Ellenőrző kérdések: vektoranalízis

Vincze Csaba

Debreceni Egyetem

2021. március 18.

Skalármezők: szintfelületek és gradiens

1. Feladat. Mit értünk egy skalármező gradiensén?

2. Feladat. Igazolja, hogy a gradiens merőleges az adott pontbeli szintfelületre.

Útmutatás. Tegyük fel, hogy a gradiens nem zérus az adott pontban (a zérusvektor minden vektorra merőleges) és állítsuk elő a pont egy környezetét parametrizált felületként az inverzleképezés-tétel alkalmazásával. A szorzatszabály alapján igazoljuk, hogy a gradiens merőleges a paramétervonal-érintőkre, azaz a paraméterezés parciális deriváltjainak mindegyikére.

3. Feladat. Adjon példát a gradiens alkalmazására: érintőegyenes, érintősík kiszámítására a gradiensvektor segítségével.

Tekintsük pl. az

$$y^2 = x^3 + 2x + 1$$

egyenlettel adott ún. elliptikus görbét a síkon és határozzuk meg az érintő egyenletét a $P(1,2)$ pontban. Az egyenletet nullára rendezve magkapjuk annak a skalármezőnek a definiáló formuláját, aminek a 0 értékhez tartozó szintgörbéjéről van szó.

$$f(x,y) := y^2 - x^3 - 2x - 1.$$

Ennek gradiensvektormezője

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (-3x^2 - 2, 2y),$$

azaz a $P(1,2)$ pontra illeszkedő, $\operatorname{grad} f(1,2) = (-5,4)$ normálvektorú egyenesről van szó:

$$-5(x-1) + 4(y-2) = 0.$$

Vektormezők: divergencia, Laplace-operátor és rotáció

4. Feladat. Értelmezze egy vektormező divergenciáját és a Laplace-operátor hatását skalármezőkön. Mit értünk harmónikus skalármezőn?

5. Feladat. Értelmezze egy vektormező rotációját a térben.

6. Feladat. Értelmezze egy vektormező rotációját a síkon.

7. Feladat. Írja fel a klasszikus vektoranalízis differenciáloperátoraira vonatkozó kiszámítási formulákat: gradiens, divergencia, Laplace-operátor, rotáció a térben és rotáció a síkon.

8. Feladat. Igazolja, hogy a rotáció divergenciája zérus.

9. Feladat. Igazolja, hogy a gradiens rotációja zérus.

10. Feladat. Igazolja, a

$$\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$$

szorzatszabályt.

11. Feladat. Igazolja, a

$$\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \langle \operatorname{grad} f, X \rangle$$

szorzatszabályt.

12. Feladat. Igazolja, a

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle$$

szorzatszabályt.

Görbék, vonalintegrálok

13. Feladat. Mikor nevezünk egy reguláris parametrizált görbét

- egyszerű ívnek?
- egyszerű zárt ívnek?

Mit értünk görbén?

14. Feladat. Értelmezze egy skalármező görbementi integrálját. Milyen fizikai jelentéssel bír a skalármező görbementi integrálja?

Útmutatás. Ha a skalármező értéke a görbével modellezett vékony huzal sűrűsége az adott pontban, akkor a görbementi integrál értéke a huzal tömege.

15. Feladat. Értelmezze egy vektormező görbementi integrálját. Milyen fizikai jelentéssel bír a vektormező görbementi integrálja?

Útmutatás. A görbementi integrál értéke az a munka, amit a vektortérrel modellezett erőtér végez, miközben egy anyagi részecskét a görbe kezdőpontjából a végpontjába juttat: képzeljünk el egy a görbére fűzött vasgolyót mágneses (gravitációs stb.) erőtérben.

16. Feladat. Mit értünk konzervatív vektormezőn és mi a potenciál?

17. Feladat. Mutassa meg, hogy egy konzervatív vektormező görbementi integrálja csak a kezdő és a végponttól függ. Feltéve, hogy a görbementi integrál csak a kezdő és a végponttól függ, konstruáljon potenciálfüggvényt egy csillagszerű tartományon értelmezett vektormező esetén.

Útmutatás. Ld. a 4. Tétel bizonyítása.

18. Feladat. Adjon példát konzervatív vektormezőre.

19. Feladat. Igazolja Stokes tételét síkbeli normáltartományok esetén.

Útmutatás. Ld. 30. Feladat.

20. Feladat. Milyen következménnyel jár Stokes tétele a konzervatív vektormezőkre nézve?

Útmutatás. Ld. 2. Következmény.

21. Feladat. Illusztrálja és ismertesse a Stokes-tétel gyűrűszerű halmazokra vonatkozó verzióját.

Útmutatás. Ld. 3. Ábra és (7) Formula.

Felületek, felületi integrálok

22. Feladat. Mikor nevezünk egy reguláris parametrizált felületet elemi felületnek? Mit értünk felületen?

23. Feladat. Értelmezze egy skalármező felületi integrálját.

24. Feladat. Értelmezze egy vektormező felületi integrálját. Milyen fizikai jelentéssel bír a vektormező felületi integrálja?

Útmutatás. Ha a vektormező folyadékáramlást reprezentál, akkor felületi integrálja az adott felületen egységnyi idő alatt átáramló folyadék mennyisége. Ezt az adott felületre vonatkozó fluxusnak[1] is nevezzük.

25. Feladat. Igazolja a Gauss-Osztrogradszkij-tételt normáltartományok esetén.

Útmutatás. Ld. 40. Feladat.

26. Feladat. Mit állít a térbeli Stokes-tétel?

Útmutatás. Ld. (9) Formula.

27. Feladat. Igazolja a térbeli Stokes-tételt olyan felületekre, melyek peremgörbéje síkgörbe.

Útmutatás. Ld. 41. Feladat.

[1] A fluxus latin eredetű szó, jelentése: áramlás.

Függelék

A maximum-elv

28. Feladat. Igazolja a harmónikus skalármezők középértéktételét.

Útmutatás. Ld. 8.2. Fejezet.

29. Feladat. Mi a maximum-elv?

Útmutatás. Ld. 8.2. Fejezet.

30. Feladat. Mit állít Liouville tétele és mi következik ebből a divergenciamentes vektormezővel modellezett folyadékáramlásra nézve.

Útmutatás. Ld. 8.3. Fejezet.