) = \tau_2^{-1}(P),$$

ahonnan az egzisztencia- és unicitástételre tekintettel $\tau_1 = \tau_2^{-1}$ következik. Kapjuk tehát, hogy fixpont létezése esetén a transzlációk kompozíciója az identikus transzformáció, ami maga is transzláció. Ha nincs fixpont, akkor pedig - a transzlációk definíciója alapján - készen vagyunk. A továbbiakban a kommutativitás ellenőrzésével foglalkozunk. Legyenek τ_1 és τ_2 különböző irányú transzlációk, $P \in \mathbb{E}$, $P_1' = \tau_1(P)$ és $P_2' = \tau_2(P)$. A paralelogramma-szabály szerint

$$\tau_2 \circ \tau_1(P) = \tau_1 \circ \tau_2(P),$$

ami az egzisztenicia- és unicitástétel alapján azt jelenti, hogy $\tau_2 \circ \tau_1 = \tau_1 \circ \tau_2$. Ha a transzlációk iránya egybeesik, akkor válasszunk egy olyan τ_3 transzlációt, melynek iránya különbözik a τ_1 és τ_2 transzlációk közös irányától. Alkalmazva a kommutativitást a különböző irányú transzlációk kompozíciója esetében

$$(\tau_1 \circ \tau_2) \circ \tau_3 = \tau_1 \circ (\tau_2 \circ \tau_3) = (\tau_2 \circ \tau_3) \circ \tau_1 = \tau_2 \circ (\tau_3 \circ \tau_1) =$$

$$\tau_2 \circ (\tau_1 \circ \tau_3) = (\tau_2 \circ \tau_1) \circ \tau_3 \quad \Rightarrow \quad \tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1,$$

ami bizonyítandó volt. □

8. Tétel. (a homotéciák egzisztencia- és unicitástétele) *Ha O, P és P' az affin tér kollineáris pontjai, $O \neq P$ és $O \neq P'$, akkor egy és csak egy olyan O centrumú $\delta\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ homotécia létezik, melyre $P' = \delta(P)$.*

Bizonyítás. Ha $P = P'$, akkor nyilvánvalóan az identikus transzformációról van szó. Most tegyük fel, hogy $P \neq P'$ és $\delta(P) = P'$. Tekintsük az $l := l_{OP}$ invariáns egyenest és válasszunk egy $Q \notin l$ pontot. Mivel egy homotécia invariáns egyenesei elsőfajú sugársort alkotnak, melynek elemei az O pontra illeszkedő egyenesek, ezért $O \in l_{QQ'}$, továbbá - definíció szerint - $l_{PQ} \,||\, l_{P'Q'}$. Vegyük észre, hogy ezzel egy szerkesztési eljárást adtunk a Q' pont előállítására: Q' az l_{OQ} egyenes és a P' ponton át az l_{PQ} egyenessel húzott párhuzamos metszéspontja. Hogyan mozognak az l invariáns egyenes pontjai? Legyen $X \in l$ tetszőleges és szerkesszük meg az X' pontot ezúttal az egymásnak megfelelő (Q, Q') rendezett pontpár segítségével. Ellenőrizendő, hogy X' nem függ a $Q \notin l$ segédpont választásától. Ebből a kívánt homotécia egzisztenciája és unicitása is következik, hiszen a szerkesztési eljárás explicit módon definiálja. A bizonyítás lépésről lépésre megegyezik a transzlációkra vonatkozó tételben látottakkal. Az egyetlen formális különbség, hogy ezúttal a Desargues-tétel affin alakját kell alkalmaznunk. A részletek átgondolása hasznos gyakorlófeladat. □

4. Állítás. *Legyen $O \in \mathbb{E}$ rögzített pont; az O centrumú homotéciák csoportot alkotnak a leképezés-kompozíció műveletére nézve.*

3.1. Transzlációk és homotéciák a vektortérmodellben

Bármely (P, P') pontpár esetén a

$$\tau\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \tau(X) = X + \vec{PP'}$$

leképezés az az egyértelműen meghatározott transzláció, mely a P pontot a P' pontba viszi. Nyilvánvaló ugyanis, hogy τ kölcsönösen egyértelmű és közvetlen behelyettesítéssel kapjuk, hogy az X pontra illeszkedő, v irányvektorú egyenes képe a $\tau(X)$ pontra illeszkedő, v irányvektorú egyenes. Ez azt jelenti, hogy τ egyenestartó és minden egyenest egy vele párhuzamos egyenesbe visz. Vegyük észre azt is, hogy az X pontra illeszkedő, v és w vektorok által kifeszített sík képe a $\tau(X)$ pontra illeszkedő,

v és w vektorok által kifeszített sík, azaz τ síktartó (speciálisan: minden síkot egy vele párhuzamos síkba visz). Legyenek O, P és P' a vektortérmodell kollineáris pontjai, $O \neq P$ és $O \neq P'$. Ha t az

$$P' = O + t\vec{OP}, \text{ azaz } \vec{OP'} = t\vec{OP}$$

összefüggéssel meghatározott nemzérus skalár, akkor a

$$\delta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ \delta(X) = O + t\vec{OX}$$

leképezés az az egyértelműen meghatározott O centrumú homotécia, mely a P pontot a P' pontba viszi. Nyilvánvaló ugyanis, hogy δ kölcsönösen egyértelmű és közvetlen behelyettesítéssel kapjuk, hogy az X pontra illeszkedő, v irányvektorú egyenes képe a $\delta(X)$ pontra illeszkedő, v irányvektorú egyenes. Ez azt jelenti, hogy δ egyenestartó és minden egyenest egy vele párhuzamos egyenesbe visz. Vegyük észre azt is, hogy az X pontra illeszkedő, v és w vektorok által kifeszített sík képe a $\delta(X)$ pontra illeszkedő, v és w vektorok által kifeszített sík, azaz δ síktartó (speciálisan: minden síkot egy vele párhuzamos síkba visz).

4. Szabadvektorok

Legyenek A és B az affin tér pontjai és jelölje τ_{AB} azt az egyértelműen meghatározott transzlációt, mely az A pontot a B pontba viszi.

5. Állítás. *A rendezett pontpárok halmazán értelmezett*

$$(A,B) \sim (C,D) \quad \Leftrightarrow \quad \tau_{AB} = \tau_{CD}$$

reláció ekvivalenciareláció, melynek osztályait szabadvektoroknak nevezzük.

Bizonyítás. Az ekvivalenciarelációt definiáló mindhárom tulajdonság nyilvánvaló. □

6. Állítás. $(A,B) \sim (C,D) \quad \Leftrightarrow \quad (A,C) \sim (B,D)$

Bizonyítás. Ha $\tau_{AB} = \tau_{CD}$, akkor

$$\tau_{AC} = \tau_{BC} \circ \tau_{AB} = \tau_{AB} \circ \tau_{BC} = \tau_{CD} \circ \tau_{BC} = \tau_{BD},$$

ahol az első, illetve utolsó lépésben az összefűzési szabályra, közbül pedig a transzlációcsoport kommutativitására támaszkodunk. A megfordítás igazolása hasonló:

$$\tau_{AB} = \tau_{CB} \circ \tau_{AC} = \tau_{AC} \circ \tau_{CB} = \tau_{BD} \circ \tau_{CB} = \tau_{CD},$$

ami bizonyítandó volt. □

A transzlációk egzisztencia és unicitástétele alapján bármely szabadvektor bármely kezdőpontból egyértelműen reprezentálható. Ha például (A,B) az **a** szabadvektor reprezentánsa, akkor a C kezdőpontú reprezentáns (egyértelműen meghatározott) végpontja $D = \tau_{AB}(C)$.

"A [szabad]vektor tulajdonképpen ugyanaz, mint az eltolás [transzláció], csak éppen a vektoroknál és az eltolásoknál más a szóhasználat" (H. Weyl). Tekintettel arra, hogy a transzlációk kommutatív csoportot alkotnak a leképezéskompozíció műveletére nézve, a szabadvektorok körében is bevezethető az ennek megfelelő kommutatív művelet, a szabadvektorok összeadása. Ha (A, B) az $\mathbf{a}$ szabadvektor reprezentánsa, akkor

$$T\colon \mathbf{a} \mapsto T(\mathbf{a}) = \tau_{AB} \tag{2}$$

egy jóldefniált, kölcsönösen egyértelmű leképezés a szabadvektorok halmaza és a transzlációk kommutatív csoportja között. Ebben a kontextusban az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szabadvektorok összegén azt az egyértelműen meghatározott $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ szabadvektort értjük, melyre

$$T\left(\mathbf{a} + \mathbf{b}\right) = T(\mathbf{a}) \circ T(\mathbf{b}).$$

Mivel bármely szabadvektor bármely kezdőpontból egyértelműen reprezentálható, legyen (A, B) az $\mathbf{a}$, (B, C) pedig a $\mathbf{b}$ szabadvektor reprezentánsa. Ekkor

$$T(\mathbf{a}) \circ T(\mathbf{b}) = \tau_{AB} \circ \tau_{BC} = \tau_{BC} \circ \tau_{AB} = \tau_{AC}.$$

6. Definíció. (összefűzési-, vagy paralelogramma-szabály) *Az (A, B) és a (B, C) reprezentánsú szabadvektorok összegén azt a szabadvektort értjük, melynek reprezentánsa (A, C).*

Könnyű látni, hogy a vektorösszeadás független a reprezentánsok megválasztásától: $\tau_{AB} = \tau_{A'B'}$ és $\tau_{BC} = \tau_{B'C'}$ ugyanis nyilvánvalóan maga után vonja, hogy

$$\tau_{AC} = \tau_{BC} \circ \tau_{AB} = \tau_{B'C'} \circ \tau_{A'B'} = \tau_{A'C'},$$

azaz $(A, B) \sim (A', B')$ és $(B, C) \sim (B', C')$ maga után vonja, hogy $(A, C) \sim (A', C')$. A zérusvektor reprezentánsai az (A, A) alakú párok, melyeknek az identikus transzformáció felel meg. Az $\mathbf{a}$ szabadvektor additív inverzének reprezentánsa pedig (B, A), hiszen

$$\tau_{BA} \circ \tau_{AB} = \tau_{AA},$$

ami az identikus transzformáció.

7. Definíció. *Legyen O egy tetszőlegesen rögzített pontja a térnek, δ pedig egy O centrumú homotécia. Az (A, B) reprezentánsú szabadvektornak a δ homotéciával vett szorzatán a $(\delta(A), \delta(B))$ reprezentánsú szabadvektort értjük. Bevezetve a*

$$\delta_0\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E},\ \ \delta_0(P) = O$$

előírással értelmezett ún. elfajuló homotéciát, legyen $\delta_0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$ bármely szabadvektor esetén.

A definíció hátterében az áll, hogy a $\delta \circ \tau_{AB} \circ \delta^{-1}$ konjugált leképezés transzláció. Mindenesetre nyújtás, hiszen nyújtások kompozíciója. Ha nincs fixpontja, akkor készen vagyunk. Ha pedig van fixpont, azaz

$$\delta \circ \tau_{AB} \circ \delta^{-1}(P) = P,$$

akkor $\delta^{-1}(P)$ fixpontja a transzlációnak. Ez azt jelenti, hogy τ_{AB} az identikus transzformáció a $\delta \circ \tau_{AB} \circ \delta^{-1}$ leképezéskompozícióval egyetemben. Kissé egyszerűsítve a formalizmust, azt is írhatjuk, hogy

$$\delta \circ \tau_{AB} \circ \delta^{-1} = \tau_{\delta(A)\delta(B)},$$

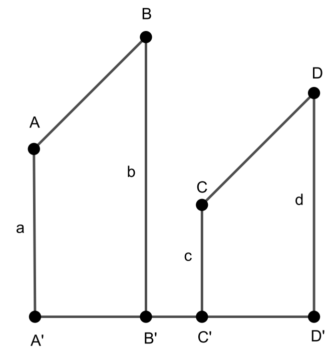
hiszen

$$\delta \circ \tau_{AB} \circ \delta^{-1}\left(\delta(A)\right) = \delta(B).$$

A szabadvektorok homotéciával való szorzása tehát azon az egyetlen lehetséges módon van értelmezve, melyre

$$T\left(\delta \cdot \mathbf{a}\right) = \delta \circ T(\mathbf{a}) \circ \delta^{-1}. \tag{3}$$

A (3) formula mutatja, hogy a homotéciával való szorzás független a reprezentánsválasztástól.



7. ábra. Projekciók

8. Definíció. *Legyen O egy tetszőlegesen rögzített pontja a térnek. Ha δ_1 és δ_2 két O centrumú, esetleg elfajuló homotécia, akkor összegükön azt az egyértelműen meghatározott O centrumú δ homotéciát értjük, melyre*

$$\delta_1 \cdot \mathbf{a} + \delta_2 \cdot \mathbf{a} = \delta \cdot \mathbf{a} \tag{4}$$

teljesül bármely szabadvektor esetén.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy a (4) formula értelmes módon definiálja a homotéciák összegét.

2. Lemma. *Legyen az $O \in \mathbb{E}$ pont rögzített és tekintsük az S_{OMN} síknak az l_{MN} egyenessel párhuzamos*

$$\pi \colon S_{OMN} \to l_{ON}$$

vetítését az l_{ON} egyenesre. Ekkor $(A, B) \sim (C, D)$ maga után vonja, hogy

$$(\pi(A), \pi(B)) \sim (\pi(C), \pi(D)).$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(A, B) \sim (C, D)$ és az írásmunkát egyszerűsítendő, vezessük be az

$$A' = \pi(A),\ B' = \pi(B),\ C' = \pi(C),\ D' = \pi(D)$$

jelöléseket. Legyenek továbbá a, b, c és d a megfelelő pontokra illeszkedő és az l_{MN} egyenessel párhuzamos vetítőegyenesek. Mivel $\tau_{AB}(a) = b$ és $\tau_{A'B'}(a) = b$, ezért az a egyenes invariáns egyenese a $\tau := \tau_{A'B'}^{-1} \circ \tau_{AB}$ transzlációnak és ugyanez áll a b, c és d egyenesekre is, hiszen egy transzláció invariáns egyenesei másodfajú sugársort (irányt) alkotnak. Kapjuk tehát, hogy

$$\tau_{AB}(a) = \tau_{A'B'}(a),\ \tau_{AB}(b) = \tau_{A'B'}(b),\ \tau_{AB}(c) = \tau_{A'B'}(c),\ \tau_{AB}(d) = \tau_{A'B'}(d).$$

Felhasználva a rendezett pontpárok ekvivalenciáját

$$\tau_{CD}(c) = \tau_{AB}(c) = \tau_{A'B'}(c) \quad \Rightarrow \quad d = \tau_{A'B'}(c),$$

speciálisan pedig $\tau_{A'B'}(C') = D'$ következik, hiszen $l_{A'B'}$ invariáns egyenese a transzlációnak:

$$C' = l_{A'B'} \cap c \quad \Rightarrow \quad \tau_{A'B'}(C') = \tau_{A'B'}(l_{A'B'}) \cap \tau_{A'B'}(c) = l_{A'B'} \cap d = D'.$$

Mivel egy transzláció hatását egyetlen pont képe meghatározza, ezért $\tau_{A'B'} = \tau_{C'D'}$, ami azt jelenti, hogy a vetületi pontpárok ekvivalensek egymással. □

Az előző lemma birtokában értelmes módon bevezethetjük az S_{OMN} síkban reprezentálható szabadvektorok

$$\pi \colon \mathbf{a} \to \pi(\mathbf{a}) \tag{5}$$

projekcióját, ahol a képvektor reprezentánsa $(\pi(A), \pi(B))$, feltéve, hogy (A, B) az $\mathbf{a}$ vektor reprezentánsa. Az írásmunkát egyszerűsítendő, nem vezetünk be megkülönböztető szimbólumot: argumentumától függően, π a sík egyenesre vonatkozó, illetve a síkban reprezentálható vektoroknak az egyenesen reprezentálható vektorokra vonatkozó projekcióját jelenti. A reprezentánsok segítségével könnyen ellenőrizhetjük, hogy az (5) projekció additív:

$$\pi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \pi(\mathbf{a}) + \pi(\mathbf{b}). \tag{6}$$

3. Lemma. *Ha δ egy O centrumú homotécia, akkor $\pi(\delta \cdot \mathbf{a}) = \delta \cdot \pi(\mathbf{a})$ bármely $\mathbf{a}$ szabadvektor esetén. Ekvivalens módon: $\pi \circ \delta = \delta \circ \pi$, azaz δ kommutál a projekcióval.*

Bizonyítás. A homotéciákra vonatkozó képszerkesztési eljárást és a projekció értelmezését figyelembe véve a $\pi \circ \delta = \delta \circ \pi$ kommutálási tulajdonság könnyen ellenőrizhető[3] (alkalmazzuk a Desargues-tétel affin alakját). □

Ezeknek az előkészületeknek a birtokában most már rámutathatunk arra, hogy a (4) képlet értelmes módon definiálja két, közös centrumú homotécia összegét. Legyen O a homotéciák közös centruma és reprezentáljuk a szabadvektorokat (O, A) alakú rendezett párokkal. A (4) képlet bal oldala ekkor egy

$$\delta \colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}, \; A \mapsto \delta(A) = A'$$

leképezést határoz meg, ahol (O, A') a $\delta_1 \cdot \mathbf{a} + \delta_2 \cdot \mathbf{a}$ vektor reprezentánsa, feltéve, hogy (O, A) az $\mathbf{a}$ vektor reprezentánsa. Mivel a $\delta_1 \cdot \mathbf{a}$ és a $\delta_2 \cdot \mathbf{a}$ vektoroknak megfelelő $\tau_{O\delta_1(A)}$ és $\tau_{O\delta_2(A)}$ transzlációk iránya közös (éppen az l_{OA} egyenes által reprezentált irány), ezért kompozíciójuk iránya is ugyanez, végső soron tehát az összegvektor az l_{OA} egyenesen reprezentálható, azaz O, A és A' kollineáris. Következő meggondolásaink az S_{OMN} síkra vonatkoznak és a szereplő homotéciák síkra való leszűkítéseivel dolgozunk. Emlékeztetünk rá, hogy az S_{OMN} sík invariáns, hiszen tartalmazza a közös O centrumot. A projekció additivitása és a kommutálási tulajdonság miatt

$$\pi(\delta_1 \cdot \mathbf{a} + \delta_2 \cdot \mathbf{a}) = \pi(\delta_1 \cdot \mathbf{a}) + \pi(\delta_2 \cdot \mathbf{a}) = \delta_1 \cdot \pi(\mathbf{a}) + \delta_2 \cdot \pi(\mathbf{a}),$$

ami azt jelenti, hogy δ kommutál a π projekcióval. Az $N \in S_{OMN}$ pont képe tehát

$$N' = \delta(N) = \delta \circ \pi(M) = \pi \circ \delta(M) = \pi(M'),$$

vagyis N' a kollineáris O, M és M' pontok által egyértelműen meghatározott, hiszen az l_{ON} egyenesnek és az l_{MN} egyenessel párhuzamos, M' pontra illeszkedő egyenesnek a metszéspontjáról van szó - éppen a homotéciákra vonatkozó szerkesztési eljárás szerint.

[3] Jegyezzük meg, hogy az S_{OMN} sík invariáns síkja a homotéciának, hiszen tartalmazza a centrumot; a kommutálási képletben értelemszerűen a homotécia síkra való megszorítása szerepel.

9. Tétel. [6] *Az O centrumú homotéciáknak az elfajuló homotéciával kibővített halmaza ferdetestet alkot a bevezetett összeadásra és a leképezéskompozíció, mint szorzás műveletére nézve, mely izomorfia erejéig független az O pont megválasztásától.*

Az O centrumú homotéciák halmaza a leképezéskompozíció, mint szorzás műveletére nézve csoport. A leképezéskompozíció azonban tipikusan nem kommutatív művelet - erre utal a "ferde" jelző. Az összeadás és a szorzás műveletét összekapcsolja a bal-, illetve jobboldali disztributivitás:

$$\delta_1 \circ (\delta_2 + \delta_3) = \delta_1 \circ \delta_2 + \delta_1 \circ \delta_3, \quad (\delta_2 + \delta_3) \circ \delta_1 = \delta_2 \circ \delta_1 + \delta_3 \circ \delta_1.$$

Az O centrumú homotéciáknak az elfajuló homotéciával kibővített halmaza pedig kommutatív csoport az összeadás műveletére nézve. A (4) formula alapján nyilvánvaló, hogy a δ_0 elfajuló homotécia játssza a zéruselem (nulla) szerepét. Rögzítve egy további O' pontját a térnek, a

$$\delta \mapsto \delta' = \tau_{OO'} \circ \delta \circ \tau_{OO'}^{-1}$$

leképezés ferdetest-izomorfizmus az O centrumú, illetve az O' centrumú homotéciák elfajuló homotéciával bővített halmaza között.

4. Megjegyzés. A δ homotécia additív inverzét a

$$\delta + X = \delta_0$$

egyenlet formális megoldásával kapjuk, nevezetesen a

$$(-\delta) \cdot \mathbf{a} = -(\delta \cdot \mathbf{a}) \tag{7}$$

formula definiálja. Ellenőrizendő, hogy valóban O centrumú homotéciáról van szó. Követve a (4) képlet kapcsán látott gondolatmenetet, reprezentáljuk a szabadvektorokat (O, A) alakú rendezett párokkal. A (7) képlet jobb oldala ekkor egy

$$-\delta \colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}, \; A \mapsto -\delta(A) = A'$$

leképezést határoz meg, ahol (O, A') a $-(\delta \cdot \mathbf{a})$ vektor reprezentánsa, feltéve, hogy (O, A) az $\mathbf{a}$ vektor reprezentánsa. A továbbiakban a projekció additivitásából következő

$$\pi(\mathbf{a}) = \pi(\mathbf{a} + \mathbf{0}) = \pi(\mathbf{a}) + \pi(\mathbf{0}) \quad \Rightarrow \quad \pi(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

illetve

$$\pi(-\mathbf{a}) = -\pi(\mathbf{a})$$

azonosságokra is szükségünk lesz. Mivel a $-(\delta \cdot \mathbf{a})$ vektornak megfelelő $\tau_{O\delta(A)}^{-1} = \tau_{\delta(A)O}$ és a τ_{OA} transzlációk iránya közös (éppen az l_{OA} egyenes által reprezentált irány), ezért az additív inverzvektor az l_{OA} egyenesen reprezentálható, azaz O, A és A' kollineáris. Következő meggondolásaink az S_{OMN} síkra vonatkoznak és a szereplő homotécia síkra való leszűkítésével dolgozunk. Emlékeztetünk rá, hogy az S_{OMN} sík invariáns, hiszen tartalmazza az O centrumot. A projekció additivitása és a kommutálási tulajdonság miatt

$$\pi(-(\delta \cdot \mathbf{a})) = -\pi(\delta \cdot \mathbf{a}) = -(\delta \cdot \pi(\mathbf{a})),$$

ami azt jelenti, hogy $-\delta$ kommutál a π projekcióval. Az $N \in S_{OMN}$ pont képe tehát

$$N' = -\delta(N) = -\delta \circ \pi(M) = \pi(-\delta(M)) = \pi(M'),$$

vagyis N' a kollineráris O, M és M' pontok által egyértelműen meghatározott, hiszen az l_{ON} egyenesnek és az l_{MN} egyenessel párhuzamos, M' pontra illeszkedő egyenesnek a metszéspontjáról van szó - éppen a homotéciákra vonatkozó szerkesztési eljárás szerint.

10. Tétel. *A szabadvektorok baloldali vektorteret alkotnak az O centrumú homotéciák elfajuló homotéciával bővített halmaza, mint ferdetest felett, azaz a szabadvektorok halmaza az összeadásra nézve kommutatív csoport és a homotéciával való szorzás rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

- $\delta \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \delta \cdot \mathbf{a} + \delta \cdot \mathbf{b}$,
- $(\delta_1 + \delta_2) \cdot \mathbf{a} = \delta_1 \cdot \mathbf{a} + \delta_2 \cdot \mathbf{a}$,
- $(\delta_1 \circ \delta_2) \cdot \mathbf{a} = \delta_1 \cdot (\delta_2 \cdot \mathbf{a})$,
- $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$,

ahol az 1 *szimbólum az identikus leképezést jelöli.*

A fejezet lezárásaképpen megmutatjuk, hogy ha az O, A, B és C pontok általános helyzetűek, azaz nincsenek egy síkban, akkor az (O, A), (O, B) és (O, C) rendezett pontpárokkal reprezentált **a**, **b** és **c** vektorok a vektortér bázisát alkotják. Segítségükkel tehát minden **d** szabadvektor egyértelműen írható fel a

$$\mathbf{d} = \delta_1 \cdot \mathbf{a} + \delta_2 \cdot \mathbf{b} + \delta_3 \cdot \mathbf{c} \tag{8}$$

alakban (lineáris kombináció). Legyen **d** az (O, D) pontpárral reprezentált vektor. Szemléletesen szólva a (8) formula jobb oldala egy az O pontból a D pontba futó (irányított) töröttvonallal reprezentálható, melynek élei párhuzamosak a szereplő **a**, **b** és **c** vektorokkal. Ennek szellemében kövessük a paralelepipedon-szabályt (8. ábra):

- vetítsük a D pontot az S_{OAB} síkkal párhuzamosan az l_{OC} egyenesre (C' pont),
- a D pontot az l_{OC} egyenessel párhuzamosan az S_{OAB} síkba vetítve folytassuk az eljárást a paralelogramma-szabály szerint, azaz a vetületi pontot az l_{OB} egyenessel párhuzamosan vetítjük az l_{OA} egyenesre és viszont (A' és B' pontok).

Nyilvánvaló, hogy az O kezdőpont és a vetületi pontok egy olyan paralelepipedont határoznak meg, melynek élei párhuzamosak az **a**, **b** és **c** vektorokkal. Ha δ_1, δ_2 és δ_3 azok az O centrumú homotéciák, melyek az A, B és C pontokat rendre az A', B' és C' vetületi pontokba viszik, akkor a

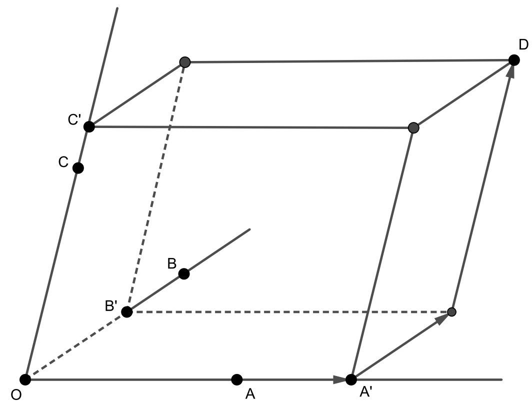
$$\delta_1 \cdot \mathbf{a} + \delta_2 \cdot \mathbf{b} + \delta_3 \cdot \mathbf{c}$$

lineáris kombináció éppen a **d** vektort adja. Mivel az O, A, B és C pontok általános helyzetűek, a paralelepipedon-módszer egyúttal az előállítás egyértelműségét is garantálja.

11. Tétel. *A szabadvektorok háromdimenziós baloldali vektorteret alkotnak az O centrumú homotéciák elfajuló homotéciával bővített halmaza, mint ferdetest felett. Rögzített $O \in \mathbb{E}$ pont esetén a*

$$\Phi_0 \colon A \in \mathbb{E} \to \Phi_0(A) := \mathbf{a}$$

leképezés, ahol **a** *az (O, A) reprezentánsú szabadvektor, illeszkedéstartó bijekció az $\mathbb{E}$ affin tér és a szabadvektorok vektorterének affin struktúrája között.*



8. ábra. A paralelepipedon-szabály

5. Megjegyzés. H. Weyl[4] éppen az iménti struktúratételt felhasználva fogalmazta meg az affin tér modern definícióját [4], ami a vektortérstruktúrából kiindulva garantálja a geometriai struktúra jellegzetességeit. Az általunk is követett klasszikus út tárja fel a Weyl-féle megközelítés mélyebb matematikai tartalmát.

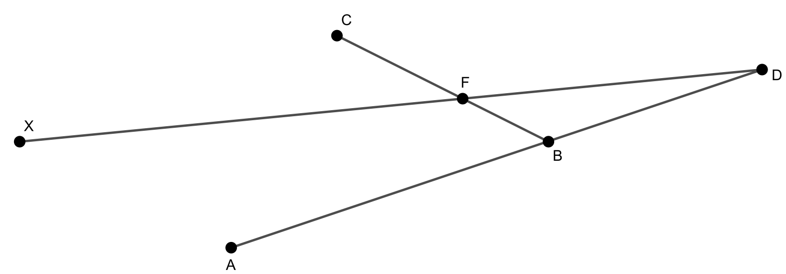
"Még annyit kell mindezekhez hozzátenni, hogy egy geometriai rendszert többféle, egymással ekvivalens axiómarendszerrel lehet megadni. A XX. század második felében leginkább a Hermann Weyl Tér, idő, anyag című, 1918-ban kiadott tankönyvében leírt, igen egyszerű pont-vektor axiomatika használata terjedt el" [5].

A tétel birtokában (bázis rögzítése után) az affin tér beazonosítható a $\mathbb{K}$ ferdetest feletti $\mathbb{K}^3$ vektortérrel és az 1.3, illetve 3.1. alfejezetek konstrukciói érdemi változtatás nélkül érvényben maradnak. Ha első pillantásra furcsa is a szabadvektorok homotéciával való szorzása, a 3.1. alfejezet formulája explicit módon mutatja a homotéciáknak és a vektortérhez tartozó ferdetest elemeinek ekvivalenciáját. Az absztrakt elmélet kidolgozása során pedig - explicit formulák hiányában - a homotéciák hatása veszi át a szabadvektorok skalárral való szorzásának szerepét. Ez a matematikai gondolkodásmód jellegéből fakad.

4.1. A valós affin geometria alaptétele

A 4. Definícióban bevezettük az affin transzformáció fogalmát, mint az affin tér önmagára való egyenes-, illetve síktartó, kölcsönösen egyértelmű leképezését. A továbbiakban a háromdimenziós vektortérmodellt alapul véve megadjuk az affin transzformációk analitikus leírását. Legyen $O \in \mathbb{E}$ és jelölje $\mathbb{K}$ az O centrumú homotéciák ferdetestét. Az a tény, hogy a szorzás nem feltétlenül kommutatív, egyelőre nem okoz különösebb problémát, annál inkább figyelnünk kell $\mathbb{K}$ számosságára, mely az affin tér egyenesein lévő pontok számosságával egyezik meg.

[4]Hermann Weyl (1885-1955), német matematikus, D. Hilbert és H. Pointcaré mellett a XX. századi matematika egyik meghatározó egyénisége.



9. ábra. Erős illeszkedési axiómák

9. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az affin térben az erős illeszkedési axiómák érvényesek, ha minden egyenesre illeszkedik legalább három pont.*

Az erős illeszkedési axiómák teljesülése azt jelenti, hogy a $\mathbb{K}$ test legalább háromelemű. Ennek jelentőségét a következő példa világítja meg

2. Példa. Legyen $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ kételemű test (ez azt jelenti, hogy egy homotécia vagy elfajuló, vagy pedig az identikus leképezés) és tekintsük a $\mathbb{K}$ feletti háromdimenziós $\mathbb{K}^3$ vektortérből képzett affin teret, melynek pontjait egy kocka csúcsaival reprezentálhatjuk. A vektortérmodell affin transzformációja a 8 csúcs egyenes- és síktartó permutációját jelenti. Ebben a modellben minden permutáció automatikusan egyenestartó, azaz az affin transzformáció egyetlen karakterisztikus tulajdonsága a síktartás. Például a kocka egyik lapjának elcsavarásával kapott

1 2 3 4 5 6 7 8

2 3 4 5 6 7 8 1

permutáció nem síktartó. Ez nyilvánvaló abból, hogy a felső lap 12, illetve 34 ”éle” párhuzamos, de a nekik megfelelő 23 és 45 nem párhuzamos, hanem kitérő. Az egyenes-, illetve a síktartás tehát általában nem ekvivalens.

6. Feladat. Igazolja, hogy erős illeszkedési axiómák esetén az affin tér kölcsönösen egyértelmű leképezéseinek egyenestartása maga után vonja a síktartást.

Útmutatás. Tekintsük az S_{ABC} síkot és legyen $X \in S_{ABC}$. Meggondolásaink lényege, hogy az X pontot egy olyan egyenes pontjaként állítsuk elő, melyet az A, B és C ”háromszög” oldalegyeneseinek pontjai feszítenek ki. Ebből ugyanis következik, hogy $\varphi(X)$ a $\varphi(A)$, $\varphi(B)$ és $\varphi(C)$ pontok által kifeszített sík eleme, ahol φ az affin tér önmagára való, kölcsönösen egyértelmű, egyenestartó leképezése. Tegyük fel, hogy $X \neq A$ és tekintsük az l_{AX} egyenest. Ha ez metszi az l_{BC} egyenest, akkor készen vagyunk. Ha $l_{AX} \parallel l_{BC}$, akkor pedig tekintsük az l_{AB} egyenes harmadik (erős illeszkedési axiómák) pontját: $D \in l_{AB}$, $D \neq A$ és $D \neq B$. Az l_{XD} egyenes metszi az l_{BC} egyenest egy F pontban, hiszen az ellenkező esetben az X pontra két olyan egyenes is illeszkedne, mely párhuzamos az l_{BC} egyenessel. Ennélfogva $X \in l_{DF}$, ahol $D \in l_{AB}$ és $F \in l_{BC}$.

Tekintettel a szakirodalomban fellelhető konvenciókra (ld. például klasszikus valós affin geometria a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetben), a továbbiakra nézve megállapodunk a következőkben.

Érvényesek az erős illeszkedési axiómák, következésképpen affin transzformáción az affin tér önmagára való, kölcsönösen egyértelmű, egyenestartó leképezését értjük.

4. Lemma. *Legyen V a $\mathbb{K}$ ferdetest feletti háromdimenziós vektortér, card $\mathbb{K} \geq 3$. Ha a $\varphi\colon V \to V$ kölcsönösen egyértelmű leképezés egyenestartó és $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, akkor φ szemilineáris leképezés, azaz additív,*

$$\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$$

és szemihomogén, azaz

$$\varphi(\lambda v) = \sigma(\lambda)\varphi(v) \qquad (\lambda \in \mathbb{K}),$$

ahol $\sigma\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ferdetest-izomorfizmus.

Bizonyítás. Tekintettel az előzményekre, φ síktartó és párhuzamosságtartó. Az additivitást ellenőrizendő, legyen v és w két lineárisan független vektor. Az egyenestartás miatt ugyanez áll a $\varphi(v)$ és $\varphi(w)$ képvektorokra is. A párhuzamosságtartás miatt pedig $l_{\mathbf{0}w} \mid\mid l_{vv+w}$ maga után vonja, hogy

$$l_{\varphi(\mathbf{0})\varphi(w)} = l_{\mathbf{0}\varphi(w))} \mid\mid l_{\varphi(v)\varphi(v+w)},$$

azaz

$$\varphi(v + w) - \varphi(v) = \lambda\varphi(w),$$
$$\varphi(v + w) = \varphi(v) + \lambda\varphi(w)$$

írható. Felcserélve az elemek szerepét,

$$\varphi(v + w) = \varphi(w) + \mu\varphi(v).$$

Kivonással kapjuk, hogy

$$\mathbf{0} = (1 - \mu)\varphi(v) + (\lambda - 1)\varphi(w),$$

ahonnan - a lineáris függetlenségre tekintettel - $\mu = 1$ és $\lambda = 1$ következik. Ennélfogva

$$\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w),$$

ami az additivitást igazolja lineárisan független vektorok esetén. Ha v és w lineárisan függők, akkor válasszunk egy $\mathbf{a}$ vektort, mely lineárisan független a v és w vektoroktól. Az előző esetre visszavezetve

$$\varphi((v + w) + \mathbf{a}) = \varphi(v + w) + \varphi(\mathbf{a}),$$

másfelől pedig

$$\varphi((v+w)+\mathbf{a}) = \varphi(v+(w+\mathbf{a})) = \varphi(v)+\varphi(w+\mathbf{a}) = \varphi(v)+\varphi(w)+\varphi(\mathbf{a}),$$

ahonnan az additivitásra következtethetünk. A σ leképezés konstrukciójához vegyük észre, hogy az additivitás szerint a P pontra illeszkedő, v irányvektorú egyenes a $\varphi(P)$ pontra illeszkedő, $\varphi(v)$ irányvektorú egyenesbe megy át, azaz

$$\varphi(P+\lambda v) = \varphi(P) + \sigma_v(\lambda)\varphi(v)$$

írható. Hasonlóan

$$\varphi(P+\lambda w) = \varphi(P) + \sigma_w(\lambda)\varphi(w).$$

Legyenek v és w lineárisan független vektorok. Az általuk meghatározott egyenes nyilvánvalóan párhuzamos a $P+\lambda v$ és $P+\lambda w$ pontokat összekötő egyenessel, hiszen az irányvektor mindkét esetben $w-v$. A párhuzamosságtartás miatt

$$l_{vw} \mid\mid l_{P+\lambda v P+\lambda w} \;\Rightarrow\; l_{\varphi(v)\varphi(w)} \mid\mid l_{\varphi(P+\lambda v)\varphi(P+\lambda w)},$$

ahonnan

$$\varphi(w)-\varphi(v) = \mu\left(\sigma_w(\lambda)\varphi(w) - \sigma_v(\lambda)\varphi(v)\right)$$

valamely $\mu \neq 0$ skalár mellett és

$$\mathbf{0} = \left(1-\mu\sigma_v(\lambda)\right)\varphi(v) + \left(\mu\sigma_w(\lambda)-1\right)\varphi(w).$$

A vektorok lineáris függetlenségét figyelembe véve

$$1-\mu\sigma_v(\lambda) = 0, \quad \mu\sigma_w(\lambda)-1 = 0,$$

azaz $\sigma_v(\lambda) = \sigma_w(\lambda)$. Ha a vektorok lineárisan függők, akkor válasszunk egy $\mathbf{a}$ vektort, mely lineárisan független a v és w vektoroktól:

$$\sigma_v(\lambda) = \sigma_{\mathbf{a}}(\lambda) = \sigma_w(\lambda).$$

Összegezve az eddigieket

$$\varphi(P+\lambda v) = \varphi(P) + \sigma(\lambda)\varphi(v)$$

írható, függetlenül a v vektor választásától. Ha $P = \mathbf{0}$, akkor $\varphi(\lambda v) = \sigma(\lambda)\varphi(v)$. Végül

$$\varphi((\lambda+\mu)v) = \sigma(\lambda+\mu)\varphi(v),$$

$$\varphi((\lambda+\mu)v) = \varphi(\lambda v+\mu v) = \varphi(\lambda v)+\varphi(\mu v) = \sigma(\lambda)\varphi(v)+\sigma(\mu)\varphi(v) = \left(\sigma(\lambda)+\sigma(\mu)\right)\varphi(v),$$

ami azt jelenti, hogy $\sigma(\lambda+\mu) = \sigma(\lambda)+\sigma(\mu)$, továbbá

$$\varphi((\lambda\mu)v) = \sigma(\lambda\mu)\varphi(v),$$

$$\varphi((\lambda\mu)v) = \varphi(\lambda(\mu v)) = \sigma(\lambda)\varphi(\mu v) = \sigma(\lambda)\sigma(\mu)\varphi(v),$$

ami azt jelenti, hogy $\sigma(\lambda\mu) = \sigma(\lambda)\sigma(\mu)$. $\square$

6. Megjegyzés. A valós számtestnek nincs valódi testizomorfizmusa, csak az identikus transzformáció. A valós affin tér origót fixen hagyó affin transzformációi tehát a lineáris, azaz additív,

$$\varphi(v+w)=\varphi(v)+\varphi(w)$$

és homogén

$$\varphi(\lambda v)=\lambda\varphi(v) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

leképezések. Ezzel szemben például a komplex számtestnek a konjugálás nem identikus testizomorfizmusa.

7. Feladat. Igazolja, hogy ha σ a valós számtestnek önmagára való testizomorfizmusa, akkor σ az identikus leképezés.

Útmutatás. Az additivitás maga után vonja, hogy $\sigma(r)=r$ minden $r\in\mathbb{Q}$ racionális szám esetén. A szorzás műveletének megtartása alapján pedig bármely $\varepsilon=t^2$ pozitív valós szám esetén

$$\sigma(\varepsilon)=(\sigma(t))^2>0,$$

ahonnan a rendezéstartás következik. Mivel a racionális számok halmaza sűrű a valós számtestben ezért bármely $t\in\mathbb{R}$ esetén megadható a t számot közelítő alsó, illetve felső racionális számsorozat: $r_n<t<s_n$, ahonnan

$$r_n=\sigma(r_n)<\sigma(t)<\sigma(s_n)=s_n$$

következik a rendezéstartás miatt, Az $n\to\infty$ határátmenetet véve $\sigma(t)=t$.

12. Tétel. (az affin transzformációk alaptétele) *Legyen V a $\mathbb{K}$ ferdetest feletti háromdimenziós vektortér, $\operatorname{card}\mathbb{K}\geq 3$. Ha a $\varphi\colon V\to V$ kölcsönösen egyértelmű leképezés egyenestartó, akkor φ egy eltolás és egy szemilineáris leképezés kompozíciója.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző lemmát a $\varphi(v)-\varphi(\mathbf{0})$ leképezésre. $\square$

13. Tétel. (a valós affin geometria alaptétele) *Ha A, B, C és D, illetve A', B', C' és D' általános helyzetű pontnégyesek a valós affin térben, akkor létezik egy és csak egy olyan $\varphi\colon\mathbb{E}\to\mathbb{E}$ affin transzformáció, melyre*

$$\varphi(A)=A',\ \varphi(B)=B',\ \varphi(C)=C',\varphi(D)=D'.$$

Bizonyítás. A bizonyítás lényege, hogy a problémát megoldjuk a vektortérmodellben, majd a helyzetvektor-leképezés inverzével visszahúzzuk az eredeti affin térbe az alábbi

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \xrightarrow{\Phi_0} & V=\mathbb{R}^3 \\ \downarrow & & \downarrow\varphi \\ \mathbb{E} & \xleftarrow{\Phi_0^{-1}} & V=\mathbb{R}^3 \end{array}$$

diagramnak megfelelően. Rögzítve az O kezdőpontot, legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$, illetve $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ és $\mathbf{d}'$ a megfelelő O kezdőpontú rendezett párok által reprezentált vektorok. Tekintettel arra, hogy a pontok általános helyzetűek, az (A,B), (A,C) és (A,D), illetve az (A',B'), (A',C') és (A',D') rendezett pontpárokkal reprezentált

$$\mathbf{b}-\mathbf{a},\ \mathbf{c}-\mathbf{a} \text{ és } \mathbf{d}-\mathbf{a},\ \text{illetve } \mathbf{b}'-\mathbf{a}',\ \mathbf{c}'-\mathbf{a}' \text{ és } \mathbf{d}'-\mathbf{a}'$$

vektorok egy-egy bázist alkotnak a vektortérben. Egyértelműen létezik tehát olyan kölcsönösen egyértelmű f lineáris transzfrormáció, melyre

$$f(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\mathbf{b}'-\mathbf{a}',\ f(\mathbf{c}-\mathbf{a})=\mathbf{c}'-\mathbf{a}' \text{ és } f(\mathbf{d}-\mathbf{a})=\mathbf{d}'-\mathbf{a}',$$

ahonnan $v=\mathbf{a}'-f(\mathbf{a})=\mathbf{b}'-f(\mathbf{b})=\mathbf{c}'-f(\mathbf{c})=\mathbf{d}'-f(\mathbf{d})$. Ennélfogva a $\varphi(w):=f(w)+v$ leképezésre

$$\varphi(\mathbf{a}):=f(\mathbf{a})+v=f(\mathbf{a})+\mathbf{a}'-f(\mathbf{a})=\mathbf{a}',\ldots,\varphi(\mathbf{d}):=f(\mathbf{d})+v=f(\mathbf{d})+\mathbf{d}'-f(\mathbf{d})=\mathbf{d}'$$

teljesül, ami bizonyítandó volt. $\square$

Egy vektortér kölcsönösen egyértelmű lineáris transzformációi nyilvánvalóan csoportot alkotnak a leképezéskompozíció műveletére nézve. Ezt általános lineáris csoportnak nevezzük és a $GL_3(V)$ szimbólummal szokás jelölni, ahol az index utal a vektortér dimenziójára. A transzlációk természetesen beazonosíthatók az eltolóvektorral, azonban két affin transzformáció kompozíciója a

$$\varphi_2\circ\varphi_1(w)=\varphi_2\left(f_1(w)+v_1\right)=f_2\circ f_1(w)+\left(f_2(v_1)+v_2\right)$$

alakba írható. A lineáris részek tehák komponálódnak, az eltolóvektor pedig az $f_2(v_1)+v_2$ alakot ölti. Az algebrai leírása ennek a szituációnak a $GL_3(V)\times V$ Descartes-szorzaton bevezetett

$$(f_2,v_2)\bullet(f_1,v_1):=(f_2\circ f_1, f_2(v_1)+v_2)$$

művelettel lehetséges. Ezt az algebrai struktúrát a tényezők szemidirekt szorzatának nevezzük és a

$$(GL_3(V)\times V,\bullet)=V\rtimes GL_3(V)$$

szimbólummal szokás jelölni: a valós affin tér affin transzformációinak csoportja izomorf a vektortér és az általános lineáris csoport szemidirekt szorzatával.

7. Megjegyzés. Az affin geometria alaptételét napjainkig tárgyalja a szakirodalom, gyengítve a kölcsönösen egyértelműség követelményén [2], vagy az egyenestartást csupán irányoknak egy véges halmazához tartozó egyenesekre vonatkozóan előírva [1].

8. Feladat. Igazolja, hogy a $\begin{pmatrix} x+y & 4y \\ -y & x-y \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Q})$ alakú elemek ferdetestet (divison ring [3]) alkotnak a mátrixok szokásos összeadására és szorzására nézve.

9. Feladat. Igazolja, hogy a $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 2z & x & y \\ 2y & 2z & x \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{Q})$ alakú elemek ferdetestet alkotnak a mátrixok szokásos összeadására és szorzására nézve [3].

10. Feladat. Igazolja, hogy a $\begin{pmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x \end{pmatrix}\in M_4(\mathbb{R})$ alakú elemek ferdetestet alkotnak a mátrixok szokásos összeadására és szorzására nézve.

A feladatban szereplő mátrixok halmaza, mint valós vektortér, egy 4-dimeziós altere a $M_4(\mathbb{R})$ mátrixtérnek. Az

- $x = 1,\ y = z = t = 0,$
- $y = 1,\ x = z = t = 0,$
- $z = 1,\ x = y = t = 0,$
- $t = 1,\ x = y = z = 0$

választással adódó e, i, j és k mátrixok egy bázist alkotnak az altérben és teljesítik a következő azonosságokat (v.ö. quaterniók [3]):

$$e^2 = e,\ i^2 = j^2 = k^2 = -e,$$

$$e \cdot i = i \cdot e,\ e \cdot j = j \cdot e,\ e \cdot k = k \cdot e,$$

$$i \cdot j = -j \cdot i = k,\ j \cdot k = -k \cdot j = i,\ k \cdot i = -i \cdot k = j.$$

Egyszerűsítve a formalizmust: $\begin{pmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x \end{pmatrix} = x \cdot e + y \cdot i + z \cdot j + w \cdot k.$

4.2. Desargues-féle affin síkok

Az affin sík Moulton-féle modellje kapcsán láttuk, hogy a Desargues-féle tételek nem igazolhatóak pusztán az affin sík axiómái segítségével. A Desargues-féle tételcsalád azonban kulcsszerepet játszik a transzlációk és a homotéciák egzisztencia- és unicitástételének bizonyításánál, végső soron pedig a csatolt vektortérstruktúrához vezet. Azokat az affin síkokat, melyekben a Desargues-tételek érvényesek Desargues-féle affin síkoknak nevezzük. Jegyezzük meg, hogy az ún. Desargues-féle záródási tulajdonságot az affin sík projektív lezártjára szokás megkövetelni, ami azzal az előnnyel jár, hogy a Desargues-tétel affin alakja és a kis Desargues-tétel a Desargues-tétel speciális eseteivé válnak, hiszen a projektív síkon bármely két egyenes metsző. Egy Desargues-féle affin sík - éppúgy, mint az affin tér - ferdetesttel koordinátázható, azaz a szabadvektorok (kétdimenziós) vektorterének affin struktúrájával izomorf.

5. Az affin geometria klasszikus tételei: a párhuzamos szelők tétele, a Menelaosz- és a Ceva-tétel

Az affin geometria klasszikus tételei alapvetően síkgeometriai tételek, melyek az affin transzformációk nevezetes invariánsa, az ún. osztóviszony fogalmán alapulnak. A továbbiakban $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ és $V = \mathbb{R}^2$, azaz a valós affin síkon dolgozunk. Legyen $P_1,\ P_2 \neq P_3$ három kollineáris pont, azaz

$$P_1 = P + t_1 v,\ P_2 = P + t_2 v,\ P_3 = P + t_3 v$$

bizonyos $t_1,\ t_2 \neq t_3$ skalárok esetén. A P_3 pont P_1 és P_2 alappontokra vonatkozó osztóviszonyán a

$$(P_1 P_2 P_3) := \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} \tag{9}$$

arányt értjük. Ekvivalens módon:

$$P_3 - P_1 = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3}(P_2 - P_3) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{P_1P_3} = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3}\vec{P_3P_2},$$

ahonnan világos, hogy az osztóviszony független az egyenes P pontjának és v irányvektorának megválasztásától. Nyilvánvaló az is, hogy az osztóviszony az affin transzformációk invariánsa, hiszen a különbségképzésnél az eltolóvektor kiesik,

$$\varphi(P_3) - \varphi(P_1) = f(P_3) - f(P_1),$$

a lineáris rész segítségével pedig az

$$\vec{P_1P_3} = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3}\vec{P_3P_2} \Leftrightarrow f\left(\vec{P_1P_3}\right) = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} f\left(\vec{P_3P_2}\right) \Leftrightarrow$$

$$f(P_3) - f(P_1) = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3}(f(P_2) - f(P_3)) \Leftrightarrow \varphi(P_3) - \varphi(P_1) = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3}(\varphi(P_2) - \varphi(P_3)) \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{\varphi(P_1)\varphi(P_3)} = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3}\overrightarrow{\varphi(P_3)\varphi(P_2)}$$

ekvivalenciák írhatók fel. Néhány - közvetlen számolással ellenőrizhető - azonosság:

$$(P_1P_2P_3)(P_2P_1P_3) = 1 \tag{10}$$

$$(P_1P_2P_3)(P_3P_1P_2)(P_2P_3P_1) = 1 \tag{11}$$

$$(\hat{P}_1P_2P_3P_4)(\hat{P}_3P_1P_2P_4)(\hat{P}_2P_3P_1P_4) = -1, \tag{12}$$

ahol a $\hat{}$ operátor törli az argumentumát - figyeljük meg az 123 ciklikus permutációit.

14. Tétel. (a párhuzamos szelők tétele) *A párhuzamos vetítés osztóviszonytartó.*

Bizonyítás. Tekintsük a sík párhuzamos vetítését az l' egyenesre és válasszuk ki a vetítendő l egyenest úgy, hogy iránya különbözzék a vetítés irányától (ezzel elkerüljük, hogy a vetületi pontok egybeessenek). Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor az l egyenese metszi az l' egyenest egy O pontban. Legyenek P_1, P_2, P_3 az l egyenesnek a metszésponttól különböző pontjai és jelölje P_1', P_2', P_3' a vetületi pontokat az l' egyenesen. A homotéciákra vonatkozó képszerkesztési eljárás alapján világos, hogy ha P_2 a P_1 pont képe egy O centrumú homotéciánál, akkor P_2' a P_1' pont képe lesz. A homotéciák a vektortérmodellben a

$$\delta_O(P) = O + \lambda\vec{OP}$$

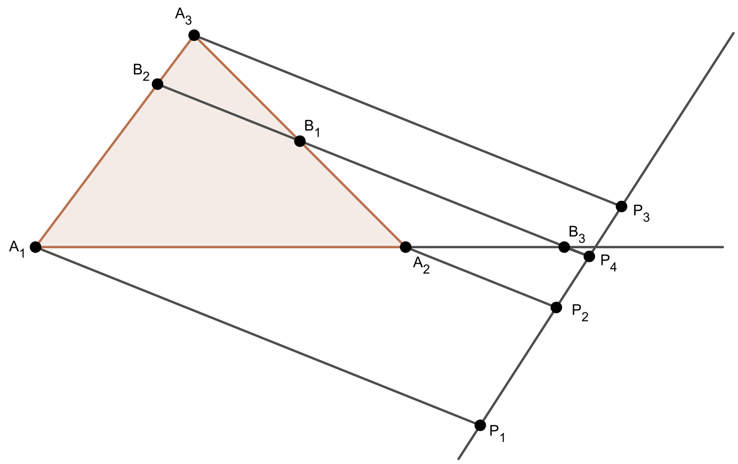
képlet alapján működnek, ahonnan a $P = P_1$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$P_2 = O + \lambda\vec{OP_1} \quad \Rightarrow \quad \vec{OP_2} = \lambda\vec{OP_1}.$$

A vektoregyenlet alapján pedig az O, P_1 és P_2 pontok osztóviszonya egyszerű számításokkal meghatározható minden lehetséges sorrendben:

$$\vec{P_2O} = -\vec{OP_2} = -\lambda\vec{OP_1} \quad \Rightarrow \quad (P_2P_1O) = -\lambda,$$

$$\vec{P_2P_1} = \vec{P_2O} + \vec{OP_1} = -\lambda\vec{OP_1} + \vec{OP_1} = \lambda\vec{P_1O} - \vec{P_1O} = (\lambda - 1)\vec{P_1O} \quad \Rightarrow \quad (P_2OP_1) = 1 - \lambda, \ldots$$



10. ábra. Menelaosz tétele

A számítások során csupán azt használtuk ki, hogy P_2 a P_1 pont képe a δ_O homotéciánál. Mivel ugyanez áll a vetületi pontokra

$$(OP_1P_2) = (OP_1'P_2'), \ldots,$$

feltéve, hogy az O pont szerepel az osztóviszony tagjai között. Alkalmazva a (12) azonosságot a $P_1 = O$ választással,

$$(\hat{O}P_1P_2P_3)(\hat{P}_2OP_1P_3)(\hat{P}_1P_2OP_3) = -1,$$

$$(\hat{O}P_1'P_2'P_3')(\hat{P'}_2OP_1'P_3')(\hat{P'}_1P_2'OP_3') = -1,$$

$$(P_1P_2P_3) = (P_1'P_2'P_3')$$

következik. Az $l \mid\mid l'$ eset tisztázásához tekintsünk egy közös transzverzálist (melynek iránya eltér a vetítés irányától) és alkalmazzuk az előző esetben látottakat a transzverzális egyenesen kapott vetületi pontok segítségével. □

15. Tétel. (Menelaosz tétele) *Tekintsük a nem kollineáris A_1, A_2 és A_3 pontok által meghatározott teljes háromszögvonalat a valós affin síkon. Ha a $B_1 \in l_{A_2A_3}$, $B_3 \in l_{A_1A_2}$ és $B_2 \in l_{A_3A_1}$ pontok kollineárisak, akkor*

$$(A_1A_2B_3)(A_3A_1B_2)(A_2A_3B_1) = -1.$$

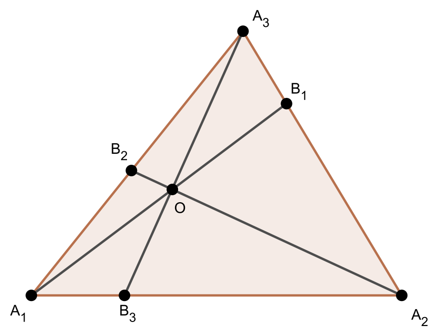
Bizonyítás. Vetítsük a síkot a B_1, B_2 és B_3 közös l egyenesével párhuzamosan egy az l egyeneset metsző, de egyébként tetszőleges egyenesre és jelölje a vetületi pontokat rendre

$$A_1' = P_1,\ A_2' = P_2,\ A_3' = P_3,\ B_1' = B_2' = B_3' = P_4;$$

alkalmazzuk a (12) azonosságot és a párhuzamos szelők tételét. □

A tételben szereplő összefüggés memorizálását segíti a $(A_1A_2\hat{A}_3B_3)(A_3A_1\hat{A}_2B_2)(A_2A_3\hat{A}_1B_1) = -1$ formula; figyeljük meg az indexek ciklikus permutációit.

11. Feladat. Igazolja a Menelaosz-tétel megfordítását.



11. ábra. Ceva tétele

Útmutatás. Ha $l_{B_1B_3}$ metszi az $l_{A_1A_3}$ oldalegyenest egy X pontban, akkor a tétel szerint

$$(A_1A_2B_3)(A_3A_1X)(A_2A_3B_1) = -1.$$

Egyidejűleg

$$(A_1A_2B_3)(A_3A_1B_2)(A_2A_3B_1) = -1.$$

Kapjuk tehát, hogy $(A_3A_1X) = (A_3A_1B_2)$, ahonnan $X = B_2$ következik. Ha $l_{B_1B_3}$ és az $l_{A_1A_3}$ oldalegyenes párhuzamos, akkor a párhuzamos szelők tétele szerint: $(A_3A_2B_1) = (A_1A_2B_3)$. Egyidejűleg

$$(A_1A_2B_3)(A_3A_1B_2)(A_2A_3B_1) = -1,$$

$$(A_1A_2B_3)(A_3A_1B_2)\frac{1}{(A_3A_2B_1)} = -1,$$

$$(A_1A_2B_3)(A_3A_1B_2)\frac{1}{(A_1A_2B_3)} = -1,$$

$$(A_3A_1B_2) = -1,$$

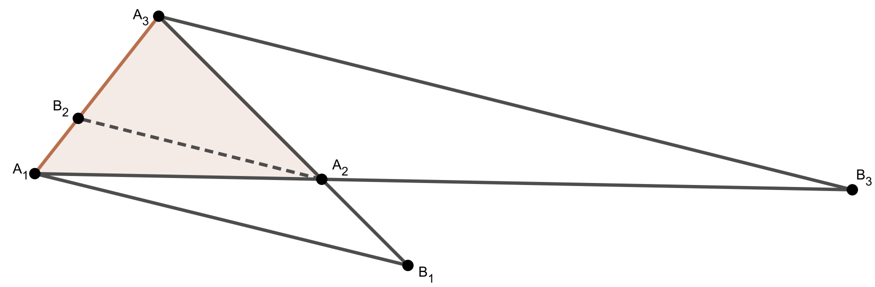
ami az osztóviszony értelmezése alapján az alappontok egybeeséséhez vezet. Ez nyilvánvalóan ellentmondás.

16. Tétel. (Ceva tétele) *Tekintsük a nem kollineáris A_1, A_2 és A_3 pontok által meghatározott teljes háromszögvonalat a valós affin síkon és legyen $B_1 \in l_{A_2A_3}$, $B_3 \in l_{A_1A_2}$ és $B_2 \in l_{A_3A_1}$. Ha a megfelelő indexű pontokra illeszkedő l_1, l_2 és l_3 egyenesek konkurrensek, akkor*

$$(A_1A_2B_3)(A_3A_1B_2)(A_2A_3B_1) = 1.$$

Bizonyítás. Jelölje O az egyenesek közös pontját és alkalmazzuk a Menelaosz-tételt az A_1, A_2 és B_2 pontok által meghatározott teljes háromszögvonalra:

$$(A_1A_2B_3)(B_2A_1A_3)(A_2B_2O) = -1,$$



12. ábra. Ceva tételének megfordítása: $l_1 \parallel l_3$

majd pedig a B_2, A_2 és A_3 pontok által meghatározott teljes háromszögvonalra:

$$(B_2A_2O)(A_3B_2A_1)(A_2A_3B_1) = -1.$$

Összeszorozva az egyenleteket:

$$1 = (A_1A_2B_3)(B_2A_1A_3)(A_2B_2O)(B_2A_2O)(A_3B_2A_1)(A_2A_3B_1) \overset{(10)}{=}$$

$$(A_1A_2B_3)(B_2A_1A_3)(A_3B_2A_1)(A_2A_3B_1) \overset{(11)}{=}$$

$$(A_1A_2B_3)\frac{1}{(A_1A_3B_2)}(A_2A_3B_1) \overset{(10)}{=} (A_1A_2B_3)(A_3A_1B_2)(A_2A_3B_1)$$

az osztóviszonyra vonatkozó azonosságok alapján. □

A tételben szereplő összefüggés memorizálását segíti a $(A_1A_2\hat{A}_3B_3)(A_3A_1\hat{A}_2B_2)(A_2A_3\hat{A}_1B_1) = 1$ formula; figyeljük meg az indexek ciklikus permutációit.

12. Feladat. Igazolja a Ceva-tétel megfordítását: ha $(A_1A_2B_3)(A_3A_1B_2)(A_2A_3B_1) = 1$, akkor az l_1, l_2 és l_3 egyenesek vagy párhuzamosak, vagy pedig konkurrensek.

Útmutatás. Tegyük fel, hogy $l_1 \parallel l_3$; a párhuzamos szelők tétele miatt ez azt jelenti, hogy

$$(A_2A_3B_1) = (A_2B_3A_1) = \frac{1}{(A_1A_2B_3)(B_3A_1A_2)},$$

amit a három osztóviszony szorzatára tett kikötéssel összevetve

$$1 = \frac{(A_3A_1B_2)}{(B_3A_1A_2)} \quad \Rightarrow \quad (A_3A_1B_2) = (B_3A_1A_2).$$

Jelölje X az $l_{A_1A_3}$ oldalegyenesnek és az A_2 pontra illeszkedő, l_3 egyenessel párhuzamos egyenesnek a metszéspontját. A párhuzamos szelők tétele miatt

$$(A_3A_1X) = (B_3A_1A_2),$$

azaz

$$(A_3A_1X) = (A_3A_1B_2) \quad \Rightarrow \quad B_2 = X,$$

ahonnan az következik[5], hogy $l_2 \parallel l_3$, s ennélfogva $l_2 \parallel l_3 \parallel l_1$. Most tegyük fel, hogy l_1 és l_3 metszik egymást egy O pontban. Ha X az l_{A_2O} egyenes metszéspontja az $l_{A_1A_3}$ oldalegyenessel, akkor Ceva tétele alapján

$$(A_1A_2B_3)(A_3A_1X)(A_2A_3B_1) = 1,$$

míg feltétel szerint

$$(A_1A_2B_3)(A_3A_1B_2)(A_2A_3B_1) = 1.$$

Kapjuk tehát, hogy

$$(A_3A_1B_2) = (A_3A_1X) \quad \Rightarrow \quad B_2 = X.$$

A bizonyítás teljes, ha megmutatjuk, hogy az X metszéspont valóban létezik. Indirekte tegyük fel, hogy l_{A_2O} párhuzamos az $l_{A_1A_3}$ egyenessel (13. ábra). A párhuzamos szelők tétele szerint

$$(A_1B_3A_2) = (A_3B_3O).$$

Alkalmazva a Menelaosz tételt a B_3, A_2 és A_3 pontok által meghatározott teljes háromszögre,

$$(B_3A_2A_1)(A_3B_3O)(A_2A_3B_1) = -1,$$

$$(B_3A_2A_1)(A_1B_3A_2)(A_2A_3B_1) = -1,$$

$$\frac{1}{(A_2A_1B_3)}(A_2A_3B_1) = -1,$$

$$(A_1A_2B_3)(A_2A_3B_1) = -1.$$

A feltétel szerint

$$(A_1A_2B_3)(A_3A_1B_2)(A_2A_3B_1) = 1,$$

azaz

$$-1 = (A_1A_2B_3)(A_2A_3B_1) = \frac{1}{(A_3A_1B_2)} \quad \Rightarrow \quad (A_3A_1B_2) = -1,$$

ami az osztóviszony értelmezése alapján az alappontok egybeeséséhez vezet. Ez nyilvánvalóan ellentmondás.

8. Megjegyzés. A Ceva-tétel megfordításából következik, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást.

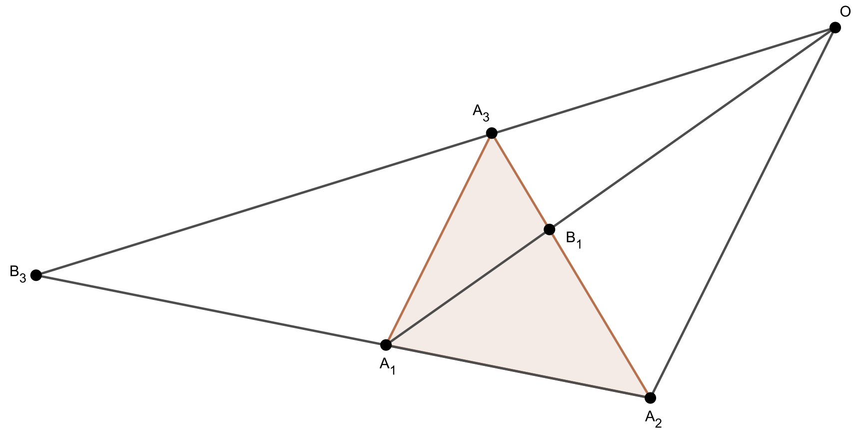
Hivatkozások

[1] S. Artstein-Avidan, B. A. Slomka: The Fundamental Theorems of Affine and Projective Geometry Revisited, arXiv:1604.01762

[2] A. Chubarev, I. Pinelis: Fundamental theorem of affine geometry without 1-to-1 condition, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (9) (1999), 2735-2744.

[3] R. Godement: Algebra, Hermann kiadó, 1968.

[5] A szóban forgó implikáció a párhuzamos szelők tételének megfordítása.



13. ábra. Ceva tételének megfordítása: $l_1 \cap l_3 = \{O\}$

[4] V. T. Baziljev, K. I., Dunyicsev, V. P. Ivanyickaja: Geometria I, Tankönyvkiadó, 1985.

[5] R. Bonola: Az euklideszi geometria története (Függelék a magyar kiadáshoz), Ford.:Hack Frigyes, Budapest, 2002.

[6] Radó Ferenc, Orbán Béla: A geometria mai szemmel, Dacia Kiadó, Kolozsvár, 1981.

[7] Vincze Csaba: Az abszolút geometria alapjai, kézirat, 2018.