Ellenőrző kérdések: euklideszi vektorterek

Vincze Csaba

Debreceni Egyetem

2020. március 31.

Belső szorzat, norma, távolság és szög

1. Feladat. Értelmezze a belső (skaláris) szorzat fogalmát valós vektortérben és adjon rá példát.

2. Feladat. Vezesse be a norma és a távolság fogalmát euklideszi vektortérben.

3. Feladat. Igazolja a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget.

4. Feladat. Vezesse be a szög és az ortogonalitás fogalmát euklideszi vektortérben. Minek alapján állíthatjuk, hogy a definíció értelmes?

5. Feladat. Tekintsük a b_2 és az $e_1 \neq \mathbf{0}$ vektorokat egy euklideszi vektortérben. Mit értünk a b_2 vektor e_1-re vonatkozó Fourier-együtthatóján?

6. Feladat. Ismertesse a Gram-Schmidt-féle ortogonalizálási eljárás lépéseit.

7. Feladat. Ismertesse és oldja meg a Fourier-együtthatók minimum-tulajdonságával kapcsolatos approximációs problémát.

Vektoriális és vegyes szorzat

Ebben az alfejezetben $V = \mathbb{R}^3$, ami az általános elmélet alapján csupán annyit jelent, hogy rögzítettünk egy ortonormált bázist a háromdimenziós V euklideszi vektortérben.

8. Feladat. Definiálja a vektoriális szorzás műveletét és írja fel a kiszámítási formulát.

9. Feladat. Mi a vektoriális szorzat eltünésének geometriai jelentése?

10. Feladat. Sorolja fel és igazolja a vektoriális szorzat geometriai tulajdonságait.

Útmutatás. Ld. 1. Állítás.

11. Feladat. Sorolja fel és igazolja a vektoriális szorzat algebrai tulajdonságait.

Útmutatás. Ld. 2. Tétel.

12. Feladat. Értelmezze a vegyes szorzat fogalmát. Mi a vegyes szorzat eltünésének geometriai jelentése?

13. Feladat. Számítsa ki a $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$ és $v_3 = (-1, 1, 1)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát. Mekkora a v_1 és v_2 vektorokkal párhuzamos laphoz tartozó magasság?

14. Feladat. Lineárisan függők, vagy függetlenek a

- $v_1 = 2e_1 - e_2 + 2e_3,\quad v_2 = e_1 + 2e_2 - 3e_3$ és $v_3 = 3e_1 - 4e_2 + 7e_3,$
- $v_1 = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3,\quad v_2 = 3e_1 + 4e_2 - 5e_3$ és $v_3 = 3e_1 + 3e_2 + 3e_3$

vektorok?

15. Feladat. Vezesse le a $P(x^0, y^0, z^0)$ pontra illeszkedő, $v = (v^1, v^2, v^3)$ irányvektorú térbeli egyenes egyenletrendszerét. Milyen speciális alakot ölt az egyenletrendszer a $v^3 = 0$, de $v^1 \neq 0$ és $v^2 \neq 0$ esetben?

16. Feladat. Vezesse le a $P(x^0, y^0, z^0)$ pontra illeszkedő, $v = (v^1, v^2, v^3)$ és $w = (w^1, w^2, w^3)$ vektorokkal párhuzamos sík egyenletét. Mi a fellépő A, B és C együtthatók geometriai jelentése?

Másodrendű görbék és felületek

Másodrendű görbék

17. Feladat. Értelmezze a másodrendű görbe fogalmát a síkon.

18. Feladat. Igazolja, hogy a szimmetrikus $\begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix}$ magmátrix karakterisztikus polinomjának diszkriminánsa nemnegatív, azaz van két, esetleg egybeeső valós gyöke - a magmátrix sajátértékei.

19. Feladat. Irja fel a másodrendű görbe egyenletét a magmátrix sajátvektoraiból álló ortonormált bázisra vonatkozóan.

Útmutatás. Legyen M a bázistranszformáció mátrixa. Figyelembe véve, hogy $M^T = M^{-1}$, alkalmazzuk a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (x', y')M^T = (x, y),$$

$$M^T \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} M = M^{-1} \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

transzformációs formulákat:

$$(x, y) \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (a, b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = (x', y')M^T \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$$

$$a'x' + b'y' + c' = (x', y') \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + a'x' + b'y' + c',$$

azaz

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + a'x' + b'y' + c' = 0, \tag{1}$$

ahol $c' = c$ és $(a', b') = (a, b)M$.

20. Feladat. Osztályozza a másodrendű görbéket reguláris magmátrix esetén.

Útmutatás. Mivel

$$\begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} \neq 0$$

és a determináns független a bázis választásától, ezért

$$0 \neq \begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2,$$

azaz nincs eltünő sajátérték. A (1) egyenletben teljes négyzeteket bevezetve végezhető el az osztályozás:

$$\lambda_1 \left(x' - \frac{a'}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' - \frac{b'}{2\lambda_2} \right)^2 = \lambda_1 \left(\frac{a'}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(\frac{b'}{2\lambda_2} \right)^2 - c'$$

következik, azaz a görbénk

- ellipszis (a determináns pozitív, a sajátértékek közös előjele megegyezik a jobb oldal előjelével), pl.

$$9 \left(x' - \frac{a'}{18} \right)^2 + 17 \left(y' - \frac{b'}{34} \right)^2 = C > 0,$$

- üreshalmaz (a determináns pozitív, a sajátértékek közös előjele különbözik a jobb oldal előjelétől), pl.

$$9 \left(x' - \frac{a'}{18} \right)^2 + 17 \left(y' - \frac{b'}{34} \right)^2 = C < 0,$$

- egyetlen pont (a determináns pozitív, a jobb oldal zérus), pl.

$$9 \left(x' - \frac{a'}{18} \right)^2 + 17 \left(y' - \frac{b'}{34} \right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad P \left(\frac{a'}{18}, \frac{b'}{34} \right),$$

- hiperbola (a determináns negatív, a jobb oldal nem zérus), pl.

$$9 \left(x' - \frac{a'}{18} \right)^2 - 17 \left(y' - \frac{b'}{34} \right)^2 = C \neq 0,$$

- metsző egyenespár (a determináns negatív, a jobb oldal zérus), pl.

$$9 \left(x' - \frac{a'}{18} \right)^2 - 17 \left(y' - \frac{b'}{34} \right)^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \pm 3 \left(x' - \frac{a'}{18} \right) = \sqrt{17} \left(y' - \frac{b'}{34} \right).$$

21. Feladat. Osztályozza a másodrendű görbéket szinguláris magmátrix esetén.

Útmutatás. Mivel

$$\begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} = 0$$

és a determináns független a bázis választásától, ezért

$$0 = \begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2,$$

azaz pl. $\lambda_1 = 0$ (ha mindkét sajátérték eltünik, akkor a (1) egyenletben nincsenek másodfokú tagok, így másodrendű görbéről sem beszélhetünk): az (1) egyenlet tehát az

$$\lambda_2 \left(y' - \frac{b'}{2\lambda_2}\right)^2 + a'x' = \left(\frac{b'}{2\lambda_2}\right)^2 - c'$$

alakot ölti és görbénk

- parabola (a determináns zérus, $a' \neq 0$), pl.

$$17\left(y' - \frac{b'}{34}\right)^2 - x' = \left(\frac{b'}{34}\right)^2 - c',$$

- üreshalmaz (a determináns zérus, $a' = 0$ és a nemzérus sajátérték előjele különbözik a jobb oldal előjelétől), pl.

$$17\left(y' - \frac{b'}{34}\right)^2 = \left(\frac{b'}{34}\right)^2 - c' < 0,$$

- tengelypárhuzamos egyenespár (a determináns zérus, $a' = 0$ és a nemzérus sajátérték előjele megegyezik a jobb oldal előjelével),

$$17\left(y' - \frac{b'}{34}\right)^2 = \left(\frac{b'}{34}\right)^2 - c' > 0 \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{b'}{34} = \pm\sqrt{\frac{(b'/34)^2 - c'}{17}},$$

- kettős egyenes (a determináns zérus, $a' = 0$ és a jobb oldal zérus), pl.

$$17\left(y' - \frac{b'}{34}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{b'}{34} = 0.$$

A koordináták szimmetrikus szerepére tekintettel az másodrendű görbék áttekintése ezzel teljes.

Másodrendű felületek

22. Feladat. Értelmezze a másodrendű felület fogalmát a térben.

23. Feladat. Egészítse ki a mondatokat.

Mivel a (szimmetrikus) magmátrix harmadrendű, ezért karakterisztikus polinomjának a foka ...., ami azt jelenti, hogy biztosan van legalább egy .... A karakterisztikus polinom gyöke a magmátrix .... Mivel az ehhez tartozó .... ortogonális komplementere invariáns a magmátrix hatásával szemben, ezért - a kétdimenziós esetben látottakat követve - folytathatjuk a mátrix diagonalizálását, azaz a .... és a hozzájuk tartozó .... keresését az invariáns (kétdimenziós) altérben. Van tehát a térben olyan ortonormált bázis, melynek tagjai a magmátrix .... Áttérve erre a bázisra, a koordinátatranszformációs formulák szerint a másodrendű felület egyenlete az

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + a'x' + b'y' + c'z' + d' = 0 \tag{2}$$

alakot ölti, ahol λ_1, λ_2 és λ_3 a magmátrix ....

24. Feladat. Adjon példát másodrendű felületre reguláris magmátrix esetén.

25. Feladat. Diszkutálja a $\lambda_3 = 0$, de $\lambda_1 \neq 0$ és $\lambda_2 \neq 0$ elfajuló esetet.

Útmutatás. A (2) formula alapján a másodrendű felület egyenlete

$$\lambda_1 \left(x' - \frac{a'}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y' - \frac{b'}{2\lambda_2}\right)^2 + c'z' = \lambda_1 \left(\frac{a'}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(\frac{b'}{2\lambda_2}\right)^2 + d',$$

ami $c' = 0$ esetén a $z' = 0$ sík

$$\lambda_1 \left(x' - \frac{a'}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y' - \frac{b'}{2\lambda_2}\right)^2 = \lambda_1 \left(\frac{a'}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(\frac{b'}{2\lambda_2}\right)^2 + d' \tag{3}$$

egyenletű másodrendű görbéje fölötti hengerfelület, hiszen z' tetszőleges lehet ($c' = 0$). A 20. Feladat eredménye szerint tehát elliptikus henger, üreshalmaz, tengelypárhuzamos egyenes, hiperbolikus henger, vagy metsző síkpár. Ha $c' \neq 0$, akkor az ún. elliptikus, illetve hiperbolikus paraboloidokat kapjuk.

26. Feladat. Melyik eset diszkussziója adja a parabolikus hengert?

Útmutatás. Az előző feladattal kapcsolatos meggondolásokat figyelembe véve legyen pl. $\lambda_3 = 0$ és $c' = 0$ (hengerszerű alakzat, hiszen z' tetszőleges lehet), míg a $z' = 0$ egyenletű síkban a (1) egyenlet parabolát kell, hogy adjon, azaz legyen pl. $\lambda_1 = 0$, de $a' \neq 0$ a 21. Feladat eredménye szerint.

Az euklideszi terek izometriái, az ortogonális csoport

27. Feladat. Definiálja az izometria és az ortogonális transzformáció fogalmát. Mit értünk forgáson?

28. Feladat. Igazolja, hogy minden izometria egy eltolás és egy ortogonális transzformáció szorzata.

29. Feladat. Irja fel a hiperaltérre vonatkozó tükrözés analitikus képletét és a tol-tükröz-tol szabály alapján írja fel a hipersíkokra vonatkozó tükrözés analitikus képletét is.

30. Feladat. Igazolja, hogy az n-dimenziós euklideszi vektortér minden ortogonális transzformációja legfeljebb n darab hiperaltérre vonatkozó tükrözés szorzata. Mi következik ebből az n-dimenziós euklideszi vektortér izometriáira?

Az euklideszi sík ortogonális csoportja

31. Feladat. Az analitikus képlet alapján írja fel a $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ irányvektorú, origóra illeszkedő egyenesre vonatkozó tükrözés mátrixát.

Útmutatás. Az analitikus képlet alkalmazásához a hiperaltér (esetünkben az origóra illeszkedő egyenes) normálvektorára van szükség: $\mathbf{n} = (-\sin\theta, \cos\theta)$, azaz

$$\rho(x, y) = (x, y) - 2\langle(x, y), \mathbf{n}\rangle\mathbf{n}.$$

A mátrixreprezentáns oszlopait az $e_1 = (1,0)$ és $e_2 = (0,1)$ elemek képeinek koordinátáival kell kitöltenünk:

$$\rho(1,0) = (1,0) - 2\langle(1,0),\mathbf{n}\rangle\mathbf{n} = (1,0) + 2\sin\theta(-\sin\theta,\cos\theta) = (1-2\sin^2\theta, 2\sin\theta\cos\theta),$$

$$\rho(0,1) = (0,1) - 2\langle(0,1),\mathbf{n}\rangle\mathbf{n} = (0,1) - 2\cos\theta(-\sin\theta,\cos\theta) = (2\sin\theta\cos\theta, 1-2\cos^2\theta).$$

Tekintettel a

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta,$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1,\ \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

azonosságokra, a mátrixreprezentáns

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

32. Feladat. Az előző feladat eredménye alapján írja fel az origóra illeszkedő, $v_1 = (\cos\theta_1, \sin\theta_1)$, illetve $v_2 = (\cos\theta_2, \sin\theta_2)$ irányvektorú egyenesekre vonatkozó tükrözések szorzatának mátrixát - forgásmátrix.

Útmutatás.

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta_2 & \sin 2\theta_2 \\ \sin 2\theta_2 & -\cos 2\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\theta_1 & \sin 2\theta_1 \\ \sin 2\theta_1 & -\cos 2\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\left(\theta_2 - \theta_1\right) & -\sin 2\left(\theta_2 - \theta_1\right) \\ \sin 2\left(\theta_2 - \theta_1\right) & \cos 2\left(\theta_2 - \theta_1\right) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

ahol $\theta = 2\left(\theta_2 - \theta_1\right)$ az ún. forgásszög (a tengelyek szögének kétszerese).

Az euklideszi tér ortogonális csoportja

33. Feladat. Írja fel az euklideszi tér egy forgásának a mátrixát. Milyen bázisra vonatkozóan reprezentálja a mátrix a szóban forgó transzformációt?

34. Feladat. Írja fel az euklideszi tér egy nemvalódi forgásának a mátrixát. Milyen bázisra vonatkozóan reprezentálja a mátrix a szóban forgó transzformációt?

35. Feladat. Hogyan bontható mátrixok szorzatára egy nemvalódi forgás mátrixa és ennek megfelelően milyen transzformációk kompozíciójaként állítható elő?