Bevezetés a közönséges differenciálegyenletek elméletébe
[illetve: Közönséges differenciálegyenletek]

tantárgyi tájékoztató a 2019/2020. tanév I. félévében

Az előadások és gyakorlatok időpontja, tematikája

Előadó: Boros Zoltán [*honlap*: `http://math.unideb.hu/boros-zoltan/`]

Az előadás *kódja*: TMBE0207, TTMBE0817 illetve TTMBE0206;
— *heti óraszáma*: 2, *kreditértéke*: 3;
— *időpontja*: kedd 9.00–10.40, *helyszíne*: GeoMat Épület M 402 tanterem.

Az előadások dátuma (2019-ben) **és tervezett tematikája:**

szeptember 10., 17.: Közönséges elsőrendű explicit skalár-differenciálegyenlet, kezdetiérték-probléma geometriai interpretációja. Elemi úton megoldható differenciálegyenletek alap-típusai (szeparábilis [szétválasztható változójú] differenciálegyenlet, lineáris skalár-differenciálegyenlet, egzakt differenciálegyenlet).

szeptember 24.: A közönséges differenciálegyenlet (és megoldásának) általános fogalma. Nemkiterjeszthető megoldások. Explicit differenciálegyenletek, Cauchy-feladatok. Az átviteli elv.

október 1.: Az elsőrendű explicit vektor-differenciálegyenletre vonatkozó Cauchy-feladat átírása integrál-egyenletre. A Picard–Lindelöf-féle egzisztencia- és unicitási tétel.

október 8.: Normál egyenlet teljes megoldásának létezése, tulajdonságai (nyílt intervallumon értelmezett; határtól határig halad).

október 15.: Diszkrét approximáció: az Euler-féle töröttvonal-módszer. A Cauchy–Peano-féle egzisztencia-tétel.

október 22.: Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek I. (Gronwall-lemma, Cauchy-feladat teljes megoldása, homogén egyenletrendszer alaprendszere, alapmátrixa).

november 5.: Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek II. (Abel–Liouville-tétel, konstansvariálás).

november 12.: Mátrixok egész függvényei, az állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer alapmátrixa.

november 19.: Stabilitás és aszimptotikus stabilitás fogalma. Ljapunov stabilitási tétele.

november 26.: Magasabbrendű lineáris skalár-differenciálegyenletek (a homogén egyenlet alaprendszere, Wronski-determináns, Liouville-tétel, konstans-variálás).

december 3.: Magasabbrendű állandó együtthatós homogén lineáris skalár-differenciálegyenletek alaprendszere (karakterisztikus polinom, komplex illetve valós alaprendszer).

december 10.: A variációszámítás alapfeladata, Du Bois Reymond lemma, Euler–Lagrange differenciálegyenletek.

A gyakorlatok órarendje és dátumai:
Gyakorlatvezető: Grünwald Richárd

A gyakorlat *kódja*: TMBG0207, TTMBG0817 illetve TTMBG0206;
— *heti óraszáma*: 2, *kreditértéke*: 2;
— *időpontja*: csütörtök 16.00–17.40, *helyszíne*: GeoMat Épület M 315 tanterem.

A gyakorlatok dátuma (2019-ben) **és tervezett tematikája:**

szeptember 12.: Szétválasztható változójú (szeparábilis) differenciálegyenlet.

szeptember 19.: Változóban homogén differenciálegyenlet. További, szeparábilisra visszavezethető differenciálegyenletek.

szeptember 26.: Lineáris skalár-differenciálegyenlet.

október 3.: Bernoulli-egyenlet.

október 10.: Egzakt differenciálegyenlet.

október 17.: Integráló szorzók.

október 24.: *1. zárthelyi dolgozat.*

november 7.: Hiányos másodrendű differenciálegyenletek.

november 14.: Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszerek.

november 21.: Magasabbrendű állandó együtthatós homogén lineáris skalár-differenciálegyenletek.

november 28.: Inhomogén lineáris differenciálegyenletek. Euler-féle differenciálegyenletek.

december 5.: *2. zárthelyi dolgozat.*

december 12.: Példák az Euler–Lagrange differenciálegyenletek alkalmazására.

A gyakorlatok látogatása kötelező. A jelenlétet a gyakorlatvezető nyilvántartja.

A dolgozatok a gyakorlatok tananyagára épülnek. A gyakorlatokon áttekintett feladattípusok akkor is szerepelhetnek a dolgozatokban, ha a mintadolgozatokban nem jelennek meg.

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-problémák (lokális) megoldásait:

$$\begin{aligned}
(x^2+4)y'(x)+2xy(x)=0\,, \quad y(0) &= \frac{1}{4}\,;\\
y'(x)\operatorname{ctg} x+y(x)=2\,, \quad y(0) &= -1\,;\\
xy'(x)+y(x)=(y(x))^2\,, \quad y(1) &= \frac{1}{2}\,;\\
(x+2y(x))\,y'(x)=1\,, \quad y(0) &= -1\,;\\
xy'(x)-2y(x)+x^3\sin x=0\,, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0\,.
\end{aligned}$$

2. Oldjuk meg az alábbi (változóban homogén) differenciálegyenleteket:

$$\begin{aligned}
x+2y(x) &= xy'(x)\,;\\
(y(x))^2-2xy(x)+x^2y'(x) &= 0\,;\\
\left(x^2+(y(x))^2\right)y'(x) &= 2xy(x)\,;\\
xy'(x)-y(x) &= (x+y(x))\ln\frac{x+y(x)}{x}\,.
\end{aligned}$$

3. Határozzuk meg az

$$(y'(x)+1)\ln\frac{x+y(x)}{x+3}=\frac{x+y(x)}{x+3}$$

differenciálegyenlet megoldásait!

4. Oldjuk meg a következő lineáris differenciálegyenleteket:

$$\begin{aligned}
(2x+1)y'(x) &= 4x+2y(x)\,;\\
y(x) &= x\left(y'(x)-x\cos x\right)\,;\\
xy'(x)+(x+1)y(x) &= 3x^2e^{-x}\,.
\end{aligned}$$

5. Oldjuk meg az alábbi (Bernoulli-féle) differenciálegyenleteket:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= (y(x))^4\cos x+y(x)\operatorname{tg} x\,;\\
xy(x)y'(x) &= (y(x))^2+x\,;\\
xy'(x) &= 2x^2\sqrt{y(x)}+4y(x)\,;\\
2y'(x)-\frac{x}{y(x)} &= \frac{xy(x)}{x^2-1}\,.
\end{aligned}$$

6. Ellenőrizzük, hogy az alábbi differenciálegyenletek egzaktak-e, azután határozzuk meg a megoldásukat:

$$\begin{aligned}
(2-9x(y(x))^2)x \quad + \quad (4(y(x))^2-6x^3)y(x)y'(x) &= 0\,;\\
\frac{3x^2+(y(x))^2}{(y(x))^2} &= \frac{2x^3+5y(x)}{(y(x))^3}y'(x)\,;\\
1+(y(x))^2\sin 2x &= 2y(x)(\cos x)^2y'(x)\,;\\
3x^2\left(1+\ln y(x)\right) &= \left(2y(x)-\frac{x^3}{y(x)}\right)y'(x)\,.
\end{aligned}$$

7. Keressünk csak x-től vagy csak $y(x)$-től függő integráló szorzót az alábbi differenciálegyenletekhez, majd határozzuk meg a megoldásukat:

$$\begin{aligned}
x^2+(y(x))^2+x+y(x)y'(x) &= 0\ ; \\
(y(x))^2-(xy(x)+x^3)y'(x) &= 0\ ; \\
x^2+2x+y(x) &= (x-3x^2y(x))y'(x)\ ; \\
xy(x)+\left(y(x)+x^2y(x)+\frac{x^2}{2}\right)y'(x) &= 0\ .
\end{aligned}$$

8. Oldjuk meg az alábbi hiányos másodrendű differenciálegyenleteket:

$$\begin{aligned}
x^2y''(x) &= (y'(x))^2\ ; \\
2xy'(x)y''(x) &= (y'(x))^2-1\ ; \\
(y(x))^3y''(x) &= 1\ ; \\
y''(x) &= 2y(x)y'(x)\ .
\end{aligned}$$

9. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatot:

$$\begin{cases} y_1'(x) &= y_1(x)+2y_2(x)\,, \qquad y_1(0)=5 \\ y_2'(x) &= 2y_1(x)+4y_2(x)\,, \qquad y_2(0)=5\,. \end{cases}$$

10. Határozzuk meg az alábbi homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerek általános megoldását:

$$\begin{cases} y_1'(x) &= y_1(x)-y_2(x) \\ y_2'(x) &= -4y_1(x)+y_2(x)\,; \end{cases}$$

valamint

$$\begin{cases} y_1'(x) &= y_1(x)-y_2(x)+y_3(x) \\ y_2'(x) &= y_1(x)+y_2(x)-y_3(x) \\ y_3'(x) &= 2y_1(x)-y_2(x)\,. \end{cases}$$

11. Határozzuk meg az alábbi inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerek általános megoldását:

$$\begin{cases} y_1'(x)-y_2(x) &= e^x \\ y_2'(x)-y_1(x) &= x^2\,; \end{cases}$$

valamint

$$\begin{cases} y_1'(x)-2y_1(x)+y_2(x) &= 0 \\ y_2'(x)+2y_1(x)-y_2(x) &= 18x\,. \end{cases}$$

12. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek (vagy kezdetiérték-problémák) megoldásait:

$$\begin{aligned}
y''(x)+y'(x)-2y(x) &= 0\ ;\\
y''(x)+y'(x)-2y(x) &= 30e^{3x}\ ;\\
y''(x)+y'(x)-2y(x) &= -(1+2x)e^{-x}\ ;\\
2y''(x)-5y'(x)+2y(x) &= 0\ ;\\
y''(x)+4y(x) &= 0\ ;\\
y''(x)+4y(x) &= 8\ ;\\
y''(x)+4y(x) &= 2\cos x+3x\sin x\ ;\\
y'''(x)+y''(x)-4y'(x)-4y(x) &= 0\ ;\\
y'''(x)-8y(x) &= 0\ ;\\
y^{(4)}(x)-5y''(x)+4y(x) &= 0\ ;\\
y^{(4)}(x)+2y''(x)+y(x) &= 0\ ;\\
y''(x)-2y'(x)+y(x) &= 0\ ,\quad y(2)=1\ ,\quad y'(2)=-2\ ;\\
y''(x)-2y'(x)+y(x) &= \frac{e^x}{x}\ ;\\
y''(x)-2y'(x) &= 2e^x\ ,\quad y(1)=-1\ ,\quad y'(1)=0\ ;\\
x^2y''(x)-4xy'(x)+6y(x) &= 0\ ;\\
x^2y''(x)-xy'(x)+y(x) &= 8x^3\ .
\end{aligned}$$

13. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek összes megoldását annak ismeretében, hogy adott egy y_1 megoldásuk:

$$\begin{aligned}
x^2(x+1)y''(x)-2y(x) &= 0\ ,\quad y_1(x)=1+\frac{1}{x}\ ;\\
(e^x+1)y''(x)-2y'(x)-e^xy(x) &= 0\ ,\quad y_1(x)=e^x-1\ ;\\
x(x+4)y''(x)-(2x+4)y'(x)+2y(x) &= 0\ ,\quad y_1\ \text{másodfokú polinom.}
\end{aligned}$$

14. Meghatározandó az az $x\in\mathcal{C}^2([1,2])$ függvény, amelyre $x(1)=5\,,\ \ x(2)=4\,,$ és ezen feltételek mellett

$$\int_1^2\left(\frac{(x(t))^2}{t}+t(x'(t))^2\right)dt$$

minimális.

A felkészüléshez ajánlott jegyzetek

[Laj] Lajkó Károly: Differenciálegyenletek (DE Mat. és Inf. Int., 2002).

[Szaz] Száz Árpád: Elemi útom megoldható differenciálegyenletek (Debreceni Egyetem, 1988, 2001).

Dr. Lajkó Károly jegyzete elektronikus formában elérhető a
`http://zeus.nyf.hu/~mattan/faliujsag/lajko/` web-oldalon.

További ajánlott irodalom:

[Arn] V. I. Arnold: Közönséges differenciálegyenletek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

[Fil] A. F. Filippov: Differenciálegyenletek példatár, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.

[Kam] E. Kamke: Differentialgleichungen I. Gewöhnliche Differentialgleichungen, Leipzig, 1952.

[Kos] Kósa András: Differenciálegyenletek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986. (17. kiadás)

[KSS] Kósa András, Schipp Ferenc, Szabó Dániel: Közönséges differenciálegyenletek I, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[Sch] Scharnitzky Viktor: Differenciálegyenletek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

A tananyag számonkérése

A tantárgy teljesítéséhez gyakorlati és kollokviumi jegyet kell szerezni.

A gyakorlat teljesítése:

A gyakorlati jegy megszerzéséhez két dolgozatot kell megírni (ez alól a hiányzás igazolása sem mentesít, igazolt távolmaradás esetén pótdolgozat írandó). Dolgozatonként az alapfeladatokból legfeljebb 15 pont, összesen maximum 30 pont szerezhető. A gyakorlatokon új vagy nehezebb feladatok megoldásának bemutatásáért a gyakorlatvezető a hallgatónak a félév folyamán összesen legfeljebb 10 szorgalmi pontot adhat, amit a gyakorlati jegy megállapításakor hozzáadunk a dolgozatok összpontszámához. A dolgozatban szorgalmi feladatként adott problémák kidolgozásáért szerezhető többletpontok a dolgozat pontszámába beszámítandók (így egy-egy dolgozat pontszáma meghaladhatja a 15 pontot).

Egy kevésbé sikeres dolgozatot újraírni a szorgalmi időszak utolsó hetében lehet.

A gyakorlati jegy megállapítása:

0	—	14	pont	...	1
15	—	17	pont	...	2
18	—	21	pont	...	3
22	—	25	pont	...	4
26	—	30+	pont	...	5

Bevezetés a közönséges differenciálegyenletek elméletébe

1. mintadolgozat

2019. október 24., csütörtök 16:00, M 315-ös terem

Az alábbi feladatok összpontszáma 15 , megoldási idő 90 perc. Tankönyv, jegyzet nem használható.

FELADATOK

1. Oldjuk meg az
$$(x^2-1)y'(x)+2x(y(x))^2=0\,,\ y(0)=1$$
kezdetiérték-feladatot! *(2 pont)*

2. Oldjuk meg az
$$y'(x)=\frac{x+y(x)}{x-y(x)}$$
differenciálegyenletet! *(3 pont)*

3. Oldjuk meg az
$$xy'(x)-(x+1)y(x)=-4x^3e^{-x}(y(x))^2 \qquad (x>0)$$
(Bernoulli-féle) differenciálegyenletet! *(5 pont)*

4. Az y változó egy függvényével végigszorozva tegyük egzakttá és oldjuk meg az
$$xy(x)=\left((y(x))^3+x^2y(x)+x^2\right)y'(x)$$
differenciálegyenletet! *(5 pont)*

5. *Szorgalmi feladat*: Meghatározandó az
$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(x+\operatorname{arsh}(x)-(y(x))^3\right)\ln\left((y(x))^4-(y(x))^2+1\right)\,, \\ y(3) &= 1 \end{aligned}$$
Cauchy-feladat teljes megoldása. *(4 pont)*

Bevezetés a közönséges differenciálegyenletek elméletébe

2. mintadolgozat

2019. december 5., csütörtök 16:00, M 315-ös terem

Az alábbi feladatok összpontszáma 15 , megoldási idő 90 perc. Tankönyv, jegyzet nem használható.

Feladatok

1. Oldjuk meg az
$$(y'(x))^2 + 2y(x)y''(x) = 0$$
hiányos másodrendű differenciálegyenletet! *(3 pont)*

2. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatot:
$$\begin{aligned} y_1'(x) - 5y_1(x) - 2y_2(x) &= 0\,, \quad y_1(0) = -1 \\ y_2'(x) + 8y_1(x) + 3y_2(x) &= e^x\,, \; y_2(0) = 1 \end{aligned}$$
$\longrightarrow$ *(5 pont)*

3. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek megoldásait:
(a) $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0$
(b) $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = e^{4x}$
(c) $x^2y''(x) - xy'(x) - 3y(x) = 0 \quad (x > 0)$
$\longrightarrow$ *(3 + 2 + 2 = 7 pont)*

4. *Szorgalmi feladat*: Határozzuk meg a
$$(2x+1)y''(x) + 4xy'(x) - 4y(x) = 0$$
differenciálegyenlet összes megoldását annak ismeretében, hogy van nem azonosan nulla polinom megoldása (is)! *(5 pont)*

Az elméleti vizsga teljesítése:

A kollokvium szóbeli, tételhúzással, írásbeli felkészüléssel. A tételsor ezen tájékoztató utolsó oldalán található.

A tétel kidolgozása során a bizonyítások leírására vagy felvázolására (majd részletesebb szóbeli ismertetésére) is törekedjenek! Természetesen a hosszabb, összetettebb bizonyítások ismerete csak a jeles illetve (részben) a jó érdemjegy megszerzéséhez követelhető meg. A vizsga során a felkészültség minél pontosabb felmérése érdekében a kihúzott tétel áttekintése mellett a tananyag más részeiből (a többi tétel anyagából) is kapnak kérdéseket (fogalmakra, alapvető tételekre vonatkozóan).

Alapvető fogalmak és tételek

A felsorolás csak a legalapvetőbb ismereteket tartalmazza, amelyeket kérdésre felkészülés nélkül is tudni kell ismertetni a vizsgán. Az egyes vizsgatételek kidolgozása során számos további fogalom és tétel ismerete is alapkövetelmény.

Alapvető definíciók:

Közönséges differenciálegyenlet, kezdetiérték-probléma (Cauchy-feladat); megoldás.

Egzakt differenciálegyenlet.

Kezdetiérték-probléma teljes megoldása. Normál egyenlet.

Homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer alaprendszere, alapmátrixa; magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenlet alaprendszere; Wronski-determináns.

Magasabbrendű állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus polinomja.

Megengedett irány, Gâteaux-féle iránymenti derivált.

Alaptételek:

Nemkiterjeszthető megoldás létezése.

Átviteli elv.

Picard–Lindelöf-tétel; normál egyenletre vonatkozó Cauchy-feladat megoldhatósága.

Az elsőrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó Cauchy-feladat globális megoldhatósága.

Lineáris differenciálegyenlet(-rendszer)ek megoldáshalmazának struktúrája. (Abel–)Liouville-tétel.

Magasabb rendű állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet alaprendszere.

Euler–Lagrange-tétel.

Bevezetés a közönséges differenciálegyenletek elméletébe
[illetve: Közönséges differenciálegyenletek]

VIZSGATÉTELEK

1. A közönséges differenciálegyenletek elméletének alapfogalmai (kezdetiérték-probléma / Cauchy feladat, nemkiterjeszthető megoldás, teljes megoldás). Az átviteli elv.

2. Elemi úton megoldható differenciálegyenletek alap-típusai (szétválasztható változójú differenciálegyenlet, lineáris skalár-differenciálegyenlet, egzakt egyenlet).

3. A Cauchy-feladattal ekvivalens integrálegyenlet. Egzisztencia és unicitási tétel elsőrendű explicit vektor-differenciálegyenletre vonatkozó Cauchy-feladatra.

4. A normál egyenletre vonatkozó Cauchy-feladat teljes megoldásának létezése és tulajdonságai.

5. Diszkrét approximáció: az Euler-féle töröttvonal-módszer. A Cauchy–Peano-féle egzisztencia-tétel.

6. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek (Cauchy-feladat teljes megoldása, homogén egyenletrendszer alaprendszere, alapmátrixa, Abel–Liouville-tétel, konstans-variálás).

7. Mátrixok egész függvényei, az állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer alapmátrixa.

8. Stabilitás és aszimptotikus stabilitás fogalma. Ljapunov stabilitási tétele.

9. Magasabbrendű lineáris skalár-differenciálegyenletek (a homogén egyenlet alaprendszere, Wronski-determináns, Liouville-tétel, konstans-variálás).

10. Magasabbrendű állandó együtthatós homogén lineáris skalár-differenciálegyenletek alaprendszere (karakterisztikus polinom, komplex illetve valós alaprendszer).

11. A variációszámítás alapfeladata, Euler–Lagrange differenciálegyenletek.