Tájékoztató a

Differenciál- és integrálszámítás

tárgy 2018/2019. tanév I. félévi kurzusairól és számonkéréséről

Az előadások és gyakorlatok időpontja, tematikája

Az előadás *kódja*(i): TTMBE0203, TMOE0207, TTMBE0813;
heti óraszáma: 3, *kreditértéke*: 4.

Az előadás időpontja: kedd 13.00–15.40 (közte 10 perc szünet k.b. 14.15–14.25);
— *helyszíne*: Matematikai és Földtudományi Épület M 426 tanterem.

Előadó: Boros Zoltán (*e-mail*: `zboros@science.unideb.hu`)

Az előadások dátuma (2018-ban) **és tervezett tematikája:**

szeptember 11.: Függvény-határérték fogalma, kapcsolata a folytonossággal. Átviteli elv. Valós értékű függvények határértékének kapcsolata a műveletekkel és a rendezéssel.

szeptember 18.: További határérték-fogalmak valós függvényekre: egyoldali határértékek, végtelenben vett határtétékek, végtelen határértékek. Az átviteli elv ezekhez illeszkedő változatai. Szakadási helyek osztályozása. Monoton függvények határérték-tulajdonságai.

szeptember 25.: Valós függvények differenciálhányadosa. Lineáris approximáció. Differenciálhatóság és folytonosság. Deriválási szabályok alapműveletekre. Az összetett függvény deriváltja. Az inverz függvény deriváltja. Hatványsor összegfüggvényének differenciálhatósága.

október 2.: Valós differenciálható függvények vizsgálata (I. rész: szélsőérték-helyek, középérték-tételek, monotonitás, L'Hospital-szabály).

október 9.: Valós differenciálható függvények vizsgálata (II. rész: konvexitás). Az elemi függvények és differenciálhányadosaik. Egyes elemi függvények (hatványok, exponenciális és trigonometrikus függvények, valamint inverzeik) vizsgálata (*részben a gyakorlatokon*). A π bevezetése.

október 16.: Valós függvények magasabb rendű deriváltjai, Leibniz-szabály, Taylor-tétel, a lokális szélsőérték elegendő feltétele.

november 6.: Primitív függvény, határozatlan integrál. Integrálási szabályok (linearitás; parciális és helyettesítéses integrálás). Integrálási módszerek.

november 13.: A racionális törtfüggvények integrálása (parciális törtek). Racionalizáló helyettesítések.

november 20.: A Riemann-integrál fogalma. A Newton–Leibniz-formula. A Riemann-integrálhatóság Riemann-kritériuma. Folytonos illetve monoton függvények integrálhatósága. A Riemann-integrál intervallum-additivitása. Korlátos, véges sok pont kivételével folytonos függvény integrálhatósága. Az integrál linearitása.

november 27.: Egyenlőtlenségek, középérték-tételek Riemann-integrálra. Az integrál, mint a felső határ függvénye. Parciális és helyettesítéses integrálás. Improprius-integrálok.

december 4.: Improprius-integrálok konvergenciájának elegendő feltételei. $\sum f(n)$ és $\int_1^\infty f$ konvergenciája pozitív, csökkenő f függvényre. Az integrál alkalmazásai (ívhossz; görbe alatti terület; forgástestek felszíne, térfogata). A trigonometrikus függvények geometriai interpretációja.

december 11.: Függvénysorozatok és -sorok tagonkénti integrálhatósága és differenciálhatósága. A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-kritériuma. Integrálható függvények folytonos transzformáltjai integrálhatók.

A gyakorlatok órarendje és dátumai:

1. csoport (matematika) *kódja*: TTMBG0203, *heti óraszáma*: 3, *kreditértéke*: 3.
— *gyakorlatvezető*: Molnár Gábor Marcell
— *időpont, tanterem*: kedd 9.00–11.40 (10 perc szünettel), M 315
— *dátumok*: szeptember 11., 18., 25., október 2., 9., 16.,
november 6., 13., 20., 27., december 4., 11.

2. csoport (matematika) *kódja*: TMOG0207, *heti óraszáma*: 3, *kreditértéke*: 3.
— *gyakorlatvezető*: Boros Zoltán
— *időpont, tanterem*: szerda 16.00–18.40 (10 perc szünettel), M 317
— *dátumok*: szeptember 12., 19., október 3., 10., 17., 24.,
november 7., 14., 21., 28., december 5., 12.

3. csoport (fizika) *kódja*: TTMBG0813, *heti óraszáma*: 2, *kreditértéke*: 2.
— *gyakorlatvezető*: Molnár Gábor Marcell
— *időpont, tanterem*: csütörtök 14.00–15.40, M 205
— *dátumok*: szeptember 13., 20., 27., október 4., 11., 18., 25.,
november 8., 15., 22., 29., december 6., 13.

A gyakorlatokon az előadáson bemutatott ismeretek alkalmazását szemléltető feladatokat oldunk meg. Az egyes gyakorlatok feladatsorait a gyakorlatvezetők jelölik ki. Javasolt az alább felsorolt jegyzetek és példatárak (a tárgyalt témakörhöz tartozó) feladatainak megoldása.

A felkészüléshez ajánlott jegyzetek

A gyakorlatokra és a vizsgára legegyszerűbben minden hallgató az előadásokon és a gyakorlatokon készített saját jegyzeteiből készülhet fel. Ezek kiegészítésére javasoltak az alábbiak:

[BM-Ap] Bessenyei Mihály: Analízis Példatár (DE Mat. Int., 2014) http://math.unideb.hu/media/bessenyei-mihaly/downloads/analex.pdf

[L-A1] Lajkó Károly: Analízis I. (KLTE Mat. és Inf. Int., 1998)

[L-A2] Lajkó Károly: Analízis II. (KLTE Mat. és Inf. Int., 1999)

[L-K1] Lajkó Károly: Kalkulus I. (DE Mat. Int., 2003)

[L-K1p] Lajkó Károly: Kalkulus I. példatár (DE Inf. Int., 2004)

[L-K2] Lajkó Károly: Kalkulus II. (DE Mat. Int., 2005)

[L-K2p] Lajkó Károly: Kalkulus II. példatár (DE Inf. Int., 2004)

[Sze] Székelyhidi László: Differenciál- és integrálszámítás [*A felsőbb analízis útjain*] (Palotadoktor Bt., 2009.)

Dr. Lajkó Károly felsorolt jegyzetei elektronikus formában elérhetők a http://zeus.nyf.hu/∼mattan/faliujsag/lajko/ web-oldalon.

További ajánlott irodalom:

[Fis] Emanuel Fischer: Intermediate Real Analysis. Springer-Verlag, New York ∘ Heidelberg ∘ Berlin, 1983.

[Rud] Walter Rudin: A matematikai analízis alapjai. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1978.

A tananyag számonkérése

A tantárgy teljesítéséhez gyakorlati és kollokviumi jegyet kell szerezni. A korábban ebből a tantárgyból megszerzett gyakorlati jegyek természetesen érvényesek.

A gyakorlat teljesítése:

A gyakorlatok tananyagát a gyakorlatvezetők határozzák meg; javasolt tananyag a [**BM-Ap**] példatárban [116–119., 130–176. feladat (17., 19–26. old.)], a [**L-A1**] jegyzet VII. fejezetében, a [**L-A2**] jegyzetben, valamint a [**L-K1p**] példatár II. kötetében (a VII–VIII. fejezetben) és a [**L-K2p**] példatár I. fejezetében található feladatok (ezek — az előadások és a gyakorlatok tematikája szerint haladva — abban az esetben is házi feladatnak tekintendők, ha a gyakorlatvezető nem jelöl ki gyakorló feladatokat), valamint a példatárakban található mintamegoldások. A fizika szakosok gyakorlatán lényegesen kevesebb elméletibb jellegű (a definíciók és korábbi tételek kreatív alkalmazásával megoldható, kevés számolást igénylő) feladat tárgyalandó, ezek helyett inkább a számolási készséget fejlesztő, gyakorlati jellegű feladatokat kell megoldani. Ez a sajátosság a számonkérésben is érvényesítendő.

A gyakorlatokon az aktív (!) részvétel kötelező (a gyakorlatvezetők a gyakorlatokon rendszeresen bevonják a feladatok megoldásába a jelenlévő hallgatókat és nyilvántartják a hiányzásokat; háromnál több igazolatlan hiányzás esetén — illetve abban az esetben, ha a hallgató felkészületlensége miatt több esetben nem tud vagy nem akar közreműködni a feladatok megoldásában — megtagadják az aláírást). A gyakorlati jegy megszerzéséhez két dolgozatot kell megírni (ez alól a hiányzás igazolása sem mentesít, igazolt távolmaradás esetén pótdolgozat írandó). Dolgozatonként legfeljebb 25 pont, összesen maximum 50 pont szerezhető. A gyakorlatokon új vagy nehezebb feladatok megoldásának bemutatásáért a gyakorlatvezető a hallgatónak a félév folyamán összesen legfeljebb 10 szorgalmi pontot adhat, amit a gyakorlati jegy megállapításakor hozzáadunk a dolgozatok összpontszámához.

A dolgozatban szorgalmi feladatként adott problémák kidolgozásáért szerezhető többletpontok a dolgozat pontszámába beszámítanak (így akár 25 feletti pontszám is elérhető). A dolgozatokat a gyakorlatokon, a gyakorlatvezető által bejelentett időpontban, az első dolgozatot október 25. és november 8. között (valószínűleg a keddi csoportban november 6-án, a szerdai csoportban november 7-én, a csütörtöki csoportban október 25-én), a második dolgozatot december 11. és 13. között kell megírni. December 20-án délután 14:00-tól lehetőséget adunk valamelyik dolgozat újraírására vagy pótlására (bármelyik dolgozat javítható vagy pótolható, de minden hallgató — az igazolt hiányzások miatt szervezett pótlástól eltekintve — legfeljebb egy dolgozatot javíthat vagy pótolhat). Az újraírt dolgozat eredeti pontszámát töröljük és az új pontszámmal helyettesítjük (függetlenül attól, hogy melyik a nagyobb).

A felkészülést segítik a következő oldalakon található mintadolgozatok is.

A gyakorlati jegy megállapítása:

0	—	24	pont	...	1
25	—	30	pont	...	2
31	—	36	pont	...	3
37	—	43	pont	...	4
44	—	50+	pont	...	5

Differenciál- és integrálszámítás **1. mintadolgozat**

(matematika [BSc ill. tanári] szak, november 6., 7.)

Az alábbi feladatok összpontszáma 25, megoldási idő 100 perc.
Tankönyv, jegyzet nem használható.

FELADATOK

1. Meghatározandó

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+6x+8}{x^2+2x} \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{x}}{1-x^3}\,.$$

(2+2=4 pont)

2. Differenciálható-e a $\varphi(x) = \sqrt{|x|^3}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény az $x_0 = 0$ pontban? *(2 pont)*

3. Legyen

$$g(x) = \sqrt{1+x^4}\,, \quad h(x) = \arcsin\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Meghatározandók a g' és h' deriváltfüggvények. *(2+3=5 pont)*

4. Legyen

$$f(x) = x^3 e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Végezzük el az f függvény teljes vizsgálatát a következő szempontok szerint: zérushelyek (illetve előjelek); határértékek ($+\infty$-ben, $-\infty$-ben); az első és második derivált meghatározása; a függvény monoton szakaszainak és lokális szélsőérték-helyeinek meghatározása; a függvény konvex/konkáv szakaszainak és inflexiós helyeinek meghatározása; vázlatos ábrázolás; az érték-készlet meghatározása. *(14 pont)*

5. *Szorgalmi feladat*: Legyen

$$f(x) = x^2 \sin(2x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Meghatározandó $f^{(2018)}(x)$ (tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén). *(3 pont)*

6. *Szorgalmi feladat*: Meghatározandó

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg}(x)\right).$$

(3 pont)

7. *Szorgalmi feladat*: Igazolja, hogy minden $x\,,\, y \in]0\,,\, +\infty[$ és $t \in [0,1]$ esetén

$$\log_2((1-t)x + ty) \geq (1-t)\log_2 x + t\log_2 y$$

teljesül! *(4 pont)*

Differenciál- és integrálszámítás **2. mintadolgozat**

(matematika [BSc ill. tanári] szak, december 11., 12.)

Az alábbi feladatok összpontszáma 25 , megoldási idő 100 perc.
Tankönyv, jegyzet nem használható.

Feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:

$$\int \frac{x-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,dx\,, \qquad \int \left(3^{2x}-2^{3x}\right)\,dx\,, \qquad \int x\sin(x^2+\pi)\,dx \qquad \int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$$

és $\displaystyle\int \arcsin(x)\,dx\,.$

(1+2+2+3+2=10 pont)

2. Határozzuk meg az alábbi Riemann-integrálokat:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx\,, \quad \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\,, \quad \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx \quad \text{és} \quad \int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx\,.$$

(2+3+3+3=11 pont)

3. Határozzuk meg az alábbi improprius-integrálokat:

$$\int_0^{+\infty} 3^{-x}\,dx \quad \text{és} \quad \int_0^1 x\ln(x)\,dx\,.$$

(2+2=4 pont)

4. *Szorgalmi feladat*: Kiszámítandó

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)}\,dx \qquad \text{és} \qquad \int_0^{\pi} \sin^9(x)\,dx\,.$$

(3+3=6 pont)

5. *Szorgalmi feladat*: Az

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad (\,x\in[\,1\,,\,+\infty\,[\,)$$

függvény grafikonját a x tengely körül elforgatva kapunk egy nem korlátos forgástestet. Igazoljuk, hogy ennek a forgástestnek a térfogata véges (tehát adott térfogatú gyurmából tetszőlegesen hosszú darabja elkészíthető), de a felszíne végtelen (így pl. nem tudjuk lefesteni)! *(4 pont)*

Differenciál- és integrálszámítás **1. mintadolgozat**

(fizika [BSc] szak, október 25., csütörtök 14:00)

Az alábbi feladatok összpontszáma 25, megoldási idő 100 perc.
Tankönyv, jegyzet nem használható.

Feladatok

1. Meghatározandó
$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+6x+8}{x^2+2x}\qquad \text{és}\qquad \lim_{x\to 1-}\frac{\sqrt{x}}{1-x}\,.$$
(2+2=4 pont)

2. Legyen
$$F(x)=\frac{x(x+1)}{x^2+1}\,,\quad G(x)=\sqrt{1+x^4}\,,\quad H(x)=\operatorname{arctg}\left(x^3\right)\qquad (x\in\mathbb{R}).$$
Meghatározandók az F', G' és H' deriváltfüggvények. *(2+2+2=6 pont)*

3. Legyen
$$f(x)=x^3e^{-x}\qquad (x\in\mathbb{R}).$$
Végezzük el az f függvény teljes vizsgálatát a következő szempontok szerint: zérushelyek (illetve előjelek); határértékek ($+\infty$-ben, $-\infty$-ben); az első és második derivált meghatározása; a függvény monoton szakaszainak és lokális szélsőérték-helyeinek meghatározása; a függvény konvex/konkáv szakaszainak és inflexiós helyeinek meghatározása; vázlatos ábrázolás; az érték-készlet meghatározása. *(13 pont)*

4. Meghatározandó
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3^x-3^{-x}}\,.$$
(2 pont)

5. *Szorgalmi feladat*: Legyen
$$f(x)=x^2\sin(2x)\qquad (x\in\mathbb{R}).$$
Meghatározandó $f'''(x)$ (tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ esetén). *(3 pont)*

6. *Szorgalmi feladat*: Meghatározandó
$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}(x)\right).$$
(3 pont)

Differenciál- és integrálszámítás **2. mintadolgozat**
(fizika [BSc] szak, december 13., csütörtök 14:00)

Az alábbi feladatok összpontszáma 25, megoldási idő 100 perc.
Tankönyv, jegyzet nem használható.

Feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:

$$\int \frac{x-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,dx\,, \qquad \int \left(3^{2x}-2^{3x}\right)\,dx\,, \qquad \int x\sin(x^2+\pi)\,dx \qquad \int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$$

és $\displaystyle\int \arcsin(x)\,dx\,.$

(1+2+2+3+2=10 pont)

2. Határozzuk meg az alábbi Riemann-integrálokat:

$$\int_1^{16} \sqrt{x}\,dx\,, \quad \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx\,, \quad \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\,, \quad \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx \ \text{ és } \int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx\,.$$

(2+2+3+3+3=13 pont)

3. Határozzuk meg az $\displaystyle\int_0^{+\infty} 3^{-x}\,dx$ improprius-integrált! *(2 pont)*

4. *Szorgalmi feladat*: Kiszámítandó

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)}\,dx \qquad \text{és} \qquad \int_0^{\pi} \sin^3(x)\,dx\,.$$

(3+3=6 pont)

5. *Szorgalmi feladat*: Az

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad (\,x\in[\,1\,,\,+\infty\,[\,)$$

függvény grafikonját a x tengely körül elforgatva kapunk egy nem korlátos forgástestet. Igazoljuk, hogy ennek a forgástestnek a térfogata véges (tehát adott térfogatú gyurmából tetszőlegesen hosszú darabja elkészíthető), de a felszíne végtelen (így pl. nem tudjuk lefesteni)! *(4 pont)*

Az elméleti vizsga teljesítése:

A kollokvium szóbeli, tételhúzással, írásbeli felkészüléssel. A tételsor ezen tájékoztató utolsó oldalán található. A tétel kidolgozása során a bizonyítások leírására vagy felvázolására (majd részletesebb szóbeli ismertetésére) is törekedjenek! Természetesen a hosszabb, összetettebb bizonyítások ismerete csak a jeles illetve (részben) a jó érdemjegy megszerzéséhez követelhető meg. A vizsga során a felkészültség minél pontosabb felmérése érdekében a kihúzott tétel áttekintése mellett a tananyag más részeiből (a többi tétel anyagából) is kapnak kérdéseket (fogalmakra, alapvető tételekre vonatkozóan). A felkészülés folyamán különösen ügyeljenek az alább felsorolt alapvető fogalmak (definíciók) illetve tételek pontos megtanulására, mivel ezek hibátlan ismertetése (a kihúzott vizsgatétel témakörében illetve a vizsga során feltett kérdésre válaszolva) elengedhetetlen a kollokvium sikeréhez!

Alapvető fogalmak és tételek

Legalapvetőbb definíciók:

Függvény határértéke.

Függvény differenciálhatósága, differenciálhányadosa (deriváltja).

Függvény lokális minimuma, maximuma.

Primitív függvény.

Függvény Riemann-integrálhatósága, Riemann-integrálja (beleértve a szükséges segédfogalmakat és állításokat: beosztások, alsó és felső integrálközelítő összegek illetve összehasonlításuk, alsó és felső Darboux-integrálok).

További alapvető definíciók:

Határérték-fogalmak valós függvényekre.

Magasabb rendben (n-szer) differenciálható függvény (pontban, intervallumon).

Konvex (konkáv) függvény; inflexiós pont.

Integrálfüggvény (az integrál, mint a felső határ függvénye).

Alaptételek:

Átviteli elv függvény-határértékre.

Folytonosság és határérték.

Elemi függvények deriváltfüggvényei.

Deriválási szabályok (alapműveletekre, összetett függvényre, inverz függvényre).

A differenciálszámítás középérték-tételei (Rolle, Lagrange, Cauchy féle).

Alapintegrálok.

Integrálási szabályok (linearitás, parciális és helyettesítéses integrálás) határozatlan illetve határozott integrálra.

Newton–Leibniz-formula.

Integrálfüggvény (mint a felső határ függvénye) deriválása.

Differenciál- és integrálszámítás

VIZSGATÉTELEK

1. Függvény-határérték fogalma, kapcsolata a folytonossággal. Átviteli elv. Valós értékű függvények határértékének kapcsolata a műveletekkel és a rendezéssel.
2. További határérték-fogalmak valós függvényekre: egyoldali határértékek, végtelenben vett határtétékek, végtelen határértékek. Szakadási helyek osztályozása. Monoton függvények határérték-tulajdonságai.
3. Valós függvények differenciálhányadosa. Lineáris approximáció. Differenciálhatóság és folytonosság.
4. Differenciálhatóság és műveletek (alapműveletek, az összetett függvény deriváltja). A valós változós függvény inverzének deriváltja.
5. Hatványsorok differenciálhatósága. Az elemi függvények deriválása.
6. A differenciálszámítás középérték-tételei. L'Hospital-szabály.
7. Valós differenciálható függvények vizsgálata (szélsőérték-helyek, monotonitás, konvexitás).
8. Valós függvények magasabb rendű deriváltjai, Leibniz-szabály, Taylor-tétel, a lokális szélsőérték elegendő feltétele.
9. Primitív függvény, határozatlan integrál. Integrálási szabályok.
10. Racionális törtfüggvények integrálása.
11. A Riemann-integrál fogalma. Az integrál kiszámítása: Newton–Leibniz-formula.
12. A Riemann-integrálhatóság Riemann-kritériuma. Az integrálhatóság elegendő feltételei.
13. A Riemann-integrál műveleti tulajdonságai. Egyenlőtlenségek, középérték-tételek Riemann-integrálra.
14. Az integrál intervallum-additivitása. Az integrál, mint a felső határ függvénye. Parciális és helyettesítéses integrálás.
15. Improprius-integrálok.
16. Függvénysorozatok és -sorok tagonkénti integrálhatósága és differenciálhatósága.
17. Az integrál alkalmazásai (görbe alatti terület; ívhossz; forgástestek felszíne, térfogata).
18. A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-kritériuma.