A differenciálgeometria alapjai: görbék és felületek

Vincze Csaba

Debreceni Egyetem

2021. február 15.

Tartalomjegyzék

1. Görbeelmélet **1**
1.1. Bevezetés . . . 1
1.2. Ívhosszparaméterezés: a görbület . . . 3
1.3. A simulósík . . . 4
1.4. A Frenet-féle háromél: a torzióformula. . . . 5
1.5. A görbeelmélet alaptétele . . . 7
1.5.1. Egzisztencia . . . 7
1.5.2. Unicitás . . . 8
1.6. Síkgörbék: a hajlásszögfüggvény és a görbe rekonstrukciója . . . 8
1.7. Feladatok . . . 10

1. Görbeelmélet

1.1. Bevezetés

A differenciálgeometria tárgya geometriai problémák vizsgálata, geometriai alakzatok leírása a kalkulus (differenciál- és integrálszámítás) eszközeivel. Az alkalmazást előkészítendő, a görbék, mint - alkalmas regularitási feltételeket teljesítő - differenciálható leképezések szerepelnek a tárgyalás során.

1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $c\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *leképezés reguláris parametrizált görbe, ha folytonosan differenciálható, azaz előáll a paramétertartományt tartalmazó nyílt halmazon értelmezett, folytonosan differenciálható leképezés leszűkítéseként és deriváltvektora sehol sem tűnik el.*

Egy reguláris parametrizált görbét egyszerű ívnek nevezünk, ha invertálható, azaz a paramétertartomány különböző pontjaihoz különböző görbepontok tartoznak. Egyszerű zárt íven olyan reguláris parametrizált görbét értünk, mely az értelmezési tartomány végpontjaitól eltekintve invertálható és $c(a) = c(b)$*. Egy* $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *folytonos leképezés görbe, ha előáll véges sok, páronként nem átfedő egyszerű ív egyesítéseként.*

Egyszerű ívek például a(z)

(i) egyenes szakasz

$$c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n, \quad c(t) := (1-t)p + tq,$$

ahol p és q a koordinátatér különböző, rögzített pontjai,

(ii) hengeres csavarvonal

$$c\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad c(t) := (r\cos t, r\sin t, bt),$$

ahol $r > 0$ és $b \neq 0$ rögzített konstansok,

(iii) kúpos csavarvonal

$$c\colon [0,r] \to \mathbb{R}^3, \quad c(t) := (t\cos t, t\sin t, bt),$$

ahol $r > 0$ és $b \neq 0$ rögzített konstansok.

Egyszerű zárt ívek például a(z)

(i) körvonal

$$c\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad c(t) := (u_0 + r\cos t, v_0 + r\sin t)$$

ahol $r > 0$ a kör sugara, u_0 és v_0 pedig a kör középpontjának koordinátái,

(ii) ellipszis

$$c\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad c(t) := (u_0 + a\cos t, v_0 + b\sin t)$$

ahol $a > 0$ és $b > 0$ az ellipszis féltengelyeinek hossza.

(iii) Milyen alakzat paraméteres előállítása a

$$c\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad c(t) := (\cos t, \sin t, 1 - 3\sin t + \cos t),$$

egyszerű zárt ív?

Útmutatás: vegyük észre, hogy a görbe az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű egyenes körhenger és a $z = 1 - 3y + x$ egyenletű sík metszésvonala, azaz ellipszis.

A háromszögvonal, mint zárt görbe: legyen p, q és r az n-dimenziós koordinátatér három nemkollineáris, rögzített pontja és tekintsük a $c_3\colon [0,3] \to \mathbb{R}^n$ görbét, ahol

$$c_3(t) := \begin{cases} (1-t)p + tq, & \text{ha } \ 0 \le t \le 1 \\ (2-t)q + (t-1)r, & \text{ha } \ 1 \le t \le 2 \\ (3-t)r + (t-2)p, & \text{ha } \ 2 \le t \le 3. \end{cases}$$

Görbén tehát - a definíció értelmében - mindig parametrizált görbét értünk, azaz egy zárt intervallum alkalmas tulajdonságú leképezését a koordinátatérbe. Látszólagos bonyolultsága ellenére a görbe definíciója természetes követelményeket fogalmaz meg: a paramétertartomány kompaktsága és a paraméterezés folytonossága biztosítja, hogy a görbék - mint ponthalmazok - a koordinátatér kompakt részhalmazai, azaz "végesek" és a kezdő-, valamint a végpont is a görbe része (topológikus zártság). A paramétertartomány összefüggőségének és a paraméterezés folytonosságának szemléletes jelentése, hogy minden görbe egy darabból áll. A regularitásnak köszönhetően pedig a paramétertartomány pontjainak megfelelő görbepontokban az érintő éppen a $p = c(t)$ pontra illeszkedő és a $c'(t)$ irányvektorú egyenes. A paramétertartomány mérhetősége (véges hossza) a paraméterezésre vonatkozó kikötésekkel együtt maga után vonja, hogy a görbék is mérhetők, azaz rendelkeznek (véges) ívmértékkel. Mivel egy görbe véges sok, nem átfedő egyszerű ív egyesítése, ezért a teljes ívhossz összegzéssel határozható meg az egyszerű ívekre vonatkozó

$$L(c) = \int_a^b |c'(t)|\, dt$$

képlet alapján. Egy egyszerű ív (mint ponthalmaz) két paraméterezése mindig átvihető egymásba ún. paramétertranszformáció segítségével [5]. Ez biztosítja - többek között - hogy az ívhossz független a paraméterezés megválasztásától. A paraméterezéstől független (de a paraméterezés birtokában meghatározható) mennyiségekre épül a görbék differenciálgeometriája (ívhossz, görbület, torzió).

2. Definíció. *Egy* $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *görbe ívhosszán az*

$$L(c) := \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |c_i'(t)|\, dt$$

összeget értjük, ahol a paramétertartomány $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ *felosztása megfelel a görbe páronként nem átfedő egyszerű ívek egyesítéseként való előállításának. Egyszerű ívekre*

$$L(c) := \int_a^b |c'(t)|\, dt.$$

1.2. Ívhosszparaméterezés: a görbület

Továbbra is egyszerű íveket alapul véve, értelmezzük az ún. *ívhosszfüggvényt* a

$$\sigma(t) := \int_a^t |c'(s)|\, ds \tag{1}$$

formulával[1] és tekintsük a $c_*(s) := c \circ \sigma^{-1}(s)$ egyszerű ívet, a c egyszerű ív ún. átparaméterezését az ívhosszfüggvény inverze segítségével. Mivel

$$\sigma'(t) = |c'(t)| > 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\sigma^{-1}\right)'(s) = \frac{1}{\sigma' \circ \sigma^{-1}(s)} > 0$$

a paramétertartomány bármely s eleme esetén, ezért a σ^{-1} paramétertranszformáció megőrzi a befutási irányt, azaz irányítástartó. Ellenkező esetben irányításváltó paramétertranszformációról beszélünk. Mi több

$$c_*'(s) = c' \circ \sigma^{-1}(s) \frac{1}{\sigma' \circ \sigma^{-1}(s)} = \frac{1}{|c'| \circ \sigma^{-1}(s)} c' \circ \sigma^{-1}(s),$$

ezért a c_* egyszerű ív sebességvektorának nagysága konstans 1: $|c_*'(s)| = 1$. Az ívnek ezt a paraméterezését ívhosszparaméterezésnek nevezzük. Ha a sebességvektor nagysága konstans, akkor a gyorsulásvektor minden s paraméter esetén merőleges a sebességvektorra, ami a

$$\langle c_*', c_*' \rangle = \text{ konstans}$$

formula differenciálásával könnyen látható. A sebességvektor "változási gyorsaságát" jellemző c_*'' gyorsulásvektor tehát csak a sebesség irányának megváltozásáról referál, ami viszont közvetlen kapcsolatban van a görbe alakjával, így geometriai tulajdonságokra következtethetünk.

[1] Az integrálás változójának átjelölése szemantikailag közömbös, szintaktikailag azonban indokolt, ugyanis a t változó nem szerepelhetne szabad (ld. a formula bal oldala), illetve kötött (ld. a formula jobb oldala) változóként egy és ugyanazon formulán belül.

3. Definíció. *Az ívhosszparaméterezett c_* egyszerű ív gyorsulásvektorát görbületi vektornak, a nagyságát pedig görbületnek nevezzük, azaz*

$$\kappa_*(s) := |c_*''(s)|$$

a paramétertartomány bármely s eleme esetén.

Nyilvánvaló, hogy a görbület pontosan akkor azonosan nulla, ha parametrizált egyenesszakaszról van szó, hiszen a koordinátafüggvényekre vonatkozó

$$x_*'' = 0, \ y_*'' = 0, \ z_*'' = 0$$

differenciálegyenletek megoldása az összefüggő paramétertartományon

$$x_*(s) = x_*(0) + sx_*'(0), \ y_*(s) = y_*(0) + sy_*'(0), \ z_*(s) = z_*(0) + sz_*'(0).$$

Tömörebben

$$c_*(s) = c_*(0) + sc_*'(0).$$

Gyakorlati szempontból azonban hasznos a görbület kiszámítási formulája nem feltétlenül ívhosszparaméterezett ívek esetén:

$$c_*'(s) = \frac{1}{|c'| \circ \sigma^{-1}(s)} c' \circ \sigma^{-1}(s), \ c_*''(s) = \left(\frac{1}{|c'| \circ \sigma^{-1}}\right)'(s) c' \circ \sigma^{-1}(s) + \frac{1}{|c'|^2 \circ \sigma^{-1}(s)} c'' \circ \sigma^{-1}(s).$$

Mivel ívhosszparaméterezés esetén az első deriváltvektor nagysága 1, ezért a c_*' vektorral történő vektoriális szorzás hatása a rá merőleges síkra való vetítés és derékszögű elforgatás. A gyorsulásvektor merőleges vetítése azonban formális, hiszen az első és a második deriváltvektor merőleges. Ez azt jelenti, hogy

$$|c_*''| = |c_*' \times c_*''| = \frac{|c' \times c''|}{|c'|^3} \circ \sigma^{-1}.$$

4. Definíció. *Egy c egyszerű ív görbülete*

$$\kappa(t) := \frac{|c' \times c''|}{|c'|^3}(t)$$

a paramétertartomány bármely t eleme esetén. A görbe bireguláris, ha a görbülete sehol sem tűnik el.

1. Következmény. *Egy egyszerű ív görbülete pontosan akkor azonosan nulla, ha parametrizált egyenesszakasz.*

1.3. A simulósík

Legyen c egy bireguláris egyszerű ív, t pedig a paramétertartomány belső pontja. Elegendően kicsiny $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ pozitív számok választása mellett, tekintsük a

$$c(t - \varepsilon_1), \ c(t), \ c(t + \varepsilon_2)$$

görbepontok által meghatározott síkot, feltéve, hogy nem kollineáris pontokról van szó. Jelölje $n(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ a sík egységnormálisát és tekintsük az origó egy nyílt környezetén értelmezett

$$f(r) = \langle n(\varepsilon_1, \varepsilon_2), c(t + r) - c(t) \rangle$$

leképezést. Mivel $f(0) = f(-\varepsilon_1) = 0$, a Rolle-féle középértéktétel miatt van olyan α érték (a $-\varepsilon_1$ és a 0 között), hogy

$$0 = f'(\alpha) = \langle n(\varepsilon_1, \varepsilon_2), c'(t + \alpha)\rangle.$$

Hasonlóan

$$0 = f'(\beta) = \langle n(\varepsilon_1, \varepsilon_2), c'(t + \beta)\rangle,$$

ahol β a 0 és az ε_2 értékek közé esik. A fentiekből következik, hogy amennyiben az

$$n := \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0} n(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

határérték létezik, akkor n merőleges a $c'(t)$ sebességvektorra. Ismételve a gondolatmenetet az $f'(r)$ függvényt alapul véve, van olyan α és β közötti γ paraméter, melyre

$$0 = f''(\gamma) = \langle n(\varepsilon_1, \varepsilon_2), c''(t + \gamma)\rangle.$$

Innen pedig az következik a szóban forgó határátmenetet véve, hogy n merőleges a $c''(t)$ gyorsulásvektorra is.

5. Definíció. *Egy bireguláris egyszerű ív $c(t)$ pontjára illeszkedő, $c'(t) \times c''(t)$ normálvektorú sík a görbe simulósíkja.*

Hasonló értelemben vett határalakzatként fogható fel a görbe simulóköre a $c(t)$ pontban: igazolható, hogy a simulókör sugara éppen az adott pontbeli görbület reciproka [4], síkgörbék esetén ld. még [1].

1.4. A Frenet-féle háromél: a torzióformula.

A $c(t)$ pontra illeszkedő, $c'(t)$ normálvektorú síkot a görbe merőlegesen döfi - ez az ún. normálsík. A simuló- és a normálsíkra is merőleges, $c(t)$-re illeszkedő síkot pedig a görbe rektifikáló síkjának nevezzük. A síkok egységnormálisait rendre érintő egységvektormezőnek (a normálsík egységnormálisa),

$$T(t) := \frac{c'}{|c'|}(t),$$

főnormális vektormezőnek (a rektifikáló sík egységnormálisa) $F(t) := B(t) \times T(t)$ és binormális vektormezőnek (a simulósík egységnormálisa)

$$B(t) := \frac{c' \times c''}{|c' \times c''|}(t)$$

nevezzük. A konstrukció alapján világos, hogy T, F és B egy ortonormált bázist határoz meg a görbe mentén minden t paraméter esetén. Ezt nevezzük Frenet-féle háromélnek. Görbeelméleti szerepe a görbe alakváltozását mennyiségileg leíró T', F' és B' deriváltvektormezők kifejezése koordinátafüggvényeik segítségével:

$$\begin{pmatrix} T' \\ F' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ F \\ B \end{pmatrix}.$$

Tekintettel a páronkénti merőlegességre, azt kapjuk, hogy

$$\langle T, B\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle T', B\rangle = -\langle T, B'\rangle$$

és így tovább. Másfelől

$$\langle T, T\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad \langle T', T\rangle = 0$$

és így tovább. Ennélfogva

$$\begin{pmatrix} T' \\ F' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ F \\ B \end{pmatrix}.$$

A vektormezők skaláris szorzatainak alaposabb vizsgálata azt mutatja, hogy

$$\langle T', B\rangle = 0,$$

hiszen T' a c' és a c'' vektorok lineáris kombinációja a differenciálási szabályok miatt, míg B az első két deriváltvektorra merőleges egységvektor. Ez azt jelenti, hogy $\omega_{13} = 0$, azaz lényegében két nem feltétlenül eltűnő koordinátafüggvény marad: ω_{12} és ω_{23}, azaz

$$\begin{pmatrix} T' \\ F' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & 0 \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ 0 & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ F \\ B \end{pmatrix}.$$

A további számítások áttekinthetővé tétele érdekében vezessük be az ún. pályasebesség-függvényt: $v(t) := |c'(t)|$. Ennek segítségével

$$c' = vT \quad \Rightarrow \quad c'' = v'T + vT'$$

írható, következésképpen

$$c' \times c'' = v^2 T \times T' = \omega_{12} v^2 T \times F = \omega_{12} v^2 B,$$

ahonnan

$$\omega_{12} = \frac{|c' \times c''|}{v^2} = v\kappa$$

következik, azaz $T' = v\kappa F$. Visszahelyettesítve

$$c' = vT, \quad c'' = v'T + v^2\kappa F, \quad c' \times c'' = \kappa v^3 B,$$

$$c''' = v''T + v'T' + (v^2\kappa)'F + v^2\kappa F' = v''T + v'v\kappa F + (v^2\kappa)'F + v^2\kappa(-v\kappa T + \omega_{23} B).$$

Végül pedig

$$\langle c' \times c'', c'''\rangle = v^5 \kappa^2 \omega_{23},$$

azaz

$$\omega_{23} = v \frac{\langle c' \times c'', c'''\rangle}{|c' \times c''|^2}.$$

6. Definíció. *Egy bireguláris c egyszerű ív torziója*

$$\tau(t) := \frac{\langle c' \times c'', c'''\rangle}{|c' \times c''|^2}(t)$$

a paramétertartomány bármely t eleme esetén.

Kapjuk tehát, hogy

$$\begin{pmatrix} T' \\ F' \\ B' \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ F \\ B \end{pmatrix}.$$

Részletesebben kiírva, az ún. Frenet-féle egyenletek:

$$T' = v\kappa F, \quad F' = -v\kappa T + v\tau B, \quad B' = -v\tau F.$$

1. Tétel. *Egy bireguláris egyszerű ív torziója pontosan akkor zérus, ha síkgörbe.*

Bizonyítás. Ha c a tér egy síkjában fut, akkor nyilvánvaló, hogy a deriváltvektorai (esetünkben az első, második, illetve harmadik deriváltvektorról van szó) mind párhuzamosak a síkkal. Ezért

$$\langle c' \times c'', c''' \rangle = 0,$$

ahonnan a torzió zérus. Ha a torzió zérus, akkor a harmadik Frenet-egyenlet szerint a binormális vektormező konstans, s ennélfogva

$$0 = \langle T(t), B(t) \rangle = \langle T(t), n \rangle$$

teljesül valamely t-től független n egységvektor mellett. Ez azt jelenti, hogy

$$0 = \langle c'(t), n \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle c(t), n \rangle = \text{ konstans}.$$

A jobb oldali konstanst egy t_0 paraméter behelyettesítésével kiszámítva

$$\langle c(t), n \rangle = \langle c(t_0), n \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle c(t) - c(t_0), n \rangle = 0,$$

azaz a görbe a $c(t_0)$ pontra illeszkedő, n normálvektorú síkban fut. □

1.5. A görbeelmélet alaptétele

1.5.1. Egzisztencia

A görbeelmélet alaptételének egzisztencia-része azt állítja, hogy tetszőlegesen adott $\kappa\colon [a,b] \to \mathbb{R}^+$ pozitív, differenciálható és $\tau\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényekhez létezik olyan $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ ívhosszparaméterezésű bireguláris térgörbe, melynek görbület- és torziófüggvénye éppen a két megadott függvény.

A bizonyítás a differenciálegyenlet-rendszerek elméletének keretein belül történik, hiszen ha a görbület és a torzió ismert, akkor a Frenet-egyenletek a T, F, B élmezőkre, illetve azok (mindösszesen kilenc) komponensfüggvényére egy lineáris differenciálegyenlet-rendszert jelentenek. Bár a megoldásnak nincs általános módszere, egzisztencia- és unicitás-tétel ismert, legalábbis alkalmas kezdeti feltételek esetén. Miután az érintő egységvektormezőt meghatároztuk, a $c' = T$ egyenlet integrálásával kapjuk a görbét.

1.5.2. Unicitás

Tegyük fel, hogy $c_1, c_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ ívhosszparaméterezésű, bireguláris egyszerű ívek, melyek görbület- és torziófüggvénye megegyezik. Ekkor létezik olyan $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ irányítástartó izometria, mely egyiket a másikba viszi, azaz $c_2 = \Phi \circ c_1$.

Tekintsük ugyanis azt a φ rotációt, mely a $T_1(a)$, $F_1(a)$ és $B_1(a)$ Frenet-féle háromél tagjait rendre a $T_2(a)$, $F_2(a)$ és $B_2(a)$ vektorokba viszi. Képezve és a Frenet-egyenletekre tekintettel differenciálva a

$$h(s) := |T_2(s) - \varphi \circ T_1(s)|^2 + |F_2(s) - \varphi \circ F_1(s)|^2 + |B_2(s) - \varphi \circ B_1(s)|^2$$

függvényt, azt kapjuk, hogy

$$h' = 2\langle T_2' - \varphi \circ T_1', T_2 - \varphi \circ T_1\rangle + 2\langle F_2' - \varphi \circ F_1', F_2 - \varphi \circ F_1\rangle + 2\langle B_2' - \varphi \circ B_1', B_2 - \varphi \circ B_1\rangle =$$

$$-2\langle T_2', \varphi \circ T_1\rangle - 2\langle \varphi \circ T_1', T_2\rangle - 2\langle F_2', \varphi \circ F_1\rangle - 2\langle \varphi \circ F_1', F_2\rangle - 2\langle B_2', \varphi \circ B_1\rangle - 2\langle \varphi \circ B_1', B_2\rangle =$$

$$-2\kappa\langle F_2, \varphi \circ T_1\rangle - 2\kappa\langle \varphi \circ F_1, T_2\rangle + 2\kappa\langle T_2, \varphi \circ F_1\rangle - 2\tau\langle B_2, \varphi \circ F_1\rangle +$$

$$2\kappa\langle \varphi \circ T_1, F_2\rangle - 2\tau\langle \varphi \circ B_1, F_2\rangle + 2\tau\langle F_2, \varphi \circ B_1\rangle + 2\tau\langle \varphi \circ F_1, B_2\rangle = 0,$$

ami azt jelenti, hogy h konstans függvény. Mivel $h(a) = 0$, kapjuk, hogy

$$T_2 = \varphi \circ T_1,\ F_2 = \varphi \circ F_1,\ B_2 = \varphi \circ B_1.$$

Ivhosszparaméterezett görbékről lévén szó, $T_1 = c_1'$ és $T_2 = c_2'$. Az első egyenlet nem más, mint

$$c_2' = \varphi \circ c_1' = (\varphi \circ c_1)',$$

amit integrálva

$$c_2(s) - c_2(a) = \varphi \circ c_1(s) - \varphi \circ c_1(a),$$

ahonnan

$$c_2(s) = \varphi \circ c_1(s) + c_2(a) - \varphi \circ c_1(a).$$

Kapjuk tehát, hogy a c_1 görbe forgatással és eltolással a c_2 görbébe vihető át.

1.6. Síkgörbék: a hajlásszögfüggvény és a görbe rekonstrukciója

Síkgörbék esetén a torzió automatikusan zérus, ezért a görbeelmélet alaptételében említett differenciálegyenlet-rendszer nagymértékben egyszerűsödik. A hajlásszögfüggvény segítségével pedig explicit módszer adható a megoldásra. Tekintsünk egy ívhosszparaméterezésű egyszerű ívet és értelmezzük a hajlásszögfüggvényt a

$$c'(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$$

formulával. Ha $x(s)$ és $y(s)$ a görbe koordinátafüggvényei, akkor

$$x'(s) = \cos\theta(s),\ y'(s) = \sin\theta(s),$$

$$x''(s) = -\theta'(s)\sin\theta(s),\ y''(s) = \theta'(s)\cos\theta(s),$$

ahonnan

$$\theta'(s) = x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s) \quad \Rightarrow \quad \theta(s) = \int_a^s \kappa_e(t)\,dt + \theta_0,$$

ahol $c'(a) = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$ és a hajlásszögfüggvény deriváltja, azaz

$$\kappa_e := x'y'' - y'x'' \tag{2}$$

az ún. előjeles görbület. Mivel ívhosszparaméterezésről van szó, ezért $x'^2 + y'^2 = 1$, amit differenciálva

$$0 = x'x'' + y'y''. \tag{3}$$

Következésképpen

$$x'\kappa_e = x'^2 y'' - y'x'x'' = x'^2 y'' + y'^2 y'' = y'',$$
$$y'\kappa_e = x'y'y'' - y'^2 x'' = -x'^2 x'' - y'^2 x'' = -x''.$$

Az egyenleteket négyzetre emelve, majd összeadva

$$\kappa_e^2 = x''^2 + y''^2 = |c''|^2 = \kappa^2,$$

azaz $\kappa_e = \pm\kappa$. Természetesen kiindulhatunk a

$$\kappa := \frac{|c' \times c''|}{|c'|^3}$$

görbületi formulából is:

$$|c'| = 1,\ c' \times c'' = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, x'y'' - y'x'').$$

1. Példa. Legyen $\kappa_e(s) = 1/s$; integrálva

$$\theta(s) = \int \frac{1}{s}\, ds = \log s + s_0$$

valamely s_0 konstans mellett. Következésképpen

$$x'(s) = \cos(\log s + s_0),\ y'(s) = \sin(\log s + s_0).$$

Az egyszerűség kedvéért legyen $s_0 = 0$. Az $\omega = \log s$ helyettesítést végrehajtva és parciálisan integrálva

$$\int \cos\log s\, ds = \int e^\omega \cos\omega\, d\omega = e^\omega \cos\omega + \int e^\omega \sin\omega\, d\omega =$$
$$e^\omega \cos\omega + e^\omega \sin\omega - \int e^\omega \cos\omega\, d\omega,$$

azaz

$$\int e^\omega \cos\omega\, d\omega = e^\omega \cos\omega + e^\omega \sin\omega - \int e^\omega \cos\omega\, d\omega.$$

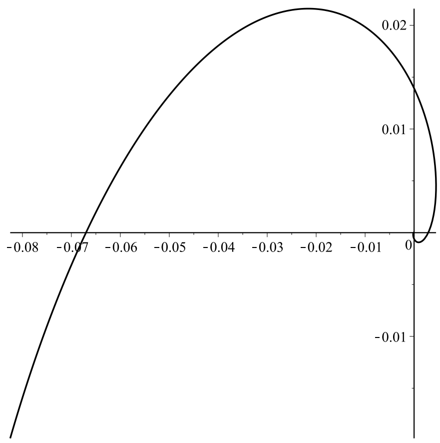
Átrendezéssel

$$x(s) = \int e^\omega \cos\omega\, d\omega = \frac{e^\omega \cos\omega + e^\omega \sin\omega}{2} + x_0 =$$
$$\frac{s\cos\log s + s\sin\log s}{2} + x_0,$$

valamely x_0 konstans esetén. Hasonlóan

$$y(s) = \frac{s\sin\log s - s\cos\log s}{2} + y_0.$$

Görbénk az ún. logaritmikus spirál.



1. ábra. A logaritmikus spirál: $x_0 = 0$ és $y_0 = 0$.

1.7. Feladatok

1. Feladat. A háromszögvonal mintájára értelmezze a $c_m\colon [0,m] \to \mathbb{R}^n$ sokszögvonal fogalmát a koordinátatérben.

Megoldás:

$$c_m(t) := \begin{cases} (1-t)p_0 + tp_1, & \text{ha } 0 \le t \le 1 \\ (2-t)p_1 + (t-1)p_2, & \text{ha } 1 \le t \le 2 \\ \vdots & \\ (m-t)p_{m-1} + (t-m+1)p_m, & \text{ha } m-1 \le t \le m. \end{cases}$$

2. Feladat. Írja fel a $c(t) = (t, t^2, t^3)$ görbe simulósíkjának egyenletét a $t = 1$ paraméterű pontban. Van-e olyan simulósík, mely illeszkedik a $(2, -1/3, -6)$ pontra?

Megoldás: A simulósíkot a $c(1) = (1,1,1)$ pontra kell illesztenünk. A normálvektor pedig

$$c'(t) = (1, 2t, 3t^2) \quad \Rightarrow \quad c'(1) = (1,2,3), \quad c''(t) = (0,2,6t) \quad \Rightarrow \quad c''(1) = (0,2,6),$$

$$c'(1) \times c''(1) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (6, -6, 2).$$

A simulósík egyenlete tehát $3x - 3y + z = 1$, hiszen a normálvektor fölött nemzérus skalárszorzó erejéig szabadon rendelkezünk. A feladat második részének megoldásához a simulósíkot fell kell írnunk a paraméter függvényében. Illesztési pont $c(t) = (t, t^2, t^3)$, a normálvektor pedig

$$c'(t) \times c''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = (6t^2, -6t, 2).$$

A simulósík egyenlete tehát $3t^2x - 3ty + z = t^3$. A megadott pont koordinátáinak $x = 2$, $y = -1/3$ és $z = -6$ helyettesítésével

$$0 = t^3 - 6t^2 - t + 6,$$
$$0 = (t-1)(t^2 - 5t - 6),$$

azaz a $t = 1$, illetve a $t = 6, -1$ paraméterű pontokról van szó.

3. Feladat. Számítsa ki a

$$c(t) = (t^3 - 2t^2 + 2t, t^2 + t, \frac{1}{2}t^2 + t + 1)$$

görbe görbületét a $t = 0$ paraméterű pontban és határozza meg a torziófüggvényt. Van-e a görbének olyan pontja, melyben érintőegyenese párhuzamos a $c(1)$ ponthoz tartozó simulósíkkal?

Megoldás: A görbületi formula alapján

$$c'(t) = (3t^2 - 4t + 2, 2t + 1, t + 1) \quad \Rightarrow \quad c'(0) = (2, 1, 1), c''(t) = (6t - 4, 2, 1) \quad \Rightarrow \quad c''(0) = (-4, 2, 1),$$

$$c'(0) \times c''(0) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -6, 8),$$

$$|c'(0)| = \sqrt{6},$$
$$|c'(0) \times c''(0)| = \sqrt{101},$$

ahonnan

$$\kappa(0) = \frac{|c' \times c''|}{|c'|^3}(0) = \frac{\sqrt{101}}{6\sqrt{6}}.$$

A torzióformula alapján:

$$c'''(t) = (6, 2, 1) \quad \Rightarrow \quad c'''(0) = (6, 2, 1),$$

$$c'(t) \times c''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3t^2 - 4t + 2 & 2t + 1 & t + 1 \\ 6t - 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 3t^2 + 6t - 6, -6t^2 - 6t + 8)$$

ahonnan

$$\tau(t) := \frac{\langle c' \times c'', c''' \rangle}{|c' \times c''|^2}(t) = \frac{6t - 10}{45t^4 + 108t^3 - 60t^2 - 168t + 101}.$$

A feladat második részének megoldásához meg kell határoznunk azokat a paramétereket, melyekre az érintőegyenes irányvektora merőleges a $c(1)$ ponthoz tartozó simulósík normálvektorára, hiszen ez párhuzamosságuk analitikus feltétele:

$$c'(t) = (3t^2 - 4t + 2, 2t + 1, t + 1) \quad \Rightarrow \quad c'(1) = (1, 3, 2), \; c''(t) = (6t - 4, 2, 1) \quad \Rightarrow \quad c''(1) = (2, 2, 1),$$

$$c'(1) \times c''(1) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 3, -4).$$

A megoldandó egyenlet tehát

$$-(3t^2 - 4t + 2) + 3(2t + 1) - 4(t + 1) = 0,$$

$$-3t^2 + 6t - 3 = 0$$

melynek kétszeres gyöke $t = 1$, azaz csak triviális megoldás van, hiszen a feladat geometriai okokból nyilvánvaló megoldása a $c(1)$ ponthoz tartozó érintőegyenes, mely illeszkedik a $c(1)$ ponthoz tartozó simulósíkra.

4. Feladat. Irja fel a $c(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$ hengeres csavarvonal érintőjének egyenletrendszerét a $t = \pi/3$ pontban és határozza meg az ívhosszt a $t = -\pi \ldots \pi$ paraméterek között.

Megoldás: az érintőegyenest a $c(\pi/3) = (1, \sqrt{3}, \pi/3)$ pontra kell illesztenünk. Az irányvektor pedig

$$c'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 1) \quad \Rightarrow \quad c'(\pi/3) = (-\sqrt{3}, 1, 1),$$

ahonnan az egyenes egyenletrendszere

$$-\frac{x-1}{\sqrt{3}} = y - \sqrt{3} = z - \frac{\pi}{3}.$$

Az ívhosszformula alapján: $|c'(t)| = \sqrt{5}$, azaz

$$\int_{-\pi}^{\pi} |c'(t)|\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{5}\, dt = 2\pi\sqrt{5}.$$

5. Feladat. Vezessen be ívhosszparamétert a $c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ hengeres csavarvonal mentén.

Megoldás: mivel

$$c'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b),$$

ezért az ívhosszfüggvény

$$\sigma(t) = \int_0^t |c'(s)|\, ds = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\, ds = \sqrt{a^2+b^2}\, t,$$

azaz $t = \sigma^{-1}(s)$ helyettesítéssel

$$\sigma^{-1}(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$c_*(s) = c \circ \sigma^{-1}(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{sb}{\sqrt{a^2+b^2}} \right).$$

6. Feladat. Határozza meg a $c(t) = (3\cos t, 3\sin t, 2 - 3\cos t - 3\sin t)$ parametrizált görbe deriváltvektorait a harmadrendűvel bezárólag. Írja fel a $t = \pi/2$ pontra illeszkedő érintőegyenes egyenletrendszerét.

Megoldás: az érintőegyenest a $c(\pi/2) = (0, 3, -1)$ pontra kell illesztenünk. Irányvektora pedig

$$c'(t) = (-3\sin t, 3\cos t, 3\sin t - 3\cos t) \quad \Rightarrow \quad c'(\pi/2) = (-3, 0, 3),$$

azaz az egyenletrendszer

$$-\frac{x}{3} = \frac{z+1}{3}, \; y = 3.$$

A magasabbrendű deriváltak kiszámítása rutinfeladat. A feladatban szereplő görbe az $x^2 + y^2 = 9$ egyenletű egyenes körhenger és a $z = 2 - x - y$ egyenletű sík metszeteként egy ellipszis, így az ívhossz kiszámítására nincs zárt formula (ld. elliptikus integrálok). Az ívhossz közelítése természetesen lehetséges a beírt polygonok (töröttvonalak) hosszának segítségével. Az alábbi értékek az intervallum 2^i db. egyenlő részre osztása esetén adódnak, miközben $i = 1, \ldots 10$; a számítások MAPLE segítségével történtek.

```
with(LinearAlgebra);
c := t -> <3*cos(t), 3*sin(t), 2-3*cos(t)-3*sin(t)>:
evalf(seq(sum(VectorNorm(c((k+1)*2*Pi/2^i)-c(2*k*Pi/2^i), 2), k = 0 .. 2^i-1),
i = 1 .. 10));
16.97056275, 23.18221983, 25.55452871, 26.04516545, 26.17116953, 26.20273183,
26.21062599, 26.21259973, 26.21309319, 26.21321650
```

7. Feladat. Határozza meg a

- $c(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\cdot t)$, $t = 0\dots 1$,
- $c(t) = (t^2, t^3)$, $t = 1\dots 2$,
- $c(t) = (e^{3t}, e^{-3t}, 3\sqrt{2}\cdot t)$, $t = 0\dots 1/3$,
- $c(t) = (\cos t, \sin t, \cos t, \sin t)$, $t = 0\dots 2\pi$

görbék ívhosszát.

Megoldás: az ívhosszformulára tekintettel

$$c'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}) \quad\Rightarrow\quad |c'(t)| = \sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2} = e^t + e^{-t},$$

azaz

$$\int_0^1 |c'(t)|\,dt = \left[e^t - e^{-t}\right]_0^1 = e - \frac{1}{e}.$$

Hasonlóan

$$c'(t) = (2t, 3t^2) \quad\Rightarrow\quad |c'(t)| = t\sqrt{4+9t^2},$$

legalábbis a szóban forgó intervallum fölött ($t = 1\dots 2$). Kapjuk tehát, hogy

$$\int_1^2 |c'(t)|\,dt = \frac{1}{27}\left[\left(4+9t^2\right)^{3/2}\right]_1^2 = \frac{1}{27}\left(40^{3/2} - 13^{3/2}\right).$$

Vegyük észre, hogy a harmadik görbe az első görbe képterét futja be (háromszoros sebességgel, harmadannyi idő alatt). Az ívhossz tehát ugyanakkora. Természetesen közvetlenül is kiszámolható. Ami az utolsó görbét illeti,

$$c'(t) = (-\sin t, \cos t, -\sin t, \cos t) \quad\Rightarrow\quad |c'(t)| = \sqrt{2}$$

a trigonometrikus Pitagorász-tételre tekintettel, azaz

$$\int_0^{2\pi} |c'(t)|\,dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

8. Feladat. Irja fel az

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

egyenletű ellipszis érintőjének egyenletét a $(2, 1)$ pontban.

Útmutatás: alkalmazzuk az ellipszis $c(t) = (\sqrt{8}\cos t, \sqrt{2}\sin t)$ paraméterezését. A ponthoz tartozó paraméter $t_0 = \pi/4$. Ezek után a $c(t_0)$ pontra illeszkedő és a $c'(t_0)$ irányvektorú síkbeli egyenes egyenletét kell meghatározni. Mivel azonban differenciálásnál a trigonometrikus függvények "egymásba mennek át", a paraméter meghatározásának problémája kiküszöbölhető: $\sqrt{8}\cos t = 2$ és $\sqrt{2}\sin t = 1$ ugyanis implikálja, hogy

$$-\sqrt{8}\sin t = -2 \quad \text{és} \quad \sqrt{2}\cos t = 1.$$

Az érintő egyenlete tehát $x + 2y = 4$.

9. Feladat. Irja fel az

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$$

egyenletű hiperbola érintőjének egyenletét a $(4, 2)$ pontban.

Útmutatás: alkalmazzuk a hiperbola $c(t) = (\sqrt{8}\cosh t, 2\sinh t)$ paraméterezését. Figyelembe véve, hogy

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

a ponthoz tartozó paraméterre vonatkozó

$$2\sinh t = e^t - e^{-t} = 2$$

egyenlet másodfokú egyenletre vezethető vissza az $x = e^t$ helyettesítéssel. A ponthoz tartozó paraméter

$$t_0 = \log(1 + \sqrt{2}).$$

Ezek után a $c(t_0)$ pontra illeszkedő és a $c'(t_0)$ irányvektorú síkbeli egyenes egyenletét kell meghatározni. Mivel azonban differenciálásnál a hiperbolikus függvények "egymásba mennek át", a paraméter meghatározásának problémája kiküszöbölhető: $\sqrt{8}\cosh t = 4$ és $2\sinh t = 2$ ugyanis implikálja, hogy

$$\sqrt{8}\sinh t = \sqrt{8} \quad \text{és} \quad 2\cosh t = \sqrt{8}.$$

Az érintő egyenlete tehát $x - y = 2$.

10. Feladat. Irja fel az $y = 3x^2 - 2x + 1$ parabola érintőjének egyenletét a $(1, 2)$ pontban. Mi lesz a pontba becsapodó, tengelypárhuzamos sugár irányvektora a visszaverődés után?

Útmutatás: alkalmazzuk a parabola $c(t) = (t, 3t^2 - 2t + 1)$ paraméterezését. A ponthoz tartozó paraméter $t_0 = 1$. Ezek után a $c(t_0)$ pontra illeszkedő és a $c'(t_0)$ irányvektorú síkbeli egyenes egyenletét kell meghatározni. Ismeretes a kúpszeletek elemi geometriájából, hogy a tengelypárhuzamos sugarak a parabola fókuszán keresztül verődnek visza. A fókusz meghatározásához keressük a parabola egyenletét az

$$(y - C)^2 = (x - A)^2 + (y - B)^2$$

alakban, ahol $F(A, B)$ a fókusz, az $y = C$ egyenes pedig a parabola vezéregyenese. Kibontva a négyzeteket

$$2(B - C)y = x^2 - 2Ax + A^2 + B^2 - C^2.$$

Összevetve a megadott egyenlettel,

$$2(B - C) = \frac{1}{3},\ 2A = \frac{2}{3},\ A^2 + B^2 - C^2 = \frac{1}{3},$$

ahonnan

$$A = \frac{1}{3},\ B - C = \frac{1}{6},\ B^2 - C^2 = \frac{2}{9},$$
$$A = \frac{1}{3},\ B - C = \frac{1}{6},\ (B-C)(B+C) = \frac{2}{9},$$
$$A = \frac{1}{3},\ B - C = \frac{1}{6},\ B + C = \frac{4}{3},$$
$$A = \frac{1}{3},\ B = \frac{3}{4},\ C = \frac{7}{12}.$$

11. Feladat. Számítsa ki

(i) annak az ellipszisnek a területét, melynek nagyobbik féltengelye a, kisebbik pedig b hosszúságú,

(ii) a $c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (\cos t(1+\cos t), \sin t(1+\cos t))$ kardioid ívhosszát és az általa határolt síktartomány területét,

(iii) a $c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (\cos^3 t, \sin^3 t)$ asztroid ívhosszát és az általa határolt síklemez területét.

Útmutatás: a $c(t) = (x(t), y(t))$ egyszerű zárt ív által határolt D tartomány előjeles területét az

$$\frac{1}{2}\int_a^b y(t)x'(t) - x(t)y'(t)\, dt$$

integrálformula segítségével számíthatjuk ki. Az ellipszis esetében $x(t) = a\cos t$, $y = b\sin t$ és az integrandus

$$y(t)x'(t) - x(t)y'(t) = -ab \quad \Rightarrow \quad \text{az ellipszis területe} = \pi ab.$$

A kardioid (körön gördülő, azonos sugarú külső kör) ívhossza:

$$x'(t) = -\sin t(1+\cos t) - \cos t \sin t = -\left(\sin t + \sin(2t)\right), \quad y'(t) = \cos t + \cos(2t),$$
$$|c'(t)|^2 = 2\left(1 + \cos(2t)\cos t + \sin(2t)\sin t\right) = 2\left(1 + \cos(2t - t)\right) = 2(1+\cos t) =$$
$$2(1 + \cos^2(t/2) - \sin^2(t/2)) = 4\cos^2(t/2),$$

ahonnan

$$L(c) = 2\int_0^{2\pi} |\cos(t/2)|\, dt = 4\int_0^{\pi} \cos(t/2)\, dt = 8.$$

A határolt terület:

$$y(t)x'(t) = -\sin t(1+\cos t)(\sin t + \sin(2t)), \quad x(t)y'(t) = \cos t(1+\cos t)(\cos t + \cos(2t)),$$

ahonnan

$$y(t)x'(t) - x(t)y'(t) = -(1+\cos t)^2 \quad \Rightarrow \quad \text{a határolt terület} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos t)^2\, dt = \frac{3}{2}\pi.$$

Az asztroid (körön gödülő, negyed sugarú belső kör) ívhossza

$$L(c) = 3\int_0^{2\pi} |\cos t \sin t|\, dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} |\sin(2t)|\, dt = 6\int_0^{\pi/2} \sin(2t)\, dt = 6,$$

míg a határolt terület

$$\frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\, dt = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\, dt = \frac{3}{8}\pi.$$

12. Feladat. Igazolja, hogy ha a gyorsulásvektor párhuzamos a helyvektorral, akkor a pálya síkgörbe és a helyvektor (vezérsugár) egyenlő időközönként egyenlő területet súrol.

Útmutatás. Feltétel szerint $c \times c'' = \mathbf{0}$, ami azt jelenti, hogy

$$(c \times c')' = c' \times c' + c \times c'' = \mathbf{0},$$

azaz $c \times c'$ a paramétertől független vektor, mely merőleges mindkét tényezőjére (síkgörbe) és természetesen a hossza is állandó (területi sebesség).

13. Feladat. Határozza meg az

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

egyenletű ellipszis görbületét a $(2, -3)$ pontban. Hol vannak a $c(t) = (a\cos t, b\sin t)$ parametrizált ellipszis görbületének szélsőértékei?

Megoldás: alkalmazzuk az ellipszis $c(t) = (4\cos t, 2\sqrt{3}\sin t, 0)$ paraméterezését. A ponthoz tartozó paraméterérték $t_0 = -\pi/3$. A görbületi formulára tekintettel

$$c'(t) = (-4\sin t, 2\sqrt{3}\cos t, 0) \quad \Rightarrow \quad c'(t_0) = (2\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0),$$

$$c''(t) = (-4\cos t, -2\sqrt{3}\sin t, 0) \quad \Rightarrow \quad c''(t_0) = (-2, 3, 0),$$

$$c'(t_0) \times c''(t_0) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 8\sqrt{3}),$$

$$|c'(t_0)| = \sqrt{15},$$

$$|c'(t_0) \times c''(t_0)| = 8\sqrt{3},$$

ahonnan

$$\kappa(t_0) = \frac{|c' \times c''|}{|c'|^3}(t_0) = \frac{8\sqrt{3}}{15\sqrt{15}} = \frac{8}{15\sqrt{5}}.$$

Vegyük észre, hogy a szóban forgó paraméterezésnél

$$c'(t) \times c''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a\sin t & b\cos t & 0 \\ -a\cos t & -b\sin t & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, ab),$$

azaz

$$\kappa = \frac{|c' \times c''|}{|c'|^3} = \frac{ab}{|c'|^3}.$$

A görbület minimumának és maximumának meghatározásához tehát a deriváltvektor hosszának a maximumát és minimumát kell meghatároznunk:

$$|c'(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = \sqrt{(a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2}.$$

Ez azt jelenti, hogy a maximumot a $t = \pm\pi/2$ paramétereknél, míg a minimumot a $t = 0, \pi$ paramétereknél találjuk periodicitástól eltekintve. Ezek éppen az ellipszis tengelyeinek végpontjai, azaz az ellipszis görbülete a kistengely végpontjaiban a legkisebb, a nagytengely végpontjaiban pedig a legnagyobb.

14. Feladat. Határozza meg a $\kappa_e(s) = 1/\sqrt{s}$ előjeles görbületű ún. archimédeszi spirál paraméterezését.

Megoldás: az első lépés a hajlásszögfüggvény meghatározása a

$$\theta'(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

differenciálegyenlet megoldásával: $\theta(t) = 2\sqrt{s} + s_0$. Ez azt jelenti, hogy

$$x'(s) = \cos\left(2\sqrt{s} + s_0\right), \quad y'(s) = \sin\left(2\sqrt{s} + s_0\right).$$

Az egyszerűség kedvéért legyen $s_0 = 0$. Az $\omega = 2\sqrt{s}$ helyettesítést végrehajtva és parciálisan integrálva

$$\int \cos\left(2\sqrt{s}\right)\, ds = \frac{1}{2}\int \omega \cos\omega \, d\omega = \frac{1}{2}\omega\sin\omega - \frac{1}{2}\int \sin\omega \, d\omega =$$

$$\frac{1}{2}\omega\sin\omega + \frac{1}{2}\cos\omega + C,$$

ahonnan

$$x(s) = \sqrt{s}\sin\left(2\sqrt{s}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2\sqrt{s}\right) + x_0.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$y(s) = -\sqrt{s}\cos\left(2\sqrt{s}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(2\sqrt{s}\right) + y_0.$$

Hivatkozások

[1] Kozma László, Kovács Zoltán, Görbék és felületek elemi differenciálgeometriája, Debrecen – Nyíregyháza 2011.

[2] John Roe: Elementary Geometry, Oxford University Press, 1993.

[3] Serény György, Formális és szemléletes vektoranalízis, Műegyetemi Kiadó, 2002.

[4] Szőkefalvi-Nagy Gyula, Gehér László, Nagy Péter, Differenciálgeometria, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

[5] Vincze Csaba, A vektoranalízis alapjai, kézirat, 2019.