Ellenőrző kérdések: az affin geometria alapjai

Vincze Csaba

Debreceni Egyetem

2020. március 31.

Az affin geometria axiómái

1. Feladat. Ismertesse az affin párhuzamossági axiómát.

2. Feladat. Adja meg az affin tér vektortérmodelljének egyeneseit és fogalmazzon meg szükséges és elegendő feltételt az egyenesek párhuzamosságára.

3. Feladat. Igazolja a Desargues-tételt.

4. Feladat. Igazolja a Desargues-tétel affin alakját.

5. Feladat. Mit állít a kis Desagues-tétel?

6. Feladat. Mutassa meg, hogy a Desargues-tétel bizonyításának nincs alternatívája az affin síkon, azaz az affin sík axiómáinak segítségével nem dönthető el, hogy az állítás igaz, vagy hamis.

Útmutatás. Ismertesse az affin sík Moulton-féle modelljét: a Moulton-féle affin síkban konstruált ellenpélda mutatja, hogy az affin sík axiómáinak segítségével Desargues tétele nem igazolható (elegendő a modell egyeneseinek, illetve az ellenpéldának a grafikus megjelenítése). Másfelől azonban egy affin tér minden síkjában (ilyen például a háromdimenziós vektortérmodell egy síkja, azaz az affin sík vektortérmodellje) érvényes a Desargues-tétel, azaz az affin sík axiómáinak segítségével nem is cáfolható.

Affin transzformációk, nyújtások: transzlációk és homotéciák

7. Feladat. Definiálja az affin transzformáció fogalmát.

8. Feladat. Mit értünk nyújtáson?

9. Feladat. Igazolja, hogy ha egy nyújtásnak P fixpontja, akkor bármely P-re illeszkedő egyenes invariáns.

Útmutatás. Ld. a nyújtások fixponttétele.

10. Feladat. Igazolja, hogy ha P nem fixpont, akkor P és a $\varphi(P)$ képpont által meghatározott egyenes a nyújtás invariáns egyenese.

Útmutatás. Ld. a nyújtások fixponttétele.

11. Feladat. Miért nem lehet egy fixpontmentes nyújtás két invariáns egyenese metsző?

12. Feladat. Igazolja, hogy egy nyújtásnak legfeljebb egy fixpontja van.

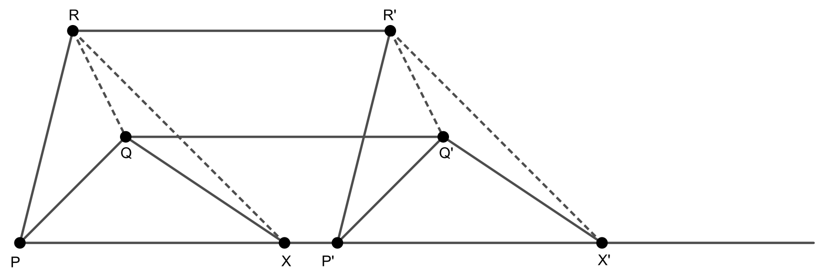
Útmutatás. Ld. a nyújtások fixponttétele.

13. Feladat. Mondja ki és igazolja a nyújtások fixponttételét.

14. Feladat. Definiálja a transzláció fogalmát.

15. Feladat. Szerkessze meg a Q pont képét annál a transzlációnál, mely a P pontot a P' pontba viszi (1. Ábra). Hogyan módosul az eljárás a P és P' egyenesére illeszkedő pontok esetében?

Útmutatás. Ld. a transzlációk egzisztencia- és unicitástétele (elegendő a szerkesztések menetének leírása).

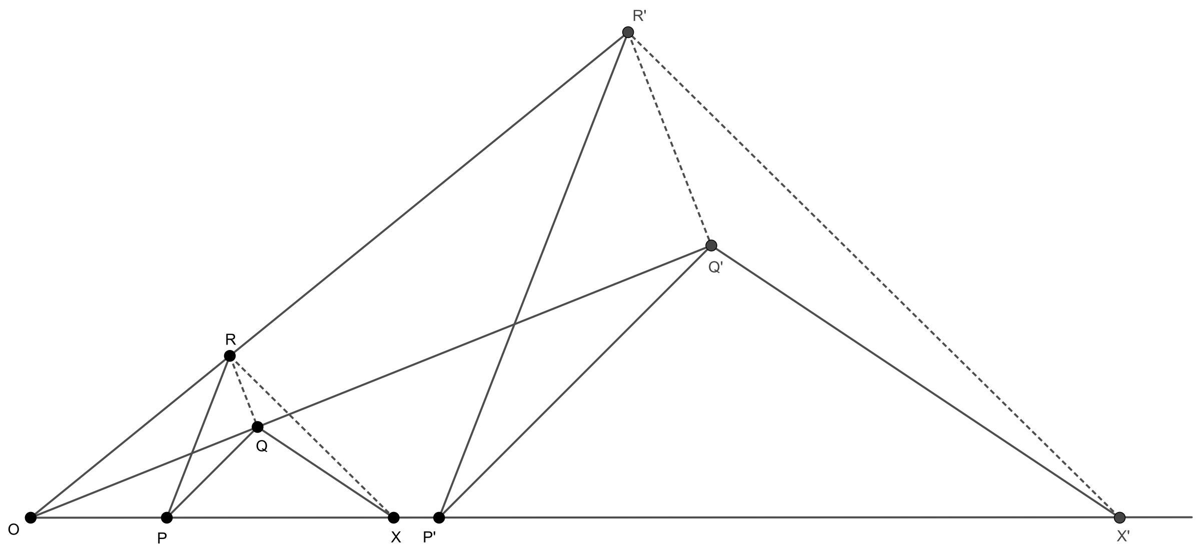


1. ábra. Transzlációk

16. Feladat. Értelmezze az 1. Ábrát a transzlációk egzisztencia- és unicitástételének szempontjából. Mi az R pont szerepe és a Desargues-féle tételcsalád melyik tagjának alkalmazásáról van szó? Hányszor kell alkalmaznunk a tételt?

17. Feladat. Mondja ki és igazolja a transzlációk egzisztencia- és unicitástételét.

18. Feladat. Definiálja a homotécia fogalmát.



2. ábra. Homotéciák

19. Feladat. Szerkessze meg a Q pont képét annál az O centrumú homotéciánál, mely a P pontot a P' pontba viszi (2. Ábra). Hogyan módosul az eljárás a P és P' egyenesére illeszkedő pontok esetében?

Útmutatás. Ld. a homotéciák egzisztencia- és unicitástétele (elegendő a szerkesztések menetének leírása).

20. Feladat. Értelmezze a 2. Ábrát a homotéciák egzisztencia- és unicitástételének szempontjából. Mi az R pont szerepe és a Desargues-féle tételcsalád melyik tagjának alkalmazásáról van szó? Hányszor kell alkalmaznunk a tételt?

21. Feladat. Mondja ki és igazolja a homotéciák egzisztencia- és unicitástételét.

Szabadvektorok

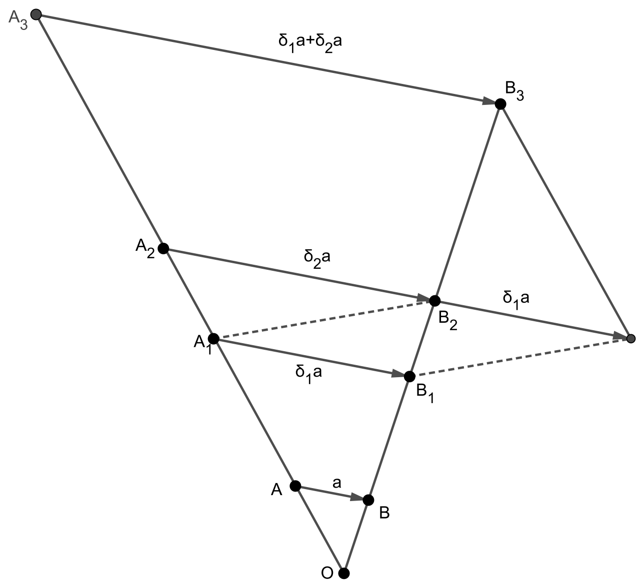
"A [szabad]vektor tulajdonképpen ugyanaz, mint az eltolás [transzláció], csak éppen a vektoroknál és az eltolásoknál más a szóhasználat" (H. Weyl).

22. Feladat. Értelmezze a szabadvektor fogalmát.

23. Feladat. Értelmezze a szabadvektorok összeadásának műveletét. Milyen algebrai struktúrát alkotnak a szabadvektorok az összeadás műveletére nézve?

24. Feladat. Értelmezze a szabadvektorok szorzását homotéciával.

25. Feladat. Értelmezze az összeadás műveletét a közös centrumú homotéciák körében. Milyen algebrai struktúrát alkotnak az elfajuló homotéciával bővített közös centrumú homotéciák az összeadás és a leképezéskompozíció, mint szorzás műveletére nézve?



3. ábra. Homotéciák összege

26. Feladat. A 3. Ábra alapján ismertesse az A_3 képpont szerkesztésének menetét, ahol a δ_1 homotécia az A pontot az A_1-be, a δ_2 homotécia az A pontot az A_2-be, összegük pedig az A pontot az A_3-ba viszi.

27. Feladat. Egészítse ki a mondatot: a szabadvektorok .... - dimenziós, baloldali .... alkotnak az O centrumú homotéciák elfajuló homotéciával bővített halmaza, mint .... felett.

28. Feladat. Reprezentáljon bázist a szabadvektorok vektorterében. Milyen geometriai módszerrel kapjuk egy szabadvektor előállítását az adott bázisban?

Útmutatás. Tekintsük az O, A, B és C általános helyzetű pontokat és alkalmazzuk a párhuzamos vetítés technikáját.

29. Feladat. Adjon illeszkedéstartó bijekciót az affin tér és a szabadvektorok vektorterének affin struktúrája között.

Illeszkedéstartó bijekció birtokában azt mondhatjuk, hogy minden affin tér izomorf a szabadvektorok csatolt vektorterének affin struktúrájával. H. Weyl[1] éppen ezt felhasználva fogalmazta meg az affin tér modern definícióját, ami a vektortérstruktúrából kiindulva garantálja a geometriai struktúra jellegzetességeit. Az általunk is követett klasszikus út tárja fel a Weyl-féle megközelítés mélyebb matematikai tartalmát. "Még annyit kell mindezekhez hozzátenni, hogy egy geometriai rendszert többféle, egymással ekvivalens axiómarendszerrel lehet megadni. A XX. század második felében leginkább a Hermann Weyl Tér, idő, anyag című, 1918-ban kiadott tankönyvében leírt, igen egyszerű pont-vektor axiomatika használata terjedt el" (R. Bonola: Az euklideszi geometria története (Függelék a magyar kiadáshoz), Ford.:Hack Frigyes, Budapest, 2002.).

[1] Hermann Weyl (1885-1955), német matematikus, D. Hilbert és H. Poincaré mellett a XX. századi matematika egyik meghatározó egyénisége.

A valós affin geometria alaptétele

30. Feladat. Mit jelent az, hogy egy affin térben erős illeszkedési axiómák érvényesek?

31. Feladat. Mi az erős illeszkedési axiómák szerepe az elméletben?

32. Feladat. Igazolja, hogy erős illeszkedési axiómák teljesülése esetén a vektortérmodell egyenestartó bijekciói (affin transzformációi) additív leképezések.

Útmutatás. Ld. a 4. Lemma bizonyításának első része.

33. Feladat. Adjon példát olyan testre, melynek van a triviálistól különböző automorfizmusa.

Útmutatás. Ld. 6. Megjegyzés.

34. Feladat. Mondja ki az affin transzformációk alaptételét.

35. Feladat. Igazolja a valós affin geometria alaptételét.

Az affin geometria alaptételét napjainkig tárgyalja a szakirodalom, gyengítve a kölcsönösen egyértelműség követelményén, vagy az egyenestartást csupán irányoknak egy véges halmazához tartozó egyenesekre vonatkozóan előírva.

Az affin geometria klasszikus tételei: a párhuzamos szelők tétele, a Menelaosz- és a Ceva-tétel

36. Feladat. Értelmezze kollineáris pontok osztóviszonyát a (valós) vektortérmodellben.

37. Feladat. Igazolja, hogy az osztóviszony az affin transzformációk invariánsa.

Néhány - közvetlen számolással ellenőrizhető - azonosság:

$$(P_1P_2P_3)(P_2P_1P_3) = 1 \tag{1}$$

$$(P_1P_2P_3)(P_3P_1P_2)(P_2P_3P_1) = 1 \tag{2}$$

$$(\hat{P}_1P_2P_3P_4)(\hat{P}_3P_1P_2P_4)(\hat{P}_2P_3P_1P_4) = -1, \tag{3}$$

ahol a $\hat{}$ operátor törli az argumentumát.

38. Feladat. A (3) azonosság segítségével igazolja a párhuzamos szelők tételét. A bizonyítás egyes lépéseit illusztrálja ábrákkal.

39. Feladat. Mondja ki és illusztrálja ábrával Menelaosz tételét.

40. Feladat. Mondja ki és illusztrálja ábrával Ceva tételét.