Ellenőrző kérdések: a konvex geometria alapjai

Vincze Csaba

Debreceni Egyetem

2020. április 3.

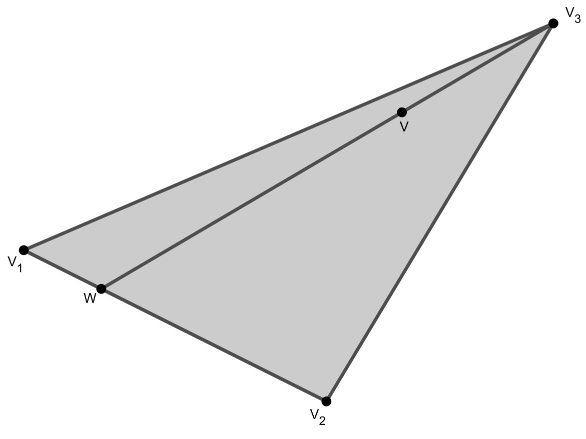
Affin és konvex halmazok

1. Feladat. Értelmezze az affin és a konvex halmaz fogalmát.

2. Feladat. Igazolja, hogy konvex halmazok metszete konvex.

3. Feladat. Mit értünk egy halmaz affin, illetve konvex burkolóján?

4. Feladat. Értelmezze az affin, illetve a konvex kombináció fogalmát és igazolja, hogy egy halmaz pontosan akkor konvex, ha zárt a konvex kombináció képzésére nézve.



1. ábra. Konvex kombinációk

Bár a bizonyítás egyszerű teljes indukcióval történik, mégis érdemes megfigyelnünk az indukciós lépés során alkalmazott

$$v := \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = (1-\lambda_k)\Big(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_k}v_1 + \ldots + \frac{\lambda_{k-1}}{1-\lambda_k}v_{k-1}\Big) + \lambda_k v_k$$

átalakítás mögött rejlő gondolatot. Az egyszerűség kedvéért tekintsük a $k = 3$ esetet, azaz

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (1 - \lambda_3)\Big(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_3} v_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_3} v_2\Big) + \lambda_3 v_3$$

és legyen

$$w = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_3} v_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_3} v_2.$$

Az 1. Ábra szemlélteti az algebrai átalakításokat: a v elemet előállítjuk két konvex kombináció alkalmazásával, azaz a w pont valahol az $s(v_1, v_2)$ szakaszon van, míg $v \in s(w, v_3)$. A v_1, v_2 és v_3 elemek összes konvex kombinációját szerepeltetve, a w elem befutja a szakasz összes pontját, míg a v_3-ból induló szakasz végigsúrolja az elemek által alkotott háromszöglemezt.

5. Feladat. Mit állít az affin halmazok struktúratétele?

Carathéodory tétele

6. Feladat. Értelmezze az affin függő, illetve független vektorrendszer fogalmát. Igaz-e, hogy egy affin függő rendszer lineárisan függő?

7. Feladat. Igaz-e, hogy egy lineárisan független rendszer affin független?

8. Feladat. Igaz-e, hogy egy lineárisan függő rendszer affin függő?

9. Feladat. Igaz-e, hogy egy affin független rendszer lineárisan független?

10. Feladat. Igazolja Carathéodory tételét.

11. Feladat. Igaz-e, hogy egy zárt halmaz konvex burka zárt?

Útmutatás. Tekintsük a következő ellenpéldát: $H = \left\{(x, y) \mid y = \dfrac{1}{|x|}\right\}$, azaz tükrözzük az $y = 1/x$ hiperbola pozitív ágát az y-tengelyre. A komplementer nyíltságából következik, hogy zárt halmazról van szó, melynek konvex burka a

$$\operatorname{conv} H = \{(x, y) \mid y > 0\}$$

felső nyílt félsík. Jegyezzük meg azonban, hogy kompakt halmaz konvex burka kompakt - ez Carathéodory tételének egyik következménye.

12. Feladat. Igaz-e, hogy egy korlátos halmaz konvex burka korlátos?

Útmutatás. Nyilvánvaló, hiszen a halmaz korlátossága miatt van olyan véges sugarú gömb, mely lefedi. A gömb konvex halmaz, a konvex burkoló pedig - a szóban forgó korlátos halmazt tartalmazó összes konvex halmaz metszeteként - része ennek a gömbnek.

Helly tétele

13. Feladat. Igazolja a Radon-lemmát és hajtsa végre a bizonyításban látott lépéseket a sík

$$v_1 = (1,0),\ v_2 = (1,3),\ v_3 = (4,3),\ v_4 = (4,0)$$

elemei esetén.

Útmutatás. A kétdimenziós sík négy eleme garantáltan affin függő, azaz a

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = (0,0),\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$$

egyenletek megoldhatók nem triviálisan a λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 ismeretlenekre nézve. Ez egy három egyenletből álló lineáris egyenletrendszert jelent, hiszen a vektoregyenlet szétesik a koordinátákra vonatkozó

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + 4\lambda_4 &= 0, \\ 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \qquad\quad &= 0 \end{aligned}$$

egyenletekre, illetve (az affin függőséget biztosító) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$ egyenlet is a rendelkezésünkre áll. A Gauss-eliminációt végrehatjtva az együtthatómátrixon

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix},$$

ahonnan (például) a $\lambda_4 = -1$ választással $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = -1$ és $\lambda_1 = 1$ következik. A nemnegatív együtthatókhoz tartozó vektorok $D_1 = \{v_1, v_3\}$, míg a negatív együtthatókhoz tartozó vektorok $D_2 = \{v_2, v_4\}$, a konvex burkolók metszete pedig a

$$v = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_3}(\lambda_1 v_1 + \lambda_3 v_3) = \frac{1}{2}(5,3),$$

$$v = \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_4}(\lambda_2 v_2 + \lambda_4 v_4) = -\frac{1}{2}(-5,-3) = \frac{1}{2}(5,3).$$

Szemléletesen szólva: a $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (1,3)$, $v_3 = (4,3)$, $v_4 = (4,0)$ által meghatározott tengelypárhuzamos téglalap átellenes csúcsai kerülnek egy osztályba, míg a közös elem az átlók metszéspontja.

14. Feladat. Igazolja Helly tételét.

15. Feladat. Ismertesse a Helly-tétel egy alkalmazását.

Útmutatás. Ld. 4.1. és 4.2. Feladatok (Jung tétele).

Konvex politópok

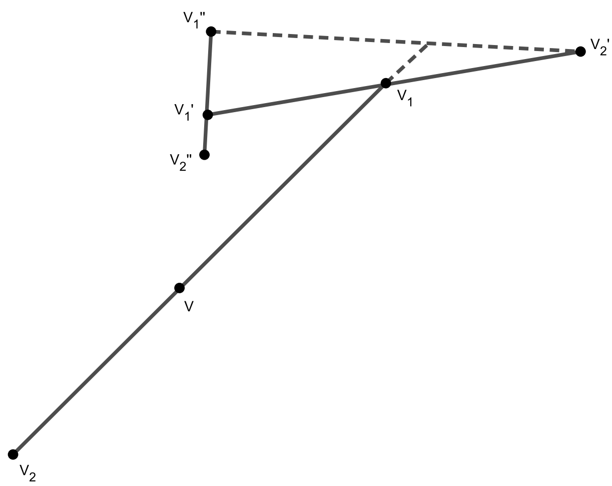
16. Feladat. Értelmezze a konvex politóp fogalmát. Mit értünk konvex poliéderen?

17. Feladat. Értelmezze az extrémális pont fogalmát és igazolja, hogy egy konvex politópnak csak véges sok extrémális pontja van.

Útmutatás. A bizonyítás lényege, hogy egy konvex politóp extrémális pontja csak abból a véges ponthalmazból kerülhet ki, melynek a politóp - definíció szerint - a konvex burka.

18. Feladat. Mit állít a Krein-Milman tétel?

A 2. Ábrán a Krein-Milman-tétel kétdimenziós esetben működő bizonyítását látjuk: tegyük fel, hogy v nem extrémális pont. Ekkor van olyan szakasz a konvex halmazban, melynek v nem végpontja, hiszen a halmaz kilyukasztásával v-ben elveszítjük a konvexitást. Meghosszabbítva ezt a szakaszt a halmaz határáig (kompaktság), az $s(v_1, v_2)$ szakaszhoz jutunk. Hasonló érveléssel kapjuk az $s(v_1', v_2')$ és az $s(v_1'', v_2'')$ szakaszokat, feltéve, hogy sem v_1, sem pedig v_1' nem extrémális pont. Itt azonban ellentmondásba ütközünk: a konvex halmazban futó $s(v_1'', v_2')$ szakasz azt mutatja, hogy $s(v_1, v_2)$ hosszabítható. Az ellentmondás mutatja, v_1'' már biztosan extrémális pont. Ugyanez vonatkozik természetesen v_2'-re. Ezzel az algoritmussal, amit a v-t tartalmazó szakasz másik végpontjából kiindulva is futtatunk, legfeljebb két-két lépésben kapjuk, hogy v extrémális pontok konvex burkának eleme.



2. ábra. A Krein-Milman-tétel a síkon

19. Feladat. Mit értünk egy konvex politóp csúcsán? Ismertesse a konvex politópok előállítási tételét.

Útmutatás. Ld. 6.1. Állítás és 6.3. Tétel.

20. Feladat. Mit állít a konvex politópok struktúratétele?

Útmutatás. Ld. 6.4. Tétel.

Euler poliédertétele, szabályos testek

21. Feladat. Igazolja az Euler-féle poliédertételt.

22. Feladat. Van-e olyan konvex poliéder, melynek 6 csúcsa, 8 lapja és 10 éle van?

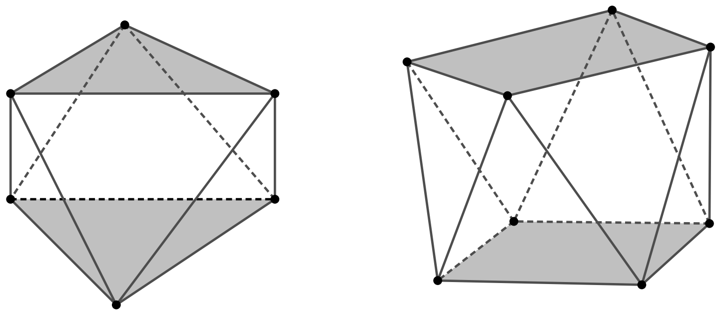
Útmutatás. Kizárja az Euler-féle poliédertétel.

23. Feladat. Van-e olyan konvex poliéder, melynek 6 csúcsa, 8 lapja és 12 éle van?

Útmutatás. Ld. 3. Ábra (balra): a konstrukció lényege két egybevágó konvex sokszög (alsó és felső lap), melyeket egymáshoz képest elcsavarunk; ún. antiprizma. Ha a fedőlapok konvex n-szögek, akkor a csúcsok száma $2n$, a lapok száma $2+2n$, hiszen az összes élre illeszkedik egy-egy "függőleges" lap és ehhez adjuk hozzá a fedőlapokat. Euler poliédertétele alapján pedig az élek száma $4n$.

24. Feladat. Van-e olyan konvex poliéder, melynek 8 csúcsa, 10 lapja és 16 éle van?

Útmutatás. Ld. 3. Ábra (jobbra).



3. ábra. A Krein-Milman-tétel a síkon

25. Feladat. Vezesse le a szabályos testek lehetséges szimbólumait.