A differenciálgeometria alapjai: görbék és felületek

Vincze Csaba

Debreceni Egyetem

2020. március 19.

Tartalomjegyzék

1. Felületek **1**
1.1. Az első alapmennyiségek 5
1.2. A Gauss-féle hároméI 7
1.3. Kiszámítási formulák 8
1.4. A Theorema Egregium 14
1.5. Párhuzamos eltolás, geodetikusok 16
1.6. Ortogonális paramétervonalak 17
1.6.1. A görbületi formula 18
1.6.2. Felületi görbék holonómiája 19
1.7. A Gauss-Bonnet-tétel 21

1. Felületek

Figyelembe véve a görbék paramétertartományaként szerepeltetett (korlátos) zárt intervallumokat, a felületek esetében a korlátos, zárt intervallumok Descartes-szorzataként előálló

$$T = [a, b] \times [c, d]$$

téglalap tűnik természetes választásnak paramétertartományként. Valójában a paramétertartomány elegendően sima deformációja megengedett a parametrizált felületek elméletében. Így téglalap helyett gondolhatunk például körszerű síklemezre is és hasonló a helyzet a szakirodalomban gyakran szerepeltetett normáltartományokkal [3]: a

$$\{(x, y) \mid \alpha(x) \leq y \leq \beta(x),\ a \leq x \leq b\}$$

normáltartományt az $(x, s) \longrightarrow (x, (1-s)\alpha(x)+s\beta(x))$ leképezés inverze a $T = [a, b]\times[0, 1]$ téglalapba viszi át.

1. Definíció. *A $\sigma\colon T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ leképezés reguláris parametrizált felület, ha folytonosan differenciálható, azaz előáll a paramétertartományt tartalmazó nyílt halmazon értelmezett, folytonosan differenciálható leképezés leszűkítéseként és parciális deriváltvektorai lineárisan függetlenek.*

Egy reguláris parametrizált felületet elemi felületnek nevezünk, ha invertálható, azaz a paramétertartomány különböző elemeinek képe különböző. A $\sigma\colon T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ folytonos leképezés felület, ha előáll véges sok, páronként nem átfedő elemi felület egyesítéseként.

Az elemi felület fogalma tehát továbbra is *parametrizált felület*, azaz a koordinátasík alkalmas tulajdonságú részhalmazának alkalmas tulajdonságú leképezése a koordinátatérbe. Látszólagos bonyolultsága ellenére a felület definíciója természetes követelményeket fogalmaz meg: a paramétertartomány kompaktsága és a paraméterezés folytonossága biztosítja, hogy a felületek - mint ponthalmazok - a koordinátatér kompakt részhalmazai, azaz "végesek" és egy-egy felület "kontúrja" is a felület része (topológikus zártság). Az összefüggőség és a folytonosság szemléletes jelentése, hogy minden felület egy darabból áll. A regularitási feltételnek köszönhetően pedig a paramétertartomány pontjainak megfelelő felületi pontokban az érintő éppen a $p := \sigma(u,v)$ pontra illeszkedő és a $D_1\sigma(u,v) \times D_2\sigma(u,v)$ normálvekorú sík. A paramétertartomány mérhetősége (véges területmérték) a paraméterezésre vonatkozó kikötésekkel együtt maga után vonja, hogy a felületek is mérhetők, azaz rendelkeznek (véges) felszínmértékkel. Mivel egy felület véges sok, nem átfedő elemi felület egyesítése, ezért a teljes felszín összegzéssel határozható meg az elemi felületekre vonatkozó

$$A(\sigma) = \int_T |D_1\sigma \times D_2\sigma|(u,v)\, du\, dv$$

képlet alapján.

2. Definíció. *Egy $\sigma\colon T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ felület felszínén az*

$$A(\sigma) := \sum_{i=1}^{m} \int_{T_i} |D_1\sigma_i \times D_2\sigma_i|(u,v)\, du\, dv$$

összeget értjük, ahol $T_1, T_2, \ldots, T_m$ a paramétertartomány közös belső pont nélküli téglalapok uniójaként való előállítása úgy, hogy $\sigma_i := \sigma|_{T_i}$ elemi felület bármely $i \in \{1, 2, \ldots m\}$ index esetén. Elemi felületekre

$$A(\sigma) = \int_T |D_1\sigma \times D_2\sigma|(u,v)\, du\, dv.$$

Felületek például a(z)

(i) $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}$ bázisvektorok átal kifeszített paralelepipedon lapjai:

$$\sigma_{\mathbf{vw}}\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \sigma_{\mathbf{vw}}(u,v) := u\mathbf{v} + v\mathbf{w},$$

$$\sigma_{\mathbf{wz}}\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \sigma_{\mathbf{wz}}(u,v) := u\mathbf{w} + v\mathbf{z},$$

$$\sigma_{\mathbf{vz}}\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \sigma_{\mathbf{vz}}(u,v) := u\mathbf{v} + v\mathbf{z},$$

(ii) hengerpalást

$$\sigma\colon [0, 2\pi] \times [0, m] \to \mathbb{R}^3, \quad \sigma(u,v) := (r\cos u, r\sin u, v),$$

ahol $r > 0$ és $m > 0$ rögzített konstansok,

(iii) kúppalást

$$\sigma\colon [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3, \quad \sigma(u,v) := v(r\cos u, r\sin u, m),$$

ahol $r > 0$ és $m > 0$ rögzített konstansok.

1. Megjegyzés. A kúppalást fenti paraméterezése túlmutat az eddigi felületfogalom keretein, ugyanis a kúp $(0,0)$ paraméterű csúcspontja szingularitás:

$$D_1\sigma \times D_2\sigma(0,0) = \mathbf{0}.$$

Ezen segít, ha a paramétertartomány határpontjaiban eltekintünk regularitási feltételek előírásától [3] és csupán a folytonosság követelményét tartjuk meg. Cserébe viszont meg kell követelni (például) a parciális deriváltvektorok hosszának korlátosságát a paramétertartomány belseje fölött (a felületi integrálok létezése). Esetünkben ez automatikusan teljesül, hiszen egy folytonosan differenciálható leképezés leszűkítéséről van szó. Univerzális felületfogalom helyett tekintsük a következő fontos felületcsaládot.

Alapul véve a z-tengely körüli forgások

$$M(u) := \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

egyparaméteres csoportját, legyen

$$c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3, \quad c(v) := (x(v), 0, z(v))$$

egy görbe úgy, hogy $x(v) > 0$, legalábbis a paramétertartomány véges sok elemétől eltekintve (ld. pl. a forgáskúp esetét). A $\sigma(u,v) := M(u)c(v)$ képlettel definiált felületeket forgásfelületeknek nevezzük.

1. Feladat. Milyen alakzat paraméteres előállítása

$$\sigma(u,v) := ((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v).$$

Megoldás:

$$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R + r\cos v \\ 0 \\ r\sin v \end{pmatrix},$$

azaz az xz-koordinátasíkban fekvő, $(R,0,0)$ középpontú, r sugarú kör megforgatottja a z-tengely körül, az ún. tórusz.

2. Feladat. Vezesse le a forgásfelületek felszínének kiszámítására vonatkozó képletet.

Megoldás:

$$D_1\sigma(u,v) = M'(u)c(v) = \begin{pmatrix} -\sin u & -\cos u & 0 \\ \cos u & -\sin u & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(v) \\ 0 \\ z(v) \end{pmatrix} = (-x(v)\sin u, x(v)\cos u, 0),$$

$$D_2\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(v) \\ 0 \\ z'(v) \end{pmatrix} = (x'(v)\cos u, x'(v)\sin u, z'(v)),$$

ahonnan

$$D_1\sigma \times D_2\sigma(u,v) = (x(v)z'(v)\cos u, x(v)z'(v)\sin u, -x(v)x'(v)),$$

$$|D_1\sigma \times D_2\sigma|(u,v) = x(v)|c'(v)|,$$

figyelembe véve, hogy $x(v) \geq 0$. Kapjuk tehát, hogy

$$\int_T |D_1\sigma \times D_2\sigma|(u,v)\,du\,dv = 2\pi \int_a^b x(v)|c'(v)|\,dv.$$

Ha a profilgörbe egy függvény gráfjaként megadható ún. Euler-Monge-féle $c(v) = (f(v), 0, v)$ paraméterezéssel, akkor

$$\int_T |D_1\sigma \times D_2\sigma|(u,v)\,du\,dv = 2\pi \int_a^b f(v)\sqrt{1+f'(v)^2}\,dv.$$

3. Feladat. Számítsa ki a $\sigma\colon [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$,

$$\sigma(u,v) := (r\cos u\cos v, r\sin u\cos v, r\sin v)$$

paraméterezéssel adott gömbfelület, továbbá a kúp- és a hengerpalást felszínét.

Megoldás: a gömbfelület esetében

$$D_1\sigma(u,v) = r(-\sin u\cos v, \cos u\cos v, 0),$$

$$D_2\sigma(u,v) = r(-\cos u\sin v, -\sin u\sin v, \cos v),$$

vektoriális szorzatuk pedig

$$D_1\sigma \times D_2\sigma(u,v) = r^2(\cos u\cos^2 v, \sin u\cos^2 v, \sin v\cos v),$$

$$|D_1\sigma \times D_2\sigma|(u,v) = r^2\cos v,$$

figyelembe véve, hogy $\cos v \geq 0$, ha $v \in [-\pi/2, \pi/2]$. Következésképpen

$$\int_T |D_1\sigma \times D_2\sigma|(u,v)\,du\,dv = 2r^2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v\,dv = 2r^2\pi\,[\sin v]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4r^2\pi.$$

Alapul véve a kúppalást

$$\sigma\colon [0, 2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \sigma(u,v) := v(r\cos u, r\sin u, m)$$

paraméterezését,

$$D_1\sigma(u,v) = v(-r\sin u, r\cos u, 0),$$

$$D_2\sigma(u,v) = (r\cos u, r\sin u, m),$$

vektoriális szorzatuk pedig

$$D_1\sigma \times D_2\sigma(u,v) = v(mr\cos u, mr\sin u, -r^2) = vr(m\cos u, m\sin u, -r),$$

$$|D_1\sigma \times D_2\sigma|(u,v) = vr\sqrt{m^2+r^2}.$$

Következésképpen

$$\int_T |D_1\sigma \times D_2\sigma|(u,v)\,du\,dv = \pi r\sqrt{m^2+r^2}.$$

Végül pedig a hengerpalást

$$\sigma\colon [0,2\pi]\times[0,m]\to\mathbb{R}^3,\quad \sigma(u,v):=(r\cos u, r\sin u, v)$$

paraméterezéséből kiindulva

$$D_1\sigma(u,v)=(-r\sin u, r\cos u, 0),$$
$$D_2\sigma(u,v)=(0,0,1),$$

vektoriális szorzatuk pedig

$$D_1\sigma\times D_2\sigma(u,v)=r(\cos u,\sin u,0),$$
$$|D_1\sigma\times D_2\sigma|(u,v)=r.$$

Következésképpen

$$\int_T |D_1\sigma\times D_2\sigma|(u,v)\,du\,dv=2\pi rm.$$

1.1. Az első alapmennyiségek

Tekintsük egy elemi felület $p=\sigma(u,v)$ pontját, ahol (u,v) a paramétertartomány belső pontja. A paraméterezéssel szemben támasztott követelmények megengedik, hogy a p pontra illeszkedő bármely felületi görbét

$$c=\sigma(c^1,c^2),\quad c(0)=p$$

alakban írhassunk fel, azaz a paramétertartományban haladó görbe σ-általi képeként, ahol $c^1(0)=u$ és $c^2(0)=v$. Mivel

$$c'(0)=c^{1\prime}(0)D_1\sigma(c^1,c^2)+c^{2\prime}(0)D_2\sigma(c^1,c^2),$$

a $p=\sigma(u,v)$ pontra illeszkedő és a $D_1\sigma(u,v)$, $D_2\sigma(u,v)$ paramétervonal-érintők által kifeszített síkot értelemszerűen tekinthetjük a felület érintősíkjának a p pontban. Az érintősík egységnormálisa

$$N(u,v):=\frac{1}{|D_1\sigma\times D_2\sigma|(u,v)}D_1\sigma\times D_2\sigma(u,v).$$

Számítsuk ki a c görbe ívhosszát a felület paraméterezésére vonatkozó c^1 és c^2 koordinátafüggvények segítségével:

$$c'(t)=c^{1\prime}(t)D_1\sigma(c^1(t),c^2(t))+c^{2\prime}(t)D_2\sigma(c^1(t),c^2(t)),$$

$$\int_a^b |c'(t)|\,dt=\int_a^b\sqrt{\sum_{i,j=1}^{2}c^{i\prime}(t)c^{j\prime}(t)\langle D_i\sigma,D_j\sigma\rangle(c^1(t),c^2(t))}\,dt.$$

Az ívhosszformulában felbukkanó

$$g_{ij}:=\langle D_i\sigma,D_j\sigma\rangle\quad(i,j=1,2)$$

függvényeket a felület első alapmennyiségeinek nevezzük. Klasszikus (Gauss-féle) jelölésekkel

$$E:=\langle D_1\sigma,D_1\sigma\rangle,\ F=\langle D_1\sigma,D_2\sigma\rangle,\ G=\langle D_2\sigma,D_2\sigma\rangle.$$

3. Definíció. *Azokat a mennyiségeket, melyek kifejezhetők az első alapmennyiségek és parciális deriváltjaik segítségével, belső geometriai mennyiségeknek nevezzük.*

4. Feladat. Bizonyítsa be, hogy $|D_1\sigma \times D_2\sigma|^2 = \det g_{ij}$.

Megoldás: a vektoriális és a skaláris szorzat geometriai értelmezéséből kiindulva

$$|D_1\sigma \times D_2\sigma|^2 = |D_1\sigma|^2|D_2\sigma|^2 \sin^2\alpha = |D_1\sigma|^2|D_2\sigma|^2(1-\cos^2\alpha) =$$

$$|D_1\sigma|^2|D_2\sigma|^2\left(1-\frac{\langle D_1\sigma, D_2\sigma\rangle^2}{|D_1\sigma|^2|D_2\sigma|^2}\right) = |D_1\sigma|^2|D_2\sigma|^2 - \langle D_1\sigma, D_2\sigma\rangle^2 = g_{11}g_{22}-g_{12}^2.$$

5. Feladat. Bizonyítsa be, hogy a gömbfelület vetítése a köré írt hengerpalástra felszíntartó leképezés - Archimédesz tétele.

Útmutatás: tegyük fel, hogy az origó középpontú egységsugarú gömbfelületről van szó, melynek a köré írt hengerpalástra való projekcióját a

$$(\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v) \longrightarrow (\cos u, \sin u, \sin v)$$

képlettel értelmezzük - vegyük észre, hogy a vetítés a z-tengelyre merőleges irányban történik és a hengerpalást

$$\sigma(u,v) := (\cos u, \sin u, \sin v)$$

paraméterezéséhez vezet. A gömb és a hengerpalást paraméterezéseihez tartozó első alapmennyiségek determinánsának egyenlősége Archimédesz tételének bizonyítását adja.

6. Feladat. Igazolja, hogy $(u,v) \longrightarrow (\cos u, \sin u, v)$ a sík távolságtaró leképezése a hengerre.

Útmutatás: Mutassa meg, hogy a szóban forgó paraméterezésnél $E=1$, $F=0$ és $G=1$.

7. Feladat. Igazolja, hogy a sztereografikus projekció a gömbfelület szögtartó leképezése a síkra.

Megoldás: a sztereografikus projekció a gömbfelület vetítése az északi pólusból az egyenlítő síkjára. Az egyszerűség kedvéért legyen egységnyi a sugár és az origó a gömb centruma, azaz egyenlítőjének egyenlete $z=0$. A gömb $P(x,y,z)$ pontjának képét a

$$(0,0,1)+t\left((x,y,z)-(0,0,1)\right) = (tx, ty, 1+t(z-1))$$

kifejezés harmadik koordinátájának eltünésével határozhatjuk meg:

$$t=\frac{1}{1-z},$$

azaz

$$u=\frac{x}{1-z},\ v=\frac{y}{1-z}$$

már az egyenlítő síkjának paraméterei. Figyelembe véve, hogy

$$x^2+y^2+z^2=1,$$

meghatározhatjuk x, y és z értékét az u és v paraméterek függvényében: az $x=(1-z)u$, $y=(1-z)v$ helyettesítésekkel

$$(u^2+v^2)(1-z)^2+z^2=1,$$

$$(u^2+v^2)(1-z)=1+z,$$

azaz

$$z=\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1},$$

következésképpen

$$x=\frac{2u}{u^2+v^2+1},\quad y=\frac{2v}{u^2+v^2+1}.$$

A gömbfelület

$$(u,v)\mapsto\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\frac{2v}{u^2+v^2+1},\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$$

paraméterezését alapul véve hosszadalmas, de lépésenként egyszerű számítás mutatja, hogy az első alapmennyiségekre a

$$g_{ij}(u,v)=\frac{4}{(u^2+v^2+1)^2}\delta_{ij}$$

összefüggés adódik, ahol δ_{ij} az ún. Kronecker-delta, melynek értéke 0 különböző indexek esetén, illetve 1, ha az indexek egybeesnek:

$$D_1\sigma(u,v)=\frac{2}{(u^2+v^2+1)^2}\left(v^2+1-u^2,-2uv,2u\right),$$

$$D_2\sigma(u,v)=\frac{2}{(u^2+v^2+1)^2}\left(-2uv,u^2+1-v^2,2v\right),$$

ahonnan

$$|D_1\sigma|^2(u,v)=|D_2\sigma|^2(u,v)=\frac{4}{(u^2+v^2+1)^2},\ \left\langle D_1\sigma,D_2\sigma\right\rangle(u,v)=0.$$

Másképp fogalmazva, az első alapmennyiségek a gömbön a sík első alapmennyiségeinek (ugyanazon) függvényszeresei. Ez azt jelenti, hogy metsző felületi görbék érintőinek a belső szorzatát a normák szorzatával osztva, ugyanazt az értéket kapjuk, mint a paramétertartomány megfelelő görbéi esetén.

1.2. A Gauss-féle háromél

A regularitási feltételeknek köszönhetően a $D_1\sigma$, $D_2\sigma$ és az N felületi egységnormális egy bázisát alkotják a térnek az elemi felület mentén. A bázisvektorok változását leíró deriváltak kifejezése - éppúgy, mint a görbeelméletben - a felületet meghatározó függvénycsaládokhoz vezet: Christoffel szimbólumok, második alapmennyiségek és a formaoperátor mátrixa. Feltéve, hogy a paraméterezés legalább kétszer folytonosan differenciálható

$$D_1D_1\sigma=\Gamma_{11}^1D_1\sigma+\Gamma_{11}^2D_2\sigma+\gamma_{11}N,$$
$$D_2D_1\sigma=\Gamma_{21}^1D_1\sigma+\Gamma_{21}^2D_2\sigma+\gamma_{21}N,$$
$$D_1D_2\sigma=\Gamma_{12}^1D_1\sigma+\Gamma_{12}^2D_2\sigma+\gamma_{12}N,$$
$$D_2D_2\sigma=\Gamma_{22}^1D_1\sigma+\Gamma_{22}^2D_2\sigma+\gamma_{22}N$$

az ún. Gauss-egyenletek, ahol a szereplő Γ_{ij}^k függvényegyütthatókat Christoffel-féle szimbólumoknak, míg a γ_{ij} függvényegyütthatókat második alapmennyiségeknek nevezzük. A parciális deriváltak felcserélhetősége miatt nyilvánvaló, hogy

$$\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k,\ \gamma_{ij}=\gamma_{ji}\quad(i,j,k=1,2).$$

Teljessé válik a kép a felületi egységnormális változását jellemző

$$D_1N = -b_1^1 D_1\sigma - b_1^2 D_2\sigma + a_1 N$$

$$D_2N = -b_2^1 D_1\sigma - b_2^2 D_2\sigma + a_2 N$$

ún. Weingarten-féle egyenletek felírásával.

1.3. Kiszámítási formulák

Tegyük fel, hogy az elemi felület paraméterezése legalább kétszer folytonosan differenciálható és tekintsük az első Gauss-egyenlet mindkét oldalának skaláris szorzatát a felülethez érintőleges $D_1\sigma$, illetve $D_2\sigma$ vektorokkal:

$$\langle D_1D_1\sigma, D_1\sigma\rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F,$$

$$\langle D_1D_1\sigma, D_2\sigma\rangle = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G.$$

A 4. Feladat eredménye szerint

$$EG - F^2 \neq 0$$

a paramétertartomány pontjaiban, ezért a két egyenletből - felhasználva a Cramer-szabályt - a Γ_{11}^1 és a Γ_{11}^2 függvények kifejezhetők E, F, G, illetve a

$$\langle D_1D_1\sigma, D_1\sigma\rangle,\ \langle D_1D_1\sigma, D_2\sigma\rangle$$

mennyiségek segítségével. Hasonló a helyzet az összes szimbólum esetében: képezzük a megfelelő egyenlet mindkét oldalának skaláris szorzatát a paramétervonal-érintőkkel.

1. Tétel. *A Christoffel-féle szimbólumok a felület belső geometriai mennyiségei.*

Bizonyítás. Tekintsük például az első Gauss-egyenletből kapott

$$\langle D_1D_1\sigma, D_1\sigma\rangle,\ \langle D_1D_1\sigma, D_2\sigma\rangle$$

mennyiségeket. A szorzatszabály alapján:

$$\langle D_1D_1\sigma, D_1\sigma\rangle = \frac{1}{2}D_1\langle D_1\sigma, D_1\sigma\rangle = \frac{1}{2}D_1E,$$

$$\langle D_1D_1\sigma, D_2\sigma\rangle = D_1\langle D_1\sigma, D_2\sigma\rangle - \langle D_1\sigma, D_1D_2\sigma\rangle =$$

$$D_1F - \langle D_1\sigma, D_2D_1\sigma\rangle = D_1F - \frac{1}{2}D_2\langle D_1\sigma, D_1\sigma\rangle = D_1F - \frac{1}{2}D_2E,$$

ahol a parciális deriválás sorrendjének cseréjénél kihasználtuk, hogy a paraméterezés legalább kétszer folytonosan differenciálható. $\square$

A második alapmennyiségek kifejezéséhez vegyük a Gauss-egyenletek skaláris szorzatát a felületi egységnormálissal:

$$\langle D_iD_j\sigma, N\rangle = \gamma_{ij} \quad (i,j = 1,2).$$

A klasszikus Gauss-féle jelöléseket követve

$$l = \langle D_1D_1\sigma, N\rangle,\ m = \langle D_1D_2\sigma, N\rangle,\ n = \langle D_2D_2\sigma, N\rangle.$$

Rátérve a Weingarten-féle egyenletekben szereplő mennyiségek meghatározására, vegyük észre először is, hogy

$$\langle D_1N, N\rangle = \langle D_2N, N\rangle = 0,$$

azaz a felületi egységnormális parciális deriváltvektorai érintőlegesek a felülethez - ez könnyen látható az

$$\langle N, N\rangle = 1$$

egyenlet parciális differenciálása segítségével. Kapjuk tehát, hogy egyenleteink a

$$D_1N = -b_1^1 D_1\sigma - b_1^2 D_2\sigma$$

$$D_2N = -b_2^1 D_1\sigma - b_2^2 D_2\sigma$$

alakra redukálódnak: $a_1 = a_2 = 0$. Véve az egyenletek skaláris szorzatát a paramétervonal-érintőkkel:

$$\langle D_1N, D_1\sigma\rangle = -b_1^1 E - b_1^2 F$$

$$\langle D_1N, D_2\sigma\rangle = -b_1^1 F - b_1^2 G,$$

illetve

$$\langle D_2N, D_1\sigma\rangle = -b_2^1 E - b_2^2 F$$

$$\langle D_2N, D_2\sigma\rangle = -b_2^1 F - b_2^2 G$$

következik, ahonnan - a Cramer-szabályt követve - a b_j^i függvényegyütthatók kifejezhetők E, F, G és a

$$\langle D_1N, D_1\sigma\rangle,\ \langle D_1N, D_2\sigma\rangle,$$

illetve

$$\langle D_2N, D_1\sigma\rangle,\ \langle D_2N, D_2\sigma\rangle$$

mennyiségek segítségével. Vegyük észre azonban azt is, hogy az

$$\langle D_i\sigma, N\rangle = 0 \quad (i = 1, 2)$$

egyenlet parciális deriválása a

$$\langle D_i\sigma, D_jN\rangle = -\langle D_iD_j\sigma, N\rangle = -\gamma_{ij}$$

összefüggésekhez vezet, azaz nem kapunk további, lényegesen különböző függvényegyütthatókat (a második alapmennyiségek -1-szeresei). A lineáris egyenletrendszereket mátrixok segítségével tömörítve,

$$\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

ahonnan

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

következik.

8. Feladat. Igazolja, hogy

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Megoldás:

$$\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Emlékeztetünk rá, hogy a felületi egységnormális parciális deriváltvektorai érintőlegesek a felülethez. Ennek az észrevételnek a birtokában azt mondhatjuk, hogy a Weingarten-féle egyenletek a felület érintősíkjának egy lineáris transzformációját írják le. A felület $p=\sigma(u,v)$ pontjában vett ún. formaoperátor az adott pontbeli érintősík

$$v=(v^1,v^2)\mapsto\begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$$

lineáris leképezése, ahol a koordináták a paramétervonal-érintőkre vonatkozóan értendők:

$$v=v^1D_1\sigma(u,v)+v^2D_2\sigma(u,v),$$

a képvektor pedig

$$(v^1b_1^1+v^2b_2^1)D_1\sigma(u,v)+(v^1b_1^2+v^2b_2^2)D_2\sigma(u,v)=(D_1\sigma(u,v),D_2\sigma(u,v))\begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}.$$

A Weingarten-féle egyenletek alapján

$$(D_1\sigma(u,v),D_2\sigma(u,v))\begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}=-\big(v^1D_1N(u,v)+v^2D_2N(u,v)\big)=-N'(u,v)\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix},$$

azaz a formaoperátor a felületi normális változásáról informál a felülethez érintőleges irányok mentén. Mivel egységvektorról van szó, a változás a vektor irányának változását jelenti, szoros kapcsolatban a felület alakjával. A formaoperátort a b_j^i mennyiségekből képzett mátrix reprezentálja a paramétervonal-érintők alkotta bázisra vonatkozóan. Mivel ez egy szimmetrikus mátrix, ezért a

$$\det\begin{pmatrix} b_1^1-\lambda & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2-\lambda \end{pmatrix}=\lambda^2-\operatorname{trace}\begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}\lambda+\det\begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}$$

karakterisztikus polinom diszkriminánsa

$$\operatorname{trace}^2\begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}-4\det\begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}=(b_1^1+b_2^2)^2-4(b_1^1b_2^2-b_1^2b_2^1)=(b_1^1-b_2^2)^2+4b_1^2b_2^1\geq 0,$$

azaz van két (esetleg egybeeső) valós gyök: κ_1 és κ_2. Ezek a gyökök a formaoperátor sajátértékei. A felületelméletben betöltött szerepükre tekintettel, a felület főgörbületeinek nevezzük őket, a hozzájuk tartozó sajátvektorok pedig az ún. főirányok.

4. Definíció. *A főgörbületek szorzatát Gauss-féle szorzatgörbületnek, számtani közepét pedig Minkowski-féle összeggörbületnek nevezzük.*

Összefoglalva az eddigieket a $\sigma\colon T\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ paraméterezéssel adott felület

- első alapmennyiségei

$$E=\langle D_1\sigma,D_1\sigma\rangle,\ F=\langle D_1\sigma,D_2\sigma\rangle,\ G=\langle D_2\sigma,D_2\sigma\rangle,$$

- második alapmennyiségei

$$l = \langle D_1 D_1 \sigma, N \rangle,\ m = \langle D_1 D_2 \sigma, N \rangle,\ n = \langle D_2 D_2 \sigma, N \rangle,$$

ahol

$$N = \frac{1}{|D_1\sigma \times D_2\sigma|} D_1\sigma \times D_2\sigma$$

a felületi egységnormális,

- formaoperátorának mátrixa

$$\begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}$$

- Gauss-görbülete a formaoperátor mátrixának determinánsa:

$$\kappa = \frac{ln - m^2}{EG - F^2},$$

- Minkowski-görbülete pedig a formaoperátor-mátrix átlósösszegének a fele:

$$H = \frac{1}{2} \frac{Gl - 2Fm + En}{EG - F^2}.$$

9. Feladat. Számítsa ki a henger és a gömb első, illetve második alapmennyiségeit, a formaoperátor mátrixát és a Gauss-görbületet.

Megoldás: a hengerpalást

$$\sigma\colon [0, 2\pi] \times [0, m] \to \mathbb{R}^3,\quad \sigma(u, v) := (r \cos u, r \sin u, v)$$

paraméterezéséből kiindulva,

$$D_1\sigma(u, v) = (-r \sin u, r \cos u, 0),\ D_2\sigma(u, v) = (0, 0, 1).$$

Az első alapmennyiségek tehát

$$E(u, v) = \langle D_1\sigma, D_1\sigma \rangle(u, v) = r^2,\ F(u, v) = \langle D_1\sigma, D_2\sigma \rangle(u, v) = 0,$$

$$G(u, v) = \langle D_2\sigma, D_2\sigma \rangle(u, v) = 1.$$

A második alapmennyiségek kiszámításához szükség van a felületi egységnormálisra:

$$D_1\sigma \times D_2\sigma(u, v) = r(\cos u, \sin u, 0),\ |D_1\sigma \times D_2\sigma|(u, v) = r,$$

$$N(u, v) = \frac{1}{|D_1\sigma \times D_2\sigma|(u, v)} D_1\sigma \times D_2\sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, 0).$$

A paraméterezés másodrendű parciális deriváltjai pedig

$$D_1 D_1 \sigma(u, v) = (-r \cos u, -r \sin u, 0),\ D_1 D_2 \sigma(u, v) = D_2 D_1 \sigma(u, v) = (0, 0, 0),$$

$$D_2D_2\sigma(u,v) = (0,0,0).$$

A második alapmennyiségek tehát

$$l(u,v) = \langle D_1D_1\sigma, N\rangle(u,v) = -r,\ m(u,v) = \langle D_1D_2\sigma, N\rangle(u,v) = 0,$$

$$n(u,v) = \langle D_2D_2\sigma, N\rangle(u,v) = 0.$$

A formaoperátor mátrixa

$$\begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ahonnan a henger Gauss-görbülete zérus. A gömb esetében tekintsük a geografikus $\sigma\colon [0,2\pi] \times [-\pi/2,\pi/2] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(u,v) := (r\cos u\cos v, r\sin u\cos v, r\sin v)$ paraméterezést:

$$D_1\sigma(u,v) = r(-\sin u\cos v, \cos u\cos v, 0),$$

$$D_2\sigma(u,v) = r(-\cos u\sin v, -\sin u\sin v, \cos v),$$

vektoriális szorzatuk pedig

$$D_1\sigma \times D_2\sigma(u,v) = r^2(\cos u\cos^2 v, \sin u\cos^2 v, \sin v\cos v),$$

$$|D_1\sigma \times D_2\sigma|(u,v) = r^2\cos v,$$

figyelembe véve, hogy $\cos v \geq 0$, ha $v \in [-\pi/2,\pi/2]$. Következésképpen

$$N(u,v) = (\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v).$$

A másodrendű parciális deriváltak pedig

$$D_1D_1\sigma(u,v) = r(-\cos u\cos v, -\sin u\cos v, 0),$$

$$D_2D_1\sigma(u,v) = D_1D_2\sigma(u,v) = r(\sin u\sin v, -\cos u\sin v, 0),$$
$$D_2D_2\sigma(u,v) = r(-\cos u\cos v, -\sin u\cos v, -\sin v).$$

Az első alapmennyiségek:

$$E(u,v) = r^2\cos^2 v,\ F(u,v) = 0,\ G(u,v) = r^2.$$

A második alapmennyiségek:

$$l(u,v) = -r\cos^2 v,\ m(u,v) = 0,\ n(u,v) = -r.$$

Mindezek alapján a formaoperátor mátrixa

$$\frac{1}{r^4\cos^2 v}\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\cos^2 v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -r\cos^2 v & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix} = -\frac{1}{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ahonnan a Gauss-görbület $1/r^2$.

A henger tehát (a síkkal egyetemben) zérus Gauss-görbületű, az egységsugarú gömb görbülete pedig konstans 1. Teljessé teszi a képet a konstans negatív görbületű parametrizált felület, az ún. pszeudoszféra:

$$\sigma(u,v) := a\,(\cos u\sin v, \sin u\sin v, \cos v + \log\tan(v/2))$$

10. Feladat. Igazolja, hogy a pszeudoszfére görbülete konstans $-1/a^2$.

Megoldás: az egyszerűség kedvéért szorítkozzunk az $a = 1$ esetre,

$$D_1\sigma(u,v) = (-\sin u \sin v, \cos u \sin v, 0),$$

$$D_2\sigma(u,v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\sin v + 1/\sin v),$$

vektoriális szorzatuk pedig

$$D_1\sigma \times D_2\sigma(u,v) = (-\cos u \sin^2 v + \cos u, -\sin u \sin^2 v + \sin u, -\sin v \cos v) =$$

$$(\cos u \cos^2 v, \sin u \cos^2 v, -\sin v \cos v)$$

$$|D_1\sigma \times D_2\sigma|(u,v) = \cos v.$$

Következésképpen

$$N(u,v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\sin v)$$

A másodrendű parciális deriváltak pedig

$$D_1D_1\sigma(u,v) = (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, 0),$$

$$D_2D_1\sigma(u,v) = D_1D_2\sigma(u,v) = (-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0),$$

$$D_2D_2\sigma(u,v) = (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, -\cos v - \cos v/\sin^2 v).$$

Az első alapmennyiségek:

$$E(u,v) = \sin^2 v,\ F(u,v) = 0,\ G(u,v) = \frac{1}{\tan^2 v}$$

A második alapmennyiségek:

$$l(u,v) = -\sin v \cos v,\ m(u,v) = 0,\ n(u,v) = \frac{1}{\tan v}.$$

A Gauss-görbület tehát

$$\kappa(u,v) = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}(u,v) = -1.$$

11. Feladat. Vezesse le a forgásfelületek Gauss-görbületére vonatkozó képletet.

Megoldás: Legyen $\sigma(u,v) = M(u)c(v)$; felhasználva a forgásfelületek felszínképletével kapcsolatos számításokat

$$D_1\sigma(u,v) = (-x(v)\sin u, x(v)\cos u, 0),$$

$$D_2\sigma(u,v) = (x'(v)\cos u, x'(v)\sin u, z'(v)),$$

ahonnan

$$D_1\sigma \times D_2\sigma(u,v) = (x(v)z'(v)\cos u, x(v)z'(v)\sin u, -x(v)x'(v)),$$

$$|D_1\sigma \times D_2\sigma|(u,v) = x(v)|c'(v)|,$$

a felületi egységnormális pedig

$$N(u,v) = \frac{1}{|c'(t)|}(z'(v)\cos u, z'(v)\sin u, -x'(v)).$$

Mivel a paraméterezés másodrendű deriváltjai

$$D_1 D_1 \sigma(u,v) = (-x(v)\cos u, -x(v)\sin u, 0),$$

$$D_1 D_2 \sigma(u,v) = D_2 D_1 \sigma(u,v) = (-x'(v)\sin u, x'(v)\cos u, 0),$$

$$D_2 D_2 \sigma(u,v) = (x''(v)\cos u, x''(v)\sin u, z''(v)),$$

azt kapjuk, hogy az első alapmennyiségek

$$E(u,v) = x^2(v),\ F(u,v) = 0,\ G(u,v) = |c'(v)|^2,$$

a második alapmennyiségek

$$l(u,v) = -\frac{1}{|c'(t)|} x(v) z'(v),\ m(u,v) = 0,\ n(u,v) = \frac{1}{|c'(t)|}\left(z'(v)x''(v) - x'(v)z''(v)\right).$$

A Gauss-görbület tehát

$$\kappa(u,v) = \frac{z'(v)\left(x'(v)z''(v) - z'(v)x''(v)\right)}{x(v)|c'(v)|^4}.$$

Ha a profilgörbe egy függvény gráfjaként megadható ún. Euler-Monge-féle $c(v) = (f(v), 0, v)$ paraméterezéssel, akkor

$$\kappa(u,v) = -\frac{f''(v)}{f(v)\left(1 + f'(v)^2\right)^2}.$$

1.4. A Theorema Egregium

A továbbiakban feltesszük, hogy az elemi felület paraméterezése legalább háromszor folytonosan differenciálható.

2. Tétel. (Theorema Egregium) *A Gauss-féle szorzatgörbület belső geometriai mennyiség.*

Bizonyítás. A Viéta-formulák alapján a főgörbületeknek, mint a karakterisztikus polinom gyökeinek a szorzata megegyezik a mátrixreprezentáns determinánsával, azaz

$$\kappa := \kappa_1 \kappa_2 = \det \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix} = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}.$$

Elegendő tehát a számlálóról belátni, hogy belső geometriai mennyiség. A Gauss-egyenletek alapján

$$\langle D_1 D_1 \sigma, D_2 D_2 \sigma \rangle = \mathcal{F}(\Gamma_{ij}^k, E, F, G) + ln,$$

$$\langle D_1 D_2 \sigma, D_1 D_2 \sigma \rangle = \mathcal{F}(\Gamma_{ij}^k, E, F, G) + m^2,$$

ahol az $\mathcal{F}$ függvény szerepe csupán annyi, hogy összegyűjti a belső geometriai mennyiségeket, beleértve pl. a Christoffel-féle szimbólumokat is. Kapjuk tehát, hogy

$$\langle D_1 D_1 \sigma, D_2 D_2 \sigma \rangle - \langle D_1 D_2 \sigma, D_1 D_2 \sigma \rangle = \mathcal{F}(\Gamma_{ij}^k, E, F, G) + ln - m^2.$$

Ha az egyenlet bal oldalán szereplő mennyiségek belső geometriaiak, akkor készen vagyunk. A szorzatszabály alkalmazásával

$$\langle D_1 D_1 \sigma, D_2 D_2 \sigma \rangle = D_1 \langle D_1 \sigma, D_2 D_2 \sigma \rangle - \langle D_1 \sigma, D_1 D_2 D_2 \sigma \rangle = D_1 \langle D_1 \sigma, D_2 D_2 \sigma \rangle - \langle D_1 \sigma, D_2 D_2 D_1 \sigma \rangle =$$

$$D_1\left(D_2\langle D_1\sigma, D_2\sigma\rangle - \langle D_2D_1\sigma, D_2\sigma\rangle\right) - D_2\langle D_1\sigma, D_2D_1\sigma\rangle + \langle D_2D_1\sigma, D_2D_1\sigma\rangle =$$
$$D_1\left(D_2\langle D_1\sigma, D_2\sigma\rangle - \langle D_1D_2\sigma, D_2\sigma\rangle\right) - D_2\langle D_1\sigma, D_2D_1\sigma\rangle + \langle D_1D_2\sigma, D_1D_2\sigma\rangle,$$

ahonnan

$$\langle D_1D_1\sigma, D_2D_2\sigma\rangle - \langle D_1D_2\sigma, D_1D_2\sigma\rangle =$$
$$D_1\left(D_2\langle D_1\sigma, D_2\sigma\rangle - \langle D_1D_2\sigma, D_2\sigma\rangle\right) - D_2\langle D_1\sigma, D_2D_1\sigma\rangle =$$
$$D_1\left(D_2F - \frac{1}{2}D_1G\right) - \frac{1}{2}D_2D_2E,$$

amivel a bizonyítás teljes. Jegyezzük meg, hogy a parciális deriváltak sorrendjének szabad kezelésekor a (legalább háromszori) folytonos differenciálhatóságra támaszkodunk. □

A Theorema Egregium egyik következménye hogy amennyiben két felület izometrikusan (távolságtartóan) egymásra képezhető, akkor Gauss-görbületük megegyezik. Komponálva ugyanis az egyik felület paraméterezését a távolságtartó leképezéssel, a másik felület olyan paraméterezését kapjuk, mely megőrzi az első alapmennyiségeket, következésképpen a görbület a távolságtartó leképezések invariánsa. A kontrapozíció elve alapján tehát a gömb mégoly kis darabja sem képezhető le távolságtartóan a síkra, hiszen a gömb konstans pozitív, míg a sík azonosan nulla görbületű. Szerephez jut a tétel a felületelmélet fő eredményének megfogalmazásakor is [4]. Legyen ugyanis E, F és G, illetve l, m és n adott úgy, hogy $EG - F^2 > 0$ és érvényes a Theorema Egregium. Ha

$$D_2l - D_1m = \Gamma_{12}^1 l + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)m - \Gamma_{11}^2 n \tag{3}$$

és

$$D_1n - D_2m = \Gamma_{12}^2 n + (\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2)m - \Gamma_{22}^1 l, \tag{4}$$

akkor izometriától eltekintve egy és csak egy olyan elemi felület létezik, melynek a megadott függvények az első, illetve második alapmennyiségei. A differenciálegyenlet-rendszerként felfogott Gauss- és Weingarten-egyenletek (3) és (4) ún. integrálhatósági feltételeit Mainardi-Codazzi egyenleteknek nevezzük.

12. Feladat. Igazolja, hogy a Mainardi-Codazzi egyenletek szükséges feltételek.

Útmutatás. Tekintettel a második alapmennyiségek kiszámítási formuláira

$$D_2l - D_1m = D_2\langle D_1D_1\sigma, N\rangle - D_1\langle D_1D_2\sigma, N\rangle =$$
$$\langle D_2D_1D_1\sigma, N\rangle + \langle D_1D_1\sigma, D_2N\rangle - \langle D_1D_1D_2\sigma, N\rangle - \langle D_1D_2\sigma, D_1N\rangle =$$
$$\langle D_1D_1\sigma, D_2N\rangle - \langle D_1D_2\sigma, D_1N\rangle.$$

Mivel az egységnormális parciális deriváltjai érintőlegesek a felülethez, a Gauss-egyenleteknek csupán a Christoffel-szimbólumokat tartalmazó részére van szükségünk:

$$\langle D_1D_1\sigma, D_2N\rangle - \langle D_1D_2\sigma, D_1N\rangle = \Gamma_{11}^1\langle D_1\sigma, D_2N\rangle + \Gamma_{11}^2\langle D_2\sigma, D_2N\rangle - \Gamma_{12}^1\langle D_1\sigma, D_1N\rangle - \Gamma_{12}^2\langle D_2\sigma, D_1N\rangle,$$

ahol

$$\langle D_i\sigma, D_jN\rangle = -\langle D_iD_j\sigma, N\rangle = -\gamma_{ij} \quad (i,j = 1,2)$$

miatt következik (3).

1.5. Párhuzamos eltolás, geodetikusok

Tekintsünk egy c görbét az elemi felületen, melynek a paraméterezésre vonatkozó koordinátafüggvényei c^1 és c^2, azaz $c = \sigma(c^1, c^2)$ és legyen

$$X(t) = X^1(t)D_1\sigma(c^1(t), c^2(t)) + X^2(t)D_2\sigma(c^1(t), c^2(t)) \tag{5}$$

egy a felülethez érintőleges vektormező a c görbe mentén.

5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy X párhuzamos vektormező a c görbe mentén, ha deriváltvektormezője merőleges a felületre. A párhuzamos vektormezők különböző paraméterekhez tartozó vektorait egymás párhuzamos eltoltjainak nevezzük. Egy görbe geodetikus, ha deriváltgörbéje párhuzamos vektormező.*

A vektormező (5) koordinátakifejezését differenciálva

$$X'(t) = X^{1'}(t)D_1\sigma(c^1(t), c^2(t)) + X^{2'}(t)D_2\sigma(c^1(t), c^2(t)) + X^1(t)c^{1'}(t)D_1D_1\sigma(c^1(t), c^2(t)) +$$

$$X^1(t)c^{2'}(t)D_2D_1\sigma(c^1(t), c^2(t)) + X^2(t)c^{1'}(t)D_1D_2\sigma(c^1(t), c^2(t)) + X^1(t)c^{2'}(t)D_2D_2\sigma(c^1(t), c^2(t))$$

adódik. A Gauss-egyenletek alapján

$$X'(t) = \left(X^{1'}(t) + \sum_{i,j=1}^{2} X^i(t)c^{j'}(t)\Gamma^1_{ij}(c^1(t), c^2(t))\right) D_1\sigma(c^1(t), c^2(t)) +$$

$$\left(X^{2'}(t) + \sum_{i,j=1}^{2} X^i(t)c^{j'}(t)\Gamma^2_{ij}(c^1(t), c^2(t))\right) D_2\sigma(c^1(t), c^2(t)) + \mathcal{L}(N)$$

adódik, ahol a $\mathcal{L}$ függvény szerepe csupán annyi, hogy összegyűjti a felületre merőleges komponenseket. Nyilvánvaló, hogy a vektormező pontosan akkor párhuzamos a görbe mentén, ha teljesíti a

$$X^{1'} + \sum_{i,j=1}^{2} X^i c^{j'}\Gamma^1_{ij}(c^1, c^2) = 0,$$

$$X^{2'} + \sum_{i,j=1}^{2} X^i c^{j'}\Gamma^2_{ij}(c^1, c^2) = 0$$

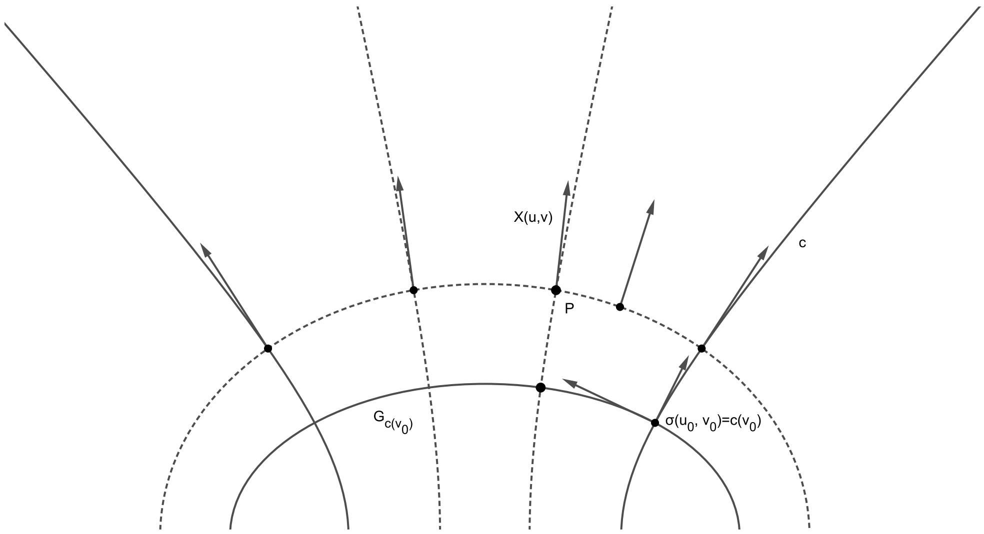
differenciálegyenlet-rendszert. A geodetikusok differenciálegyenlet-rendszere pedig az $X^1 = c^{1'}$ és $X^2 = c^{2'}$ helyettesítéssel

$$c^{1''} + \sum_{i,j=1}^{2} c^{i'}c^{j'}\Gamma^1_{ij}(c^1, c^2) = 0,$$

$$c^{2''} + \sum_{i,j=1}^{2} c^{i'}c^{j'}\Gamma^2_{ij}(c^1, c^2) = 0.$$

Bár a párhuzamos vektormezők, illetve a geodetikusok értelmezése során szerepeltettük a szemléletet segítő felületi normálist[1], a differenciálegyenlet-rendszerek világossá teszik, hogy belső geometriai konstrukciókról van szó.

[1] Ilyen értelemben geodetikusnak lenni annyit tesz, hogy a gyorsulásvektor (második derivált) merőleges a felületre, azaz a felület belső geometriája szempontjából zérus: a görbe mentén haladva "egyenes vonalú" egyenletes mozgást végzünk.



1. ábra. Ortogonális paramétervonalak.

1.6. Ortogonális paramétervonalak

Tekintsünk egy parametrizált elemi felületet és legyen (u_0, v_0) a paramétertartomány egy belső pontja; jelölje továbbá

$$c(v) = \sigma(u_0, v)$$

a $\sigma(u_0, v_0)$ pontra illeszkedő második paramétervonalat,

$$V(v) := N(u_0, v) \times c'(v)$$

pedig az érintőre merőleges felületi vektormező a c görbe mentén, ahol N a felület egységnormálisa. A c görbe v paraméterű pontjából V irányba induló geodetikus (parametrizált) görbét $G_{c(v)}(t)$ jelöli. Ennek mentén párhuzamosan eltolva a c görbe deriváltvektorait az

$$X(u, v) = P_{c(v) \mapsto G_{c(v)}(u)}(c'(v))$$

felületi vektormezőt kapjuk, melynek integrálgörbéi a geodetikus vonalakat merőlegesen metszik, hiszen

$$\langle X(u, v), G'_{c(v)}(u)\rangle = \langle P_{c(v) \mapsto G_{c(v)}(u)}(c'(v)), G'_{c(v)}(u)\rangle = \langle c'(v), G'_{c(v)}(0)\rangle = \langle c'(v), V(v)\rangle = 0.$$

A $\sigma(u_0, v_0)$ felületi pont elegendően kicsiny környezetében lévő p pont paramétere legyen $(\tilde{u}, \tilde{v})$, ha a p-re illeszkedő geodetikus a $\tilde{v}$ paraméterű pontban metszi a c görbét, és az X vektormező p-re illeszkedő integrálgörbéje az $\tilde{u}$ paraméterű pontban metszi a $G_{c(v_0)}$ geodetikust. A $\tilde{\sigma}$ paraméterezéshez tartozó paramétervonalak a kijelölt geodetikusok (hiszen rögzített $\tilde{v}$ paraméter mellett geodetikus íven mozgunk), illetve az X vektormező integrálgörbéi (rögzített $\tilde{u}$ mellett). Mivel ezek minden pontban merőlegesek egymásra, ezért a paramétervonal-érintők is merőlegesek: $\tilde{F} = 0$. Mi több

$$D_2\tilde{E} = D_2\langle D_1\tilde{\sigma}, D_1\tilde{\sigma}\rangle = 2\langle D_2 D_1\tilde{\sigma}, D_1\tilde{\sigma}\rangle,$$

ahol $\tilde{F} = 0$ miatt

$$0 = D_1\tilde{F} = D_1\langle D_1\tilde{\sigma}, D_2\tilde{\sigma}\rangle = \langle D_1 D_2\tilde{\sigma}, D_1\tilde{\sigma}\rangle + \langle D_2\tilde{\sigma}, D_1 D_1\tilde{\sigma}\rangle \ \Rightarrow$$

$$\langle D_1 D_2 \tilde{\sigma}, D_1 \tilde{\sigma} \rangle = -\langle D_2 \tilde{\sigma}, D_1 D_1 \tilde{\sigma} \rangle.$$

Csakhogy $D_1 \tilde{\sigma}$ geodetikus vonalak érintővektormezője, azaz

$$D_1 \tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \lambda(\tilde{u}, \tilde{v}) G'_{c(\tilde{v})}(\tilde{u})$$

írható, amit differenciálva

$$D_1 D_1 \tilde{\sigma} \in \mathcal{L}(D_1 \tilde{\sigma}, N)$$

írható. Ez azt jelenti, hogy

$$\langle D_1 D_2 \tilde{\sigma}, D_1 \tilde{\sigma} \rangle = -\langle D_2 \tilde{\sigma}, D_1 D_1 \tilde{\sigma} \rangle = 0,$$

mivel a $D_2 \tilde{\sigma}$ paramétervonal-érintő merőleges mind a $D_1 \tilde{\sigma}$ paramétervonal-érintőre, mind pedig - értelemszerűen - a felületi normálisra. Ennélfogva

$$D_2 \tilde{E} = 2\langle D_2 D_1 \tilde{\sigma}, D_1 \tilde{\sigma} \rangle = 2\langle D_1 D_2 \tilde{\sigma}, D_1 \tilde{\sigma} \rangle = 0,$$

azaz $\tilde{E}$ független a $\tilde{v}$ paramétertől:

$$\tilde{E}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{E}(\tilde{u}, \tilde{v}_0 = v_0).$$

A $c(v_0)$ pontból induló geodetikus vonalon azonban $\tilde{u}$ nem más, mint a geodetikus eredeti paramétere, amiről feltehető, hogy ívhosszparaméter, azaz az érintő konstans hossza 1. Az első alapmennyiségek tehát: $\tilde{E} = 1$, $\tilde{F} = 0$ és $\tilde{G}$.

1.6.1. A görbületi formula

A továbbiakban tegyük fel, hogy a paramétervonalak merőlegesek és az első paramétervonal-érintők hossza konstans 1, azaz az első alapmennyiségek $E = 1$, $F = 0$ és G. Közvetlen számolással kapjuk, hogy ebben az esetben

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0,$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2G} D_1 G,$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2} D_1 G, \ \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2G} D_2 G,$$

azaz a Gauss-egyenletek

$$D_1 D_1 \sigma = \gamma_{11} N,$$

$$D_2 D_1 \sigma = \frac{1}{2G} D_1 G D_2 \sigma + \gamma_{21} N,$$

$$D_1 D_2 \sigma = \frac{1}{2G} D_1 G D_2 \sigma + \gamma_{12} N,$$

$$D_2 D_2 \sigma = -\frac{1}{2} D_1 G D_1 \sigma + \frac{1}{2G} D_2 G D_2 \sigma + \gamma_{22} N.$$

A Theorema Egregium bizonyítása során már alkalmazott gondolatmenettel:

$$ln - m^2 - \left(\frac{1}{2G} D_1 G\right)^2 G = \langle D_1 D_1 \sigma, D_2 D_2 \sigma \rangle - \langle D_1 D_2 \sigma, D_2 D_2 \sigma \rangle =$$

$$D_1\left(D_2\langle D_1\sigma, D_2\sigma\rangle - \langle D_1D_2\sigma, D_2\sigma\rangle\right) - D_2\langle D_1\sigma, D_2D_1\sigma\rangle =$$
$$D_1\left(D_2F - \frac{1}{2}D_1G\right) - \frac{1}{2}D_2D_2E = -\frac{1}{2}D_1D_1G,$$

ahonnan a Gauss-féle szorzatgörbület

$$\kappa = \frac{ln - m^2}{G} = \left(\frac{1}{2G}D_1G\right)^2 - \frac{1}{2G}D_1D_1G = -\frac{1}{2\sqrt{G}}D_1\left(\frac{D_1G}{\sqrt{G}}\right).$$

1.6.2. Felületi görbék holonómiája

A Gauss-Bonnet-tétel lokális verzióját előkészítendő, még néhány technikai számítást végzünk el. Tekintettel a paraméterezés specialitásaira $D_1\sigma$, $D_2\sigma/\sqrt{G}$ ortonormált bázist alkot az érintőterekben. Legyen $c = \sigma(c^1, c^2)$ egy felületi görbe és vegyünk fel egy c mentén párhuzamos vektormezőt az

$$X(t) = \cos\theta(t)D_1\sigma(c^1(t), c^2(t)) + \sin\theta(t)\frac{D_2\sigma(c^1(t), c^2(t))}{\sqrt{G(c^1(t), c^2(t))}}$$

alakban. A θ függvény meghatározásához írjuk fel a párhuzamos vektormezők differenciálegyenlet-rendszerét az

$$X^1 = \cos\theta, \quad X^2 = \sin\theta/\sqrt{G(c^1, c^2)}$$

választás mellett:

$$X^{1\prime} = -\theta'\sin\theta,$$

$$X^{1\prime} = -\sum_{i,j=1}^{2} X^i c^{j\prime}\Gamma_{ij}^1(c^1, c^2) = -X^2c^{2\prime}\Gamma_{22}^1(c^1, c^2) = \frac{\sin\theta}{\sqrt{G(c^1, c^2)}}\frac{1}{2}D_1G(c^1, c^2)c^{2\prime},$$

ahonnan

$$\theta'\sin\theta = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{G(c^1, c^2)}}\frac{1}{2}D_1G(c^1, c^2)c^{2\prime}, \tag{6}$$

továbbá

$$X^{2\prime} = -\frac{1}{2\sqrt{G(c^1, c^2)}}\left(c^{1\prime}D_1G(c^1, c^2) + c^{2\prime}D_2G(c^1, c^2)\right)\frac{\sin\theta}{G(c^1, c^2)} + \theta'\cos\theta\frac{1}{\sqrt{G(c^1, c^2)}},$$

$$X^{2\prime} = -\sum_{i,j=1}^{2} X^i c^{j\prime}\Gamma_{ij}^2(c^1, c^2) = -\left(X^1c^{2\prime} + X^2c^{1\prime}\right)\frac{1}{2G(c^1, c^2)}D_1G(c^1, c^2) -$$
$$X^2c^{2\prime}\frac{1}{2G(c^1, c^2)}D_2G(c^1, c^2) =$$
$$-\left(\cos\theta c^{2\prime} + \frac{\sin\theta}{\sqrt{G(c^1, c^2)}}c^{1\prime}\right)\frac{1}{2G(c^1, c^2)}D_1G(c^1, c^2) - \frac{\sin\theta}{\sqrt{G(c^1, c^2)}}c^{2\prime}\frac{1}{2G(c^1, c^2)}D_2G(c^1, c^2),$$

ahonnan

$$\theta'\cos\theta = -\cos\theta c^{2\prime}\frac{1}{2\sqrt{G(c^1, c^2)}}D_1G(c^1, c^2). \tag{7}$$

A (6) és (7) képletek alapján

$$\theta' = -c^{2\prime}\frac{1}{2\sqrt{G(c^1, c^2)}}D_1G(c^1, c^2).$$

Integrálva a görbe paramétertartománya fölött

$$\theta(b) - \theta(a) = -\int_a^b \frac{1}{2\sqrt{G(c^1, c^2)}} D_1 G(c^1, c^2) c^{2\prime}\, dt, \tag{8}$$

ahol zárt görbék esetén a bal oldalon fellépő differenciát a görbe holonómiájának nevezzük [2]. A holonómia - a képlet értelmében - nem függ a párhuzamos vektormező megválasztásától. A görbe és a felület belső geometriája a meghatározó.

3. Tétel. *Ha $c = \sigma(c^1, c^2)$ egyszerű, zárt felületi görbe, akkor*

$$\theta(b) - \theta(a) = \int_{\sigma_c} K,$$

ahol $K \circ \sigma = \kappa$ és σ_c a görbe által határolt felületdarab.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\sigma_c = \sigma_{|H}$, ahol a c görbének a σ paraméterezésre vonatkozó c^1 és c^2 koordinátafüggvényei a $H \subset T$ tartomány határának pozitívan irányított paraméterezését adják. Definíció szerint

$$\int_{\sigma_c} K = \int_H K \circ \sigma(u, v) |D_1 \sigma \times D_2 \sigma|(u, v)\, du\, dv = -\frac{1}{2} \int_H D_1 \left(\frac{D_1 G}{\sqrt{G}} \right) = -\frac{1}{2} \int_H \mathrm{rot} X,$$

ahol $X = \dfrac{1}{\sqrt{G}}(0, D_1 G)$ és a rotációt a

$$\mathrm{rot} X = D_1 X^2 - D_2 X^1$$

formula értelmezi [5]. A klasszikus vektoranalízis ún. Stokes-tétele szerint a rotáció integrálja a síktartomány fölött, megegyezik a vektormezőnek a (pozitívan irányított) határgörbe mentén vett integráljával:

$$\int_H \mathrm{rot} X = \int_a^b \langle X(c^1, c^2), (c^{1\prime}, c^{2\prime}) \rangle (t)\, dt = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{G(c^1(t), c^2(t))}} D_1 G(c^1(t), c^2(t)) c^{2\prime}(t)\, dt,$$

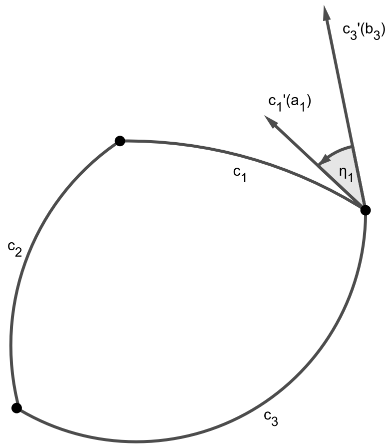
ami a (8) képlet alapján teljessé teszi a bizonyítást. □

2. Megjegyzés. Az előző tétel jobb oldalán szereplő integrált a felületdarab teljes görbületének nevezzük.

13. Feladat. Igazolja, hogy ha $K(p) \neq 0$, akkor - előjeltől eltekintve - a p pont elegendően kicsiny, $H \subset T$ fölött paraméterezett környezetének teljes görbülete a

$$g \colon (u, v) \in H \mapsto N(u, v) := \frac{1}{|D_1 \sigma \times D_2 \sigma|(u, v)} D_1 \sigma \times D_2 \sigma(u, v)$$

ún. Gauss-leképezés által paraméterezett gömbtartomány felszíne.



2. ábra. A geodetikus háromszög esete.

Útmutatás: a kérdéses felszínt a

$$\int_H |D_1 g \times D_2 g|(u,v)\,du\,dv$$

formula adja, ahol a Weingarten-egyenletek alapján

$$D_1 g \times D_2 g = \det b^i_j D_1\sigma \times D_2\sigma,$$

következésképpen

$$\int_H |D_1 g \times D_2 g|(u,v)\,du\,dv = \pm \int_H \kappa |D_1\sigma \times D_2\sigma|(u,v)\,du\,dv = \pm \int_{\sigma_c} K.$$

A $K(p) \neq 0$ feltétel biztosítja, hogy a g paraméterezés reguláris legyen.

1.7. A Gauss-Bonnet-tétel

Alkalmazzuk az előző tétel szakaszonként sima zárt görbékre vonatkozó verzióját a következő szituációban: legyen σ_c egy geodetikus háromszöglemez a felületen, melynek határa a $c_1 = \sigma(c_1^1, c_1^2)$, $c_2 = \sigma(c_2^1, c_2^2)$ és $c_3 = \sigma(c_3^1, c_3^2)$ geodetikus ívek uniója. Ekkor

$$\int_{\sigma_c} K = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\int_{a_i}^{b_i} \frac{1}{\sqrt{G(c_i^1(t), c_i^2(t))}} D_1 G(c_i^1(t), c_i^2(t)) c_i^{2\prime}(t)\,dt = \sum_{i=1}^{3} \theta(b_i) - \theta(a_i),$$

ahol a_i és b_i a megfelelő ív paramétertartományának végpontjai, $i = 1, 2, 3$. Tekintsük például a

$$\theta(b_3) - \theta(a_1)$$

differenciát. Ha a határgörbe a felületi normális irányából nézve pozitívan irányított és a $c_3'(b_3)$, $c_1'(a_1)$ vektorok irányított szögét az adott csúcshoz tartozó η_1 külső szögnek tekintjük, akkor

$$\theta(b_3) - \theta(a_1) = -\eta_1 + 2k_1\pi$$

írható, hiszen az adott pontban kiértékelt érintővektorok csupán koszinusza, illetve szinusza erejéig határozzák meg θ értékét. Hasonlóan

$$\theta(b_1) - \theta(a_2) = -\eta_2 + 2k_2\pi, \quad \theta(b_2) - \theta(a_3) = -\eta_3 + 2k_3\pi,$$

ahonnan

$$\int_{\sigma_c} K = -\eta_1 - \eta_2 - \eta_3 + 2k\pi.$$

Belátjuk, hogy $k = 1$. Ehhez tekintsük a pontra zsugorodó geodetikus háromszöget. A formula bal oldala zérushoz tart, a jobb oldalon (folytonossági érv alapján) a k egész értéke konstans marad, míg a külső szögek összege 2π-hez tart. Ennélfogva $k = 1$. Ha a

$$\alpha_1 = \pi - \eta_1, \ \alpha_2 = \pi - \eta_2, \ \alpha_3 = \pi - \eta_3$$

képletekkel áttérünk a geodetikus háromszög belső szögeire, akkor a Gauss-Bonnet-tétel klasszikus (lokális) verzióját kapjuk:

$$\int_{\sigma_c} K = -\eta_1 - \eta_2 - \eta_3 + 2\pi = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi. \tag{9}$$

Hasonló eredmény adódik geodetikus sokszögtartományok esetén:

$$\int_{\sigma_c} K = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi. \tag{10}$$

Igazolható, hogy egy zárt felület előállítható véges sok, nem átfedő geodetikus poligon uniójaként. Ha v jelöli a felosztásban szereplő csúcsok, e az élek, f pedig a poligonok számát, akkor

$$\int_{\sigma} K = 2\pi\left(v - e + f\right), \tag{11}$$

ahol $2\pi v$ a felbontásban szereplő összes geodetikus poligon belső szögeinek összege (ld. a (10) formula jobb oldalán szereplő összeget), míg a (10) jobb oldalán szereplő 2π összesen f-szer lép fel, miközben a bal oldalon a geodetikus sokszögekre összegzünk. Végül pedig, ha n_3 darab geodetikus háromszög, n_4 darab geodetikus négyszög stb. szerepel a felbontásban, akkor

$$n_3 + n_4 + \ldots = 2e.$$

A (11) összefüggés a Gauss-Bonnet-tétel globális verziója. A $v - e + f$ érték, a felület ún. Euler karakterisztikája, fontos topologiai invariáns. A

$$v - e + f = 2 - 2g$$

összefüggéssel meghatározott topologiai invariáns pedig a felület ún. "genus"-a. Szemléletes tartalma a felület megragadására alkalmas fogantyúk száma: a gömb genusa zérus (azaz Euler - karakterisztikája 2), míg a tórusz genusa 1 (azaz Euler-karakterisztikája zérus); topológiai szempontból a tórusz ekvivalens a gömbből egy fogantyú hozzáragasztásával keletkező felülettel.

14. Feladat. Igazolja, hogy a gömb teljes görbülete 4π, azaz Euler-karakterisztikája 2.

Útmutatás. Bontsuk fel a gömböt főkörök segítségével nem átfedő geodetikus háromszögek uniójára.

15. Feladat. Igazolja, hogy a tórusz teljes görbülete 0, azaz Euler-karakterisztikája 0.

16. Feladat. Adjon példát negatív Euler-karakterisztikájú felületre.

Hivatkozások

[1] Kozma László, Kovács Zoltán, Görbék és felületek elemi differenciálgeometriája, Debrecen – Nyíregyháza 2011.

[2] John Roe: Elementary Geometry, Oxford University Press, 1993.

[3] Serény György, Formális és szemléletes vektoranalízis, Műegyetemi Kiadó, 2002.

[4] Szőkefalvi-Nagy Gyula, Gehér László, Nagy Péter, Differenciálgeometria, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

[5] Vincze Csaba, A vektoranalízis alapjai, kézirat, 2019.