Ellenőrző kérdések: differenciálgeometria

Vincze Csaba

Debreceni Egyetem

2020. április 9.

Görbeelmélet

1. Feladat. Mikor nevezünk egy reguláris parametrizált görbét

- egyszerű ívnek?
- egyszerű zárt ívnek?

Mit értünk görbén?

2. Feladat. Paraméterezze

- a $P(-1,2,1)$ és $Q(1,-1,4)$ pontokat összekötő egyenes szakaszt a térben,
- a $C(1,2)$ középpontú, $r=3$ sugarú körvonalat a síkon,
- azt az emelkedő hengeres csavarvonalat, melynek alapköre 2 egység sugarú és pályasebessége 5 egység.

3. Feladat. Értelmezze az ívhosszfüggvényt és igazolja, hogy az ívhosszfüggvény inverzével átparaméterezett görbe pályasebessége konstans 1.

4. Feladat. Mit értünk görbületen ívhosszparaméterezett görbe esetén? Írja fel a görbület kiszámítására vonatkozó általános formulát.

5. Feladat. Mit értünk egy parametrizált görbe adott pontbeli simulósíkján? Milyen **szemléletes** határátmenettel származtatható a simulósík?

6. Feladat. Értelmezze a Frenet-féle háromél tagjait és írja fel a Frenet-egyenleteket.

7. Feladat. Irja fel a torzió kiszámítására vonatkozó formulát.

8. Feladat. Igazolja, hogy egy bireguláris egyszerű ív torziója pontosan akkor zérus, ha síkgörbe.

9. Feladat. Ismertesse a görbeelmélet alaptételét (egzisztencia, unicitás).

10. Feladat. A hajlásszögfüggvény segítségével igazolja, hogy a sík konstans görbületű görbéi az egyenesek (a görbület zérus) és a körvonalak (a görbület zérustól különböző konstans).

Felületek

11. Feladat. Mikor nevezünk egy reguláris parametrizált felületet elemi felületnek? Mit értünk felületen?

12. Feladat. Hogyan számítjuk ki a felszínt?

13. Feladat. Paraméterezze

- a $v = (1, 2, 1)$ és $w = (2, 3, -1)$ vektorok által kifeszített paralelogrammát, mint síkfelületet a térben,
- azt a hengerpalástot, melynek alapköre az origó középpontú, $r = 3$ sugarú kör és magassága 5 egység,
- az origó középpontú, $r = 7$ sugarú gömbfelületet.

14. Feladat. Ismertesse az első alapmennyiségekre vonatkozó kiszámítási formulákat és egészítse ki a mondatot: az első alapmennyiségek a felületi görbék .... kiszámítási formulájában felbukkanó, ... geometriai adatok.

15. Feladat. Értelmezze a Gauss-féle hároméi tagjait és írja fel a Gauss-egyenleteket.

16. Feladat. Irja fel a Weingarten-egyenleteket és igazolja, hogy a felületi egységnormális parciális deriváltjainak nincs a felületre merőleges komponense, azaz $a_1 = a_2 = 0$.

17. Feladat. Ismertesse a második alapmennyiségekre vonatkozó kiszámítási formulákat.

18. Feladat. Hogyan számítjuk ki a formaoperátor mátrixát?

19. Feladat. Egészítse ki a mondatokat: a formaoperátor mátrixának .... főgörbületeknek nevezzük. A hozzájuk tartozó .... az ún. főirányok. A felület Gauss-féle szorzatgörbületén a .... értjük, azaz a formaoperátor mátrixának a ....

20. Feladat. Irja fel a Gauss-görbület kiszámítására vonatkozó formulát. Mit állít a Theorema Egregium?

Gyakorló feladatok: görbeelmélet

21. Feladat. Irja fel a $c(t) = (t, t^2, t^3)$ görbe érintőegyenesének egyenletrendszerét a $t = 1$ paraméterű pontban és határozza meg a görbületfüggvényt.

22. Feladat. Irja fel a

$$c(t) = (t^3 - 2t^2 + 2t, t^2 + t, \frac{1}{2}t^2 + t + 1)$$

görbe simulósíkjának egyenletét a $t = 0$ paraméterű pontban és határozza meg a torziófüggvényt.

23. Feladat. Számítsa ki a $c(t) = (3\cos t, 3\sin t, 7t)$ hengeres csavarvonal ívhosszát a $t = 0 \ldots 2\pi$ paraméterek között.

Gyakorló feladatok: felületelmélet

24. Feladat. Írja fel a z-tengely körüli forgatás mátrixát. Milyen alakzat forgatásával keletkezik a tórusz?

25. Feladat. Számítsa ki a

$$\sigma\colon [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \ \sigma(u, v) := ((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v)\,.$$

tórusz első alapmennyiségeit.

26. Feladat. Számítsa ki a

$$\sigma\colon [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \ \sigma(u, v) := ((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v)$$

tórusz felszinét.

27. Feladat. Számítsa ki a

$$\sigma\colon [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \ \sigma(u, v) := ((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v)$$

tórusz második alapmennyiségeit.

28. Feladat. Számítsa ki a

$$\sigma\colon [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \ \sigma(u, v) := ((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v)$$

tórusz Gauss görbületét.