Euklideszi vektorterek

Vincze Csaba

2021. március 25.

Tartalomjegyzék

1. Belső szorzat, norma, távolság és szög

1. Definíció. *Legyen V egy véges dimenziós valós vektortér és tegyük fel, hogy a*

$$(v, w) \in V \times V \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$$

leképezés bilineáris, szimmetrikus és pozitív definit, azaz

- $\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle = \lambda_1 \langle v_1, w \rangle + \lambda_2 \langle v_2, w \rangle$
- $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$,
- $\langle v, v \rangle \geq 0$ *és* $\langle v, v \rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; v = \mathbf{0}$.

A szóban forgó leképezést belső, vagy skaláris szorzatnak nevezzük, a belső szorzattal ellátott véges dimenziós valós vektortereket pedig euklideszi vektortérnek.

A második változóra vonatkozó linearitás a szimmetria következménye - a feltüntetését mellőztük. A belső szorzat segítségével mérni tudjuk a vektorok

$$\|v\| := \sqrt{< v, v >}$$

hosszát, vagy - ekvivalens terminológiával élve - a normáját és a tér pontjainak

$$d(p, q) := \|p - q\|$$

távolságát. Geometriai szövegkörnyezetben a vektortér elemeire a **vektor** és a **pont** kifejezéssel egyaránt utalunk, s azt a kifejezésmódot választjuk, mely az adott kontextusban természetesebbnek tűnik: pontok - és nem vektorok - távolságáról beszélünk tehát, illetve vektorok - és nem pontok - szögéről. Ennek megfelelően, a vektortér elemeinek a jelölésére használni fogjuk a $p, q, \ldots$, illetve a $v, w, \ldots$ szimbólumokat is. A szögmérést előkészítendő, szükségünk lesz az ún. Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-féle egyenlőtlenségre.

1. Tétel. Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-féle egyenlőtlenség

$$\langle v, w\rangle^2 \leq \|v\|^2\|w\|^2;$$

egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a vektorok arányosak.

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy ha w a zérusvektor, akkor az egyenlőtlenség nyilvánvaló. Tegyük fel tehát, hogy $w \neq \mathbf{0}$. Mivel bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$0 \leq \|v - \lambda w\|^2 = \langle v - \lambda w, v - \lambda w\rangle = \|v\|^2 - 2\lambda\langle v, w\rangle + \lambda^2\|w\|^2 =$$

$$\|v\|^2 + \left(\lambda\|w\| - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|}\right)^2 - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|w\|^2},$$

a

$$\lambda_0 = \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2} \tag{1}$$

helyettesítéssel adódik az egyenlőtlenség. Egyenlőség pedig akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\|v - \lambda w\|^2 = \left(\lambda\|w\| - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|}\right)^2$$

teljesül minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén. Ez azt jelenti, hogy

$$\|v - \lambda_0 w\|^2 = 0,$$

azaz $v = \lambda_0 w$, ami bizonyítandó volt. $\square$

Figyelembe véve a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget, a vektorok szögét a

$$\angle(v, w) := \arccos\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}$$

formula segítségével definiáljuk. Átrendezéssel kapjuk a belső szorzat geometriai értelmezését: két vektor belső szorzata egyenlő a vektorok hosszának és közbezárt szögük koszinuszának szorzatával.

2. Definíció. *Egy euklideszi vektortér két elemét merőlegesnek, vagy ortogonálisnak mondjuk, ha belső szorzatuk eltűnik; speciálisan, a zérusvektor minden elemre merőleges.*

1.1. Fourier-együtthatók, ortogonalitás

1. Feladat. Tekintsük a b_2 és az $e_1 \neq \mathbf{0}$ vektorokat egy euklideszi vektortérben és állítsuk elő a b_2 vektort egy az e_1 vektorral párhuzamos és egy arra merőleges komponens összegeként.

Útmutatás: tegyük fel, hogy az előállítás sikerült, azaz

$$b_2 = \lambda_0 e_1 + e_2$$

valamely λ_0 skalár és e_2 vektor esetén, ahol $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$. Véve mindkét oldal belső szorzatát az e_1 vektorral

$$\langle b_2, e_1 \rangle = \lambda_0 \|e_1\|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = \frac{\langle b_2, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2},$$

a b_2 vektor e_1-re vonatkozó ún. Fourier-együtthatója, v.ö. (1). Az e_1-re merőleges komponens tehát

$$e_2 = b_2 - \frac{\langle b_2, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1. \tag{2}$$

A (2) formula szukcesszív alkalmazásán alapszik az ún. Gram-Schmidt-féle ortogonalizálási eljárás.

1.1.1. A Gram-Schmidt-féle ortogonalizálás

3. Definíció. *Egy euklideszi vektortér $e_1, \ldots, e_m$ vektorrendszerét ortogonális vektorrendszernek nevezzük, ha tagjai páronként ortogonális, nemzérus vektorok. A rendszer ortonormált, ha tagjai páronként ortogonális egységvektorok.*

1. Következmény. *Egy ortogonális vektorrendszer lineárisan független.*

A Gram-Schmidt-féle ortogonalizálási eljárás egy tetszőleges, lineárisan független $b_1, \ldots, b_m$ vektorrendszerből hoz létre egy $e_1, \ldots, e_m$ ortogonális rendszert úgy, hogy az

e_1
e_1, e_2
e_1, e_2, e_3
$\ldots$
$e_1, e_2, \ldots, e_m$

kimeneti részrendszerek által generált lineáris alterek[1] rendre megegyeznek a bemeneti

b_1
b_1, b_2
b_1, b_2, b_3
$\ldots$
$b_1, b_2, \ldots, b_m$

részrendszerek által generált lineáris alterekkel. Az első lépésben $e_1 := b_1$, míg a második, illetve harmadik lépésben

$$e_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1,$$

illetve

$$e_3 = b_3 - \frac{\langle b_3, e_2 \rangle}{\|e_2\|^2} e_2 - \frac{\langle b_3, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1$$

[1]Ekvivalens módon: a megadott vektorok lineáris kombinációjaként előállítható vektorok összessége.

és így tovább:

$$e_m = b_m - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\langle b_m, e_i\rangle}{\|e_i\|^2} e_i,$$

azaz az aktuális bemeneti vektorból levonjuk a már megkonstruált vektorokra eső merőleges vetületeit (v.ö. 1. Feladat). Jegyezzük meg, hogy egyik lépésben sem kaphatunk zérusvektort, hiszen a bemeneti rendszer lineárisan független.

1.1.2. Egy optimalizálási probléma: a Fourier-együtthatók minimum-tulajdonsága

2. Feladat. Tekintsük az $e_1, \ldots, e_m$ ortogonális vektorrendszert. Legyen v egy tetszőleges további vektor és határozzuk meg a v vektor legjobb approximációját az ortogonális rendszer által kifeszített altérben.

Útmutatás: a feladat matematikailag precíz megfogalmazása

$$\min_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m} d(v, \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_m e_m) = \min_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m} \|v - \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i\|.$$

Mivel nemnegatív kifejezés minimumát keressük, ezért áttérhetünk a négyzetének a minimalizálására:

$$\min_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m} \|v - \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i\|^2,$$

ahol (az ortogonalitást figyelembe véve)

$$\|v - \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i\|^2 = \langle v - \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i, v - \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i\rangle = \|v\|^2 - 2\sum_{i=1}^m \lambda_i \langle v, e_i\rangle + \lambda_i^2 \|e_i\|^2 =$$

$$\|v\|^2 + \sum_{i=1}^m \left(\lambda_i \|e_i\| - \frac{\langle v, e_i\rangle}{\|e_i\|}\right)^2 - \frac{\langle v, e_i\rangle^2}{\|e_i\|^2},$$

ami azt jelenti, hogy az összeget a

$$\lambda_1 = \frac{\langle v, e_1\rangle}{\|e_1\|^2}, \ldots, \lambda_m = \frac{\langle v, e_m\rangle}{\|e_m\|^2}$$

Fourier-együtthatók minimalizálják. A legjobb approximáció tehát

$$v \approx \sum_{i=1}^m \frac{\langle v, e_i\rangle}{\|e_i\|^2} e_i$$

és az is következik, hogy $n = \dim V$ esetén

$$v = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, e_i\rangle}{\|e_i\|^2} e_i \quad \Rightarrow \quad \|v\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, e_i\rangle^2}{\|e_i\|^2}.$$

Ha a bázis ortonormált, akkor

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i\rangle e_i \quad \Rightarrow \quad \|v\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i\rangle^2,$$

ami a Pitagorász-tétel általánosítása. Könnyen átgondolható, hogy a belső szorzat kiszámítása ortonormált bázisban felírt vektorok esetén a

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i$$

formula szerint történik, ahol $v^1, \ldots, v^n$, illetve $w^1, \ldots, w^n$ az elemeknek az adott bázisra vonatkozó koordinátái és $n = \dim V$. Ennélfogva minden euklideszi vektortér izometrikusan izomorf az $\mathbb{R}^n$ koordinátatérrel, amit ellátunk az ún. kanonikus

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i$$

belső szorzattal, ahol $v = (v^1, \ldots, v^n)$ és $w = (w^1, \ldots, w^n) \in \mathbb{R}^n$. A standard euklideszi koordinátatér ún. kanonikus bázisa

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, \ldots, 0, 1),$$

mely nyilvánvalóan ortonormált a kanonikus belső szorzatra nézve. A $v = (v^1, \ldots, v^n)$ megfelel a v vektor

$$v = v^1 e_1 + \ldots + v^n e_n$$

előállításának a kanonikus bázisban.

3. Feladat. A belső szorzás műveleti tulajdonságait felhasználva igazolja az

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v, w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\| \cos\alpha$$

azonosságot (v.ö. koszinusz-tétel).

4. Feladat. A belső szorzás műveleti tulajdonságait felhasználva igazolja az

$$\frac{\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2}{2} = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

azonosságot.

2. Következmény. *Egy paralelogramma oldalaira emelt négyzetek területének összege egyenlő az átlók hosszának négyzetösszegével.*

5. Feladat. A belső szorzás műveleti tulajdonságait felhasználva igazolja az

$$\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 = 4\langle v, w\rangle$$

azonosságot.

3. Következmény. *Egy paralelogramma akkor és csak akkor téglalap, ha az átlói egyenlő hosszúak.*

6. Feladat. A belső szorzás műveleti tulajdonságait felhasználva igazolja az

$$\langle v + w, v - w\rangle = \|v\|^2 - \|w\|^2$$

azonosságot.

4. Következmény. *Egy paralelogramma akkor és csak akkor rombusz, ha az átlói merőlegesek egymásra.*

1.2. Vektoriális- és vegyes szorzat

Ebben az alfejezetben $V=\mathbb{R}^3$, ami az általános elmélet alapján csupán annyit jelent, hogy rögzítettünk egy ortonormált bázist a háromdimenziós V euklideszi vektortérben. Tulajdonképpen a dimenzió korlátozására is csupán a fokozatosság elvét szem előtt tartva van szükség.

4. Definíció. *A v és $w\in\mathbb{R}^3$ vektorok vektoriális szorzatán a*

$$\langle v\times w, e\rangle = \begin{vmatrix} e^1 & e^2 & e^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix}$$

képlettel értelmezett $v\times w$ vektort értjük, ahol $e=(e^1,e^2,e^3)\in\mathbb{R}^3$ a tér tetszőleges vektora.

Az $e=e_1$, $e=e_2$ és $e=e_3$ helyettesítésekkel kiszámíthatjuk a szorzatvektor koordinátáit a kanonikus bázisra vonatkozóan:

$$v\times w = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix} e_3 =$$

$$\left(v^2w^3-w^2v^3, -(v^1w^3-w^1v^3), v^1w^2-w^1v^2\right).$$

A kiszámítási formula memorizálását segítő formális determináns is gyakran használatos:

$$v\times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v^2 & v^3 \\ w^2 & w^3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} v^1 & v^3 \\ w^1 & w^3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} v^1 & v^2 \\ w^1 & w^2 \end{vmatrix} e_3,$$

ahol a kifejtés az első sor szerint történik.

7. Feladat. *Igazolja, hogy $v\times w=\mathbf{0}$, akkor és csak akkor, ha a vektorok arányosak.*

Útmutatás. Ha a vektorok arányosak, akkor a determináns nulla, hiszen van két lineárisan függő sora. Ha azonban a v és a w vektorok nem arányosak, akkor kiegészíthetők a tér bázisává valamely $e\in\mathbb{R}^3$ elem segítségével. Ez azt jelenti, hogy a determináns nem tűnik el, azaz a vektoriális szorzat sem a zérusvektor. A kontrapozíció elve alapján, ha a vektoriális szorzat eltűnik, akkor a vektorok arányosak. Szemléletesen a vektorok párhuzamosságáról van szó, amit vektoriális szorzatuk eltűnése jellemez. Hasonlítsuk össze a belső szorzat esetével: két vektor pontosan akkor *merőleges*, ha belső szorzatuk nulla.

A vektoriális szorzat teljes geometriai jellemzéséhez szükségünk lesz az irányítás fogalmára: egy vektortér két bázisa ugyanazt az irányítást reprezentálja, ha a bázistranszformáció mátrixa pozitív determinánsú. Mivel egy bázistranszformáció mátrixának a determinánsa nem lehet zérus, ezért a tér két bázisa vagy ugyanazt, vagy az ellentétes irányítást reprezentálja. Átfogalmazva, egy olyan ekvivalenciarelációról van szó, melynek pontosan két osztálya van. Kijelölve az osztályok egyikét azt mondjuk, hogy egy irányítást adtunk meg a vektortéren. A továbbiakban a kanonikus bázis által reprezentált irányítást tekintjük pozitívnak.

1. Állítás. *A v és a w vektorok vektoriális szorzata*

- *mindkét tényezőjére merőleges,*

- *hossza a vektorok hosszának és a közbezárt szög szinuszának szorzata, azaz*

$$\|v \times w\| = \|v\|\|w\| \sin \alpha,$$

- *ha nem a zérusvektor, akkor a v, w és a $v \times w$ vektorok pozitív bázist alkotnak a térben.*

Bizonyítás. Mivel a determináns eltűnik a mátrix sorainak ismétlődése esetén, ezért nyilvánvaló, hogy

$$\langle v \times w, v\rangle = \langle v \times w, w\rangle = 0,$$

azaz a vektoriális szorzat mindkét tényezőjére merőleges. Egyszerű számítás mutatja, hogy

$$(v^2w^3 - w^2v^3)^2 + (v^1w^3 - w^1v^3)^2 + (v^1w^2 - w^1v^2)^2 =$$

$$\left((v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2\right)\left((w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2\right) - \left(v^1w^1 + v^2w^2 + v^3w^3\right)^2,$$

ahonnan

$$\|v \times w\|^2 = \|v\|^2\|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2 = \|v\|^2\|w\|^2\left(1 - \cos^2 \alpha\right) = \|v\|^2\|w\|^2 \sin^2 \alpha.$$

A harmadik észrevétel nyilvánvaló, hiszen a bázistranszformáció mátrixának determinánsa

$$\begin{vmatrix} v^1 & w^1 & v^2w^3 - w^2v^3 \\ v^2 & w^2 & -(v^1w^3 - w^1v^3) \\ v^3 & w^3 & v^1w^2 - w^1v^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \\ v^2w^3 - w^2v^3 & -(v^1w^3 - w^1v^3) & v^1w^2 - w^1v^2 \end{vmatrix} =$$

$$\langle v \times w, v \times w\rangle = \|v \times w\|^2 > 0,$$

ami bizonyítandó volt. □

1. Megjegyzés. A vektoriális szorzat hossza éppen a vektorok által kifeszített paralelogramma területe.

2. Tétel. *A vektoriális szorzat*

- *ferdeszimmetrikus, azaz $v \times w = -w \times v$,*

- *homogén, azaz bármely λ valós szám esetén*

$$\lambda(v \times w) = (\lambda v) \times w = v \times (\lambda w),$$

- *disztributív, azaz*

$$(v_1 + v_2) \times w = v_1 \times w + v_2 \times w \quad \text{és} \quad v \times (w_1 + w_2) = v \times w_1 + v \times w_2$$

teljesül bármely v, w, v_1, v_2, w_1 és w_2 vektor esetén.

Bizonyítás. Valamennyi észrevétel nyilvánvaló a determináns soronkénti linearitása, illetve alternáló tulajdonsága alapján. □

3. Tétel. (Kifejtési tétel)

$$(v_1 \times v_2) \times w = \langle v_1, w\rangle v_2 - \langle v_2, w\rangle v_1 \quad \text{és} \quad v \times (w_1 \times w_2) = \langle v, w_2\rangle w_1 - \langle v, w_1\rangle w_2.$$

Bizonyítás. A vektorváltozókban fellépő linearitást kihasználva, ellenőrizzük csupán a kanonikus bázis tagjaira a szóban forgó összefüggéseket. Redukálhatjuk az esetek számát, ha figyelembe vesszük pl. a v_1 és v_2 vektorok ferdeszimmetrikus szerepét az első formulában. $\square$

4. Tétel. (Jacobi - azonosság)

$$(v_1 \times v_2) \times v_3 + (v_3 \times v_1) \times v_2 + (v_2 \times v_3) \times v_1 = \mathbf{0}.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a kifejtési tételt a bal oldalon álló összeg mindhárom tagjára. $\square$

5. Definíció. *A v_1, v_2 és a $v_3 \in \mathbb{R}^3$ vektorok vegyes szorzatán az*

$$v_1 v_2 v_3 := \langle v_1 \times v_2, v_3 \rangle = \begin{vmatrix} v_3^1 & v_3^2 & v_3^3 \\ v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \end{vmatrix}$$

összefüggéssel definiált valós számot értjük.

5. Tétel. *A v_1, v_2 és a $v_3 \in \mathbb{R}^3$ vektorok pontosan akkor lineárisan függők, ha vegyes szorzatuk eltűnik.*

Bizonyítás. Az állítás nyilvánvaló a determináns eltűnésének alapján, de közvetlenül a geometriai jellemzések alapján is igazolható: a vegyes szorzat pontosan akkor tűnik el, ha v_3 merőleges a $v_1 \times v_2$ vektoriális szorzatvektorra, azaz a v_1 és v_2 által kifeszített kétdimenziós lineáris altérben van, vagy a v_1 és v_2 vektorok arányosak. $\square$

6. Tétel. *A v_1, v_2 és a $v_3 \in \mathbb{R}^3$ vektorok vegyes szorzatának abszolút értéke a vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata.*

Bizonyítás. Először is jegyezzük meg, hogy amennyiben a v_1 és a v_2 vektorok arányosak, akkor mind a vegyes szorzat értéke, mind az elfajuló paralelepipedon térfogata zérus – hasonló a helyzet három lineárisan függő vektor esetén. Egyébként pedig

$$\frac{\langle v_3, v_1 \times v_2 \rangle}{\|v_1 \times v_2\|^2} v_1 \times v_2$$

a v_3 vektornak a $v_1 \times v_2$ szorzatvektorral párhuzamos komponense (ld. Gram-Schmidt ortogonalizáció), melynek hossza a paralelepipedon magassága. A térfogata tehát

$$\|v_1 \times v_2\| \left\| \frac{\langle v_3, v_1 \times v_2 \rangle}{\|v_1 \times v_2\|^2} v_1 \times v_2 \right\| = |\langle v_3, v_1 \times v_2 \rangle| = |v_1 v_2 v_3|,$$

ami bizonyítandó volt. $\square$

7. Tétel. (Felcserélési tétel)

$$v_1 v_2 v_3 = v_3 v_1 v_2 = v_2 v_3 v_1.$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló a determináns alternáló tulajdonsága alapján. $\square$

8. Feladat. A v_1, v_2 és a v_3 vektorok milyen helyzeténél lesz az általuk kifeszített paralelepipedon térfogata maximális?

9. Feladat. Legyen

$$v_1 = e_1 - 2e_2 + 3e_3, \quad v_2 = 4e_1 + e_2 - \frac{1}{2}e_3 \text{ és } v_3 = -\frac{1}{2}e_1 + 3e_2 + e_3;$$

határozza meg a vektorok skaláris, vektoriális és vegyes szorzatát az összes lehetséges módon – alkalmazza a műveleti tulajdonságokat a kiszámítandó szorzatok számának csökkentése érdekében!

- Az elvégzett számítások alapján döntse el, hogy lineárisan függők, vagy függetlenek-e a szóban forgó vektorok.
- Határozza meg a vektorok által kifeszített paralelepipedon v_1 és v_2 vektorokkal párhuzamos alapjához tartozó magasságát.

10. Feladat. Lineárisan függők, vagy függetlenek a

- $v_1 = 2e_1 - e_2 + 2e_3, \quad v_2 = e_1 + 2e_2 - 3e_3$ és $v_3 = 3e_1 - 4e_2 + 7e_3$,
- $v_1 = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3, \quad v_2 = 3e_1 + 4e_2 - 5e_3$ és $v_3 = 3e_1 + 3e_2 + 3e_3$

vektorok?

1.3. Egyenesek és síkok paraméteres és implicit megadása

1.3.1. Egyenesek paraméteres és implicit megadása

Tekintsük a rendezett valós számhármasok vektorterét:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

A szemléletet segítő volta miatt használni fogjuk a formális $\vec{AB} = B - A$ rövidítést. A modell $P_1(x^1, y^1, z^1)$ és $P_2(x^2, y^2, z^2)$ pontokra illeszkedő egyenese

$$l := \{P_1 + tv \mid t \in \mathbb{R}\},$$

ahol $v = \vec{P_1P_2}$ az egyenes ún. irányvektora. A P_1 kezdőpontot az egyenes mentén szabadon eltolhatjuk ($P_1 \mapsto P_0$), az irányvektor fölött pedig nemzérus skalárszorzó erejéig szabadon rendelkezünk. Az egyenes pontjai tehát a t paraméter függvényében változnak; ezt nevezzük az egyenes paraméteres megadásának. Más jelölésekkel

$$l(t) = P_0 + tv \quad (t \in \mathbb{R}),$$

írható, ahol $P_0(x^0, y^0, z^0)$ és $v = (v^1, v^2, v^3)$. Legyenek $x(t)$, $y(t)$ és $z(t)$ az egyenes paraméterezésének koordinátafüggvényei, azaz

$$x(t) = x^0 + tv^1, \; y(t) = y^0 + tv^2, \; z(t) = z^0 + tv^3.$$

A t paraméter kiküszöböléséhez fogalmazzuk át egyenleteinket a vektoriális szorzat segítségével:

$$\mathbf{0} = (l(t) - P_0) \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x(t) - x^0 & y(t) - y^0 & z(t) - z^0 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} =$$

$$\left(\left(y(t) - y^0\right) v^3 - \left(z(t) - z^0\right) v^2, - \left(\left(x(t) - x^0\right) v^3 - \left(z(t) - z^0\right) v^1\right), \left(x(t) - x^0\right) v^2 - \left(y(t) - y^0\right) v^1\right)$$

és tekintsük végig a lényegesen különböző eseteket.

- Ha $v^1 \neq 0$, $v^2 \neq 0$, $v^3 \neq 0$, akkor

$$\frac{x(t)-x^0}{v^1} = \frac{y(t)-y^0}{v^2} = \frac{z(t)-z^0}{v^3},$$

azaz az egyenest a két egyenletből álló

$$\frac{x-x^0}{v^1} = \frac{y-y^0}{v^2} = \frac{z-z^0}{v^3}$$

egyenletrendszer írja le a térben.

- Ha $v^1 \neq 0$, $v^2 \neq 0$, $v^3 = 0$, akkor az egyenletrendszer

$$\frac{x-x^0}{v^1} = \frac{y-y^0}{v^2},\ z-z^0=0.$$

Ebben az esetben az egyenes párhuzamos az (x,y) koordinátasíkkal. Végül pedig,

- ha $v^1 \neq 0$, $v^2 = 0$, $v^3 = 0$, akkor

$$y-y^0=0,\ z-z^0=0.$$

Ebben az esetben az egyenes párhuzamos az x koordináta-tengellyel.

2. Megjegyzés. A sík egyeneseinek implicit megadásához csupán a formális $z^0 = 0$ és $v^3 = 0$, azaz $z(t) = 0$ helyettesítésre van szükség:

$$\mathbf{0} = (l(t)-P_0)\times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x(t)-x^0 & y(t)-y^0 & 0 \\ v^1 & v^2 & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \left(x(t)-x^0\right)v^2 - \left(y(t)-y^0\right)v^1\right).$$

Ennélfogva

$$\left(x-x^0\right)v^2 - \left(y-y^0\right)v^1 = 0$$

a síkbeli egyenes jól ismert irányvektoros egyenlete.

1.3.2. Síkok paraméteres és implicit megadása

A (nem kollineáris) P_1, P_2 és P_3 pontokra illeszkedő sík

$$S = \{P_1 + tv + sw \mid t, s \in \mathbb{R}\},$$

ahol $v = \vec{P_1P_2}$, $w = \vec{P_1P_3}$. A síkot kifeszítő v és w vektorok vektoriális szorzata az ún. normálvektor. A P_1 kezdőpontot a sík mentén szabadon eltolhatjuk ($P_1 \mapsto P_0$), a normálvektor fölött pedig nemzérus skalárszorzó erejéig szabadon rendelkezünk. Más jelölésekkel

$$S(t,s) = P_0 + tv + sw \quad (t, s \in \mathbb{R})$$

írható, ahol $P_0(x^0, y^0, z^0)$, $v = (v^1, v^2, v^3)$ és $w = (w^1, w^2, w^3)$. Legyenek $x(t,s)$, $y(t,s)$ és $z(t,s)$ a sík paraméterezésének koordinátafüggvényei, azaz

$$x(t,s) = x^0 + tv^1 + sw^1,\ y(t,s) = y^0 + tv^2 + sw^2,\ z(t,s) = z^0 + tv^3 + sw^3.$$

A paraméterek kiküszöböléséhez fogalmazzuk át egyenleteinket a vegyes szorzat segítségével

$$0 = vw(S(t,s) - P_0) = \begin{vmatrix} x(t,s) - x^0 & y(t,s) - y^0 & z(t,s) - z^0 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix} =$$

$$A\left(x(t,s) - x^0\right) + B\left(y(t,s) - y^0\right) + C\left(z(t,s) - z^0\right),$$

ahol A, B és C rendre a $v \times w$ vektor koordinátái a kanonikus bázisra vonatkozóan:

$$A = v^2w^3 - w^2v^3,\ B = -(v^1w^3 - w^1v^3),\ C = v^1w^2 - w^1v^2,$$

azaz

$$A\left(x - x^0\right) + B\left(y - y^0\right) + C\left(z - z^0\right) = 0.$$

1.4. Másodrendű görbék és felületek

1.4.1. Másodrendű görbék

Az euklideszi (affin) sík egy másodrendű görbéjén az

$$(x,y)\begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (a,b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

egyenletet kielégítő pontok halmazát értjük, ahol $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ és a, b, c adott valós számok. Egyszerű számítás mutatja, hogy az egyenletben felbukkanó szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & C \\ C & B - \lambda \end{vmatrix} = (A - \lambda)(B - \lambda) - C^2 = \lambda^2 - (A + B)\lambda + AB - C^2,$$

ahol az

$$(A + B)^2 - 4(AB - C^2) = (A - B)^2 + 4C^2 \geq 0$$

diszkrimináns nemnegatív. Ez azt jelenti, hogy van két - esetleg egybeeső - valós gyök: λ_1 és λ_2. Jelölje $b_1 = (x^1, y^1)$ és $b_2 = (x^2, y^2)$ a megfelelő indexű sajátértékhez tartozó sajátvektorokat. Feltehető, hogy egységvektorokról van szó, továbbá emlékeztetünk rá, hogy a különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterek ortogonálisak:

$$(x^1, y^1)\begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} = \lambda_2(x^1, y^1)\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} = \lambda_2\left(x^1x^2 + y^1y^2\right).$$

Szimmetriaokokból azonban

$$(x^1, y^1)\begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} = (x^2, y^2)\begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \lambda_1\left(x^1x^2 + y^1y^2\right).$$

Ha $\lambda_1 \neq \lambda_2$, akkor

$$x^1x^2 + y^1y^2 = 0,$$

azaz a sajátvektorok merőlegessége következik. A továbbiakban tehát b_1, b_2 a mátrix sajátvektoraiból álló ortonormált bázis. Tekintsük az

$$(e_1, e_2) \mapsto (b_1, b_2)$$

bázistranszformáció

$$M = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ y^1 & y^2 \end{pmatrix}$$

mátrixát. Ismeretes a lineáris algebrából, hogy az elemek koordinátái a bázistranszformáció mátrixának inverzével transzformálódnak, azaz

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

transzponálással pedig

$$(x', y')M^T = (x, y)$$

írható. Mivel az M mátrix oszlopait az egymásra merőleges b_1 és b_2 egységvektorok (kanonikus) koordinátái töltik ki, könnyű látni, hogy $M^{-1} = M^T$, azaz

$$M^T \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} M = M^{-1} \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

ugyanis

$$M^{-1} \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} b_1 = \lambda_1 M^{-1} b_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hasonlóan

$$M^{-1} \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Áttérve a sajátvektorok alkotta ortonormált bázisra vonatkozó koordinátákra, a másodrendű görbe egyenlete

$$(x', y')M^T \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + a'x' + b'y' + c' = 0,$$

ahol $c' = c$ és $(a', b') = (a, b)M$. Következésképpen

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + a'x' + b'y' + c' = 0.$$

A másodrendű görbék osztályozása ezek után a sajátértékek előjele (esetleg egyikük eltűnése) mentén történik: ha

$$\begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} \neq 0$$

akkor

$$\lambda_1 \left(x' - \frac{a'}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' - \frac{b'}{2\lambda_2} \right)^2 = \lambda_1 \left(\frac{a'}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(\frac{b'}{2\lambda_2} \right)^2 - c'$$

következik, azaz a görbénk

- ellipszis (a determináns pozitív, a sajátértékek közös előjele megegyezik a jobb oldal előjelével),
- üreshalmaz (a determináns pozitív, a sajátértékek közös előjele különbözik a jobb oldal előjelétől),
- egyetlen pont (a determináns pozitív, a jobb oldal zérus),

- hiperbola (a determináns negatív, a jobb oldal nem zérus),
- metsző egyenespár (a determináns negatív, a jobb oldal zérus).

Ha pedig

$$\begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} = 0,$$

akkor pl. $\lambda_1 = 0$ esetén

$$\lambda_2 \left(y' - \frac{b'}{2\lambda_2} \right)^2 + a'x' = \lambda_2 \left(\frac{b'}{2\lambda_2} \right)^2 - c'$$

következik, azaz görbénk

- parabola (a determináns zérus, $a' \neq 0$),
- üreshalmaz (a determináns zérus, $a' = 0$ és a nemzérus sajátérték előjele különbözik a jobb oldal előjelétől),
- párhuzamos egyenespár (a determináns zérus, $a' = 0$ és a nemzérus sajátérték előjele megegyezik a jobb oldal előjelével),
- kettős egyenes (a determináns zérus, $a' = 0$ és a jobb oldal zérus).

A koordináták szimmetrikus szerepére tekintettel az másodrendű görbék áttekintése ezzel teljes.

1.4.2. Másodrendű felületek

A háromdimenziós euklideszi (affin) tér másodrendű felületén az

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} A & D & F \\ D & B & E \\ F & E & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (a, b, c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + d = 0$$

egyenletet kielégítő pontok halmazát értjük, ahol $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 \neq 0$ és a, b, c, d adott valós számok. Mivel egy harmadrendű mátrix karakterisztikus polinomja harmadfokú, ezért van valós gyöke: λ_3. Legyen $b_3 = (x^3, y^3, z^3)$ egységnyi hosszúságú sajátvektor. Szimmetriaokokból

$$(x^3, y^3, z^3) \begin{pmatrix} A & D & F \\ D & B & E \\ F & E & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z) \begin{pmatrix} A & D & F \\ D & B & E \\ F & E & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix} = \lambda_3 (x, y, z) \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix},$$

azaz a b_3 normálvektorú kétdimenziós alteret a mátrix által reprezentált lineáris leképezés az altér egy elemébe viszi és folytathatjuk a mátrix diagonalizálását a szóban forgó altérben a kétdimenziós esetnek megfelelően. A mátrix sajátvektoraiból álló b_1, b_2, b_3 ortonormált bázisra vonatkozó koordinátákra áttérve a másodrendű felület egyenlete az

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2 + a'x' + b'y' + c'z' + d' = 0$$

alakot ölti. Az egyenlet diszkussziója hasonló a másodrendú görbéknél látottakhoz. A könnyebb áttekinthetőség kedvéért először csupán a nem elfajuló magmátrix esetével foglalkozunk, azaz

$$\begin{vmatrix} A & D & F \\ D & B & E \\ F & E & C \end{vmatrix} \neq 0.$$

Kapjuk tehát, hogy

$$\lambda_1\left(x'-\frac{a'}{2\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y'-\frac{b'}{2\lambda_2}\right)^2+\lambda_3\left(z'-\frac{c'}{2\lambda_2}\right)^2=\lambda_1\left(\frac{a'}{2\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(\frac{b'}{2\lambda_2}\right)^2+\lambda_3\left(\frac{c'}{2\lambda_3}\right)^2-d'.$$

A lényegesen különböző esetek:

- $(+,+,+,+)$, $(+,+,+,-)$, $(+,+,+,0)$,
- $(+,+,-,+)$, $(+,+,-,-)$, $(+,+,-,0)$,

ahol az első három pozíció a sajátértékek előjelét, az utolsó pedig a jobb oldal előjelét rögzíti. A $(+,-,-,+)$ esetet például a $(+,+,-,-)$ esetnek megfelelő egyenlet képviseli a változók átjelölése és -1-gyel való szorzás révén. Felületünk tehát

- ellipszoid, üreshalmaz, egyetlen pont,
- egyköpenyű (hiperbolikus) hiperboloid, kétköpenyű (elliptikus) hiperboloid, kúp.

Az elfajuló esetek közé tartozik az

- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$ egyenletű elliptikus paraboloid,
- $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$ egyenletű hiperbolikus paraboloid,
- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ egyenletű elliptikus henger,
- $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ egyenletű hiperbolikus henger,
- $y^2=2px$ egyenletű parabolikus henger,
- metsző, illetve párhuzamos síkpárok, kettős sík.

2. Az euklideszi terek izometriái, az ortogonális csoport

6. Definíció. *Az euklideszi vektortér egy φ transzformációját izometriának nevezzük, ha távolságtartó, azaz*

$$d(\varphi(p),\varphi(q))=d(p,q)$$

teljesül a tér bármely p és q pontja esetén. A vektortér lineáris izometriái az ún. ortogonális transzformációk.

1. Példa. Bármely rögzített v vektor esetén a $\tau_v(w):=w+v$ képlettel definiált transzformáció izometria, melyet a v vektorral történő eltolásnak, vagy transzlációnak nevezünk. Egy transzláció akkor és csak akkor lineáris izometria, ha az identikus transzformáció - eltolás a zérusvektorral.

Egy euklideszi vektortér izometriái csoportot alkotnak a leképezéskompozíció műveletére nézve. Ezt a csoportot a vektortér izometriacsoportjának nevezzük. Az izometriacsoporton belül az ortogonális transzformációk halmaza maga is csoport, a vektortér ún. ortogonális csoportja. A pozitív determinánsú ortogonális transzformációk pedig az ortogonális csoport részcsoportját, az úgynevezett forgáscsoportot alkotják. Emlékeztetünk rá, hogy egy lineáris transzformáció determinánsa valamely mátrixreprezentánsának determinánsát jelenti. Ez független a reprezentáns megválasztásától. Azt mondjuk, hogy egy ortogonális transzformáció nemvalódi forgás, ha a determinánsa negatív.

8. Tétel. *Egy ortogonális transzformáció megtartja a vektorok normáját, a belső szorzatukat és a szögüket.*

Bizonyítás. Legyen f ortogonális transzformáció. Mivel f lineáris, ezért normatartó, hiszen egy lineáris transzformációnak az origó mindig fixpontja és az origótól mért távolság - mely invariáns az izometriákkal szemben - éppen a norma. Felhasználva a

$$\langle v, w\rangle = \frac{\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2}$$

azonosságot,

$$\langle f(v), f(w)\rangle = \frac{\|f(v)+f(w)\|^2 - \|f(v)\|^2 - \|f(w)\|^2}{2} = \frac{\|f(v+w)\|^2 - \|f(v)\|^2 - \|f(w)\|^2}{2} =$$

$$\frac{\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2} = \langle v, w\rangle$$

adódik, a vektorok szöge pedig egyszerűen azért invariáns, mert kifejezhető a norma és a belső szorzat segítségével. □

9. Tétel. *Ha az origó fixpontja egy izometriának, akkor az izometria ortogonális transzformáció.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy f izometriát és tegyük fel, hogy $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Mivel az origó fixpont, ezért a távolságtartás maga után vonja a normatartást, hiszen az origótól mért távolság éppen a norma. Következésképpen

$$\langle f(v), f(w)\rangle = -\frac{\|f(v) - f(w)\|^2 - \|f(v)\|^2 - \|f(w)\|^2}{2} = -\frac{\|v-w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2} = \langle v, w\rangle,$$

azaz a szóban forgó izometria a vektorok belső szorzatát is megőrzi. Ez azt jelenti, hogy a tér bármely $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázisát alapul véve az

$$e_1 := f(b_1), \ldots, e_n := f(b_n)$$

képvektorok ugyancsak ortonormált bázist alkotnak. Ortonormált bázis esetén azonban egyszerűen felírhatók a tér vektorai a

$$v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \ldots + \langle v, e_n\rangle e_n$$

formula segítségével. Kapjuk tehát, hogy

$$f(v) = \langle f(v), e_1\rangle e_1 + \ldots + \langle f(v), e_n\rangle e_n = \langle v, b_1\rangle e_1 + \ldots + \langle v, b_n\rangle e_n,$$

ahol a baloldali kifejezés már lineáris a v vektorváltozóban. Ennélfogva f lineáris izometria, vagy - ekvivalens terminológiával élve - ortogonális transzformáció. □

Tekintettel a háromszög-egyenlőtlenségre nyilvánvaló, hogy minden izometria egyenestartó; az affin transzformációk elmélete alapján tehát az origót fixen hagyó izometria szükségképpen lineáris, hiszen a tér a valós számtesttel van koordinátázva. Láthatjuk azonban, hogy a belső szorzatra alapozva egy jóval egyszerűbb érvelés is célhoz vezet[2]. Analitikus szempontból a belső szorzat megtartásának egy fontos következménye, hogy az ortogonális transzformációk mátrixreprezentánsa egy ortonormált bázisra vonatkozóan olyan mátrix, melynek oszlopait egymásra merőleges egységvektorok koordinátái töltik ki - ennélfogva a mátrix inverze egyenlő a transzponáltjával (ún. ortogonális mátrixok.)

10. Tétel. *Minden izometria előáll egy transzláció és egy ortogonális transzformáció kompozíciójaként.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy φ izometriát és a $v := \varphi(\mathbf{0})$ vektor segítségével képezzük az

$$f := \tau_v^{-1} \circ \varphi = \tau_{-v} \circ \varphi$$

leképezést. A konstrukció alapján evidens, hogy az origó fixpontja az f transzformációnak, mely - izometriák kompozíciója lévén - maga is izometria. Az előző állításra tekintettel f ortogonális transzformáció. Következésképpen

$$\varphi = \tau_v \circ f,$$

vagyis φ egy transzláció és egy ortogonális transzformáció kompozíciója. $\square$

A továbbiakban az izometriacsoport elemeinek egy speciális előállításáról lesz szó. Definiálni fogjuk a hipersíkra vonatkozó tükrözés fogalmát, majd előállítjuk mind az ortogonális, mind pedig az eltoláscsoport elemeit tükrözések szorzataként.

7. Definíció. *Legyen V egy n-dimenziós euklideszi vektortér és tekintsük az $(n-1)$-dimenziós H hiperalteret a térben. A hiperaltérre vonatkozó tükrözésen a vektortérnek a*

$$\rho_H(p) := p - 2\langle p, e\rangle e \tag{3}$$

képlettel definiált transzformációját értjük, ahol e az ortogonális komplementert generáló egységvektor. A H altér eltoltjaira, vagyis az $L := p + H$ alakú hipersíkokra vonatkozó tükrözést a

$$\rho_L := \tau_p \circ \rho_H \circ \tau_{-p}$$

formula definiálja.

A (3) formula geometriai jelentése, hogy a $\rho_H(p)$ vektor e-re eső vetülete a p vektor megfelelő vetületének ellentettje, a hiperaltérre eső vetületek pedig egyenlők:

$$\langle \rho_H(p), e\rangle = \langle p - 2\langle p, e\rangle e, e\rangle = -\langle p, e\rangle,$$

$$\rho_H(p) - \langle \rho_H(p), e\rangle e = p - 2\langle p, e\rangle e + \langle p, e\rangle e = p - \langle p, e\rangle e,$$

tekintettel arra, hogy e egységnormális. Geometriai szempontból a hipersíkra (azaz egy lineáris altér eltoltjára) vonatkozó tükrözés a TTT-szabályt követi: tol-tükröz-tol.

[2]A megfordítás természetesen nem igaz; az euklideszi vektortér egy affin leképezésének lineáris része általában nem izometria. Az affin transzformációcsoport bővebb, mint az izometriacsoport.

11. Feladat. Vezesse le a hipersíkra vonatkozó tükrözés képletét:

$$\rho_L(q) = q - 2\langle q-p, e\rangle e. \tag{4}$$

2. Állítás. *A hipersíkokra vonatkozó tükrözések*

- *izometriák,*
- *involúciók, azaz* $\rho_L \circ \rho_L = 1_V$*,*
- *fixpontjai a tükörsík pontjai és csakis ezek.*

Bizonyítás. Valamennyi észrevételünk direkt számolással igazolható, amit a TTT-szabályra tekintettel elegendő csupán altérre vonatkozó tükrözés esetében elvégezni. □

12. Feladat. Bizonyítsa be, hogy a rá illeszkedő pontoktól eltekintve, a tükörsík merőlegesen felezi az egymásnak megfelelő pontok által meghatározott szakaszt.

11. Tétel. *Egy n-dimenziós euklideszi vektortér minden ortogonális transzformációja előáll legfeljebb n darab hiperaltérre vonatkozó tükrözés kompozíciójaként.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy f ortogonális transzformációt és legyen $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis a térben. Ha az

$$a_1 := f(b_1) - b_1$$

vektor különbözik a zérusvektortól, akkor ρ_1 jelentse az a_1 normálvektorú H_1 hiperaltérre vonatkozó tükrözést, míg ellenkező esetben $\rho_1 := 1_V$. Kiértékelve az $f_1 := \rho_1 \circ f$ ortogonális transzformációt a b_1 vektoron, azt kapjuk, hogy

$$f_1(b_1) = \rho_1 \circ f(b_1) = f(b_1) - \frac{2}{\langle a_1, a_1\rangle}\langle f(b_1), a_1\rangle a_1.$$

Mivel az ortogonális transzformációk megőrzik a vektorok belső szorzatát, ezért

$$\langle f(b_1), a_1\rangle = \langle f(b_1), f(b_1) - b_1\rangle = 1 - \langle f(b_1), b_1\rangle,$$

illetve

$$\langle a_1, a_1\rangle = \langle f(b_1) - b_1, f(b_1) - b_1\rangle = 2 - 2\langle f(b_1), b_1\rangle$$

következik, azaz

$$f_1(b_1) = f(b_1) - a_1 = b_1.$$

A második lépésben tekintsük az

$$a_2 := f_1(b_2) - b_2$$

vektort. Ha a_2 különbözik a zérusvektortól, akkor ρ_2 jelentse az a_2 normálvektorú H_2 hiperaltérre vonatkozó tükrözést, míg ellenkező esetben $\rho_2 := 1_V$. Kiértékelve az $f_2 := \rho_2 \circ f_1$ ortogonális transzformációt a b_2 vektoron, az imént látottakhoz hasonlóan kapjuk, hogy

$$f_2(b_2) = b_2.$$

Másfelől

$$f_2(b_1) := \rho_2 \circ f_1(b_1) = \rho_2(b_1) = b_1 - \frac{2}{\langle a_2, a_2\rangle}\langle b_1, a_2\rangle a_2,$$

ahol

$$\langle b_1, a_2\rangle = \langle b_1, f_1(b_2) - b_2\rangle = \langle b_1, f_1(b_2)\rangle = \langle f_1(b_1), f_1(b_2)\rangle = 0,$$

ismételt hivatkozással arra, hogy az ortogonális transzformációk megőrzik a vektorok belső szorzatát. Ennélfogva

$$f_2(b_1) = b_1.$$

Az eljárást folytatva, az n-dik lépésben olyan

$$f_n := \rho_n \circ f_{n-1} = \rho_n \circ \ldots \circ \rho_1 \circ f$$

ortogonális transzformációhoz jutunk, melyre

$$f_n(b_i) = b_i$$

teljesül bármely $i = 1, \ldots, n$ index esetén. Ez azt jelenti, hogy $f_n = 1_V$ és átrendezéssel

$$f = \rho_1 \circ \ldots \circ \rho_n$$

következik, amint állítottuk. □

13. Feladat. Bizonyítsa be, hogy a hiperaltérre vonatkozó tükrözések determinánsa -1.

5. Következmény. *Ha az ortogonális transzformáció forgás, akkor hiperaltérre vonatkozó tükrözések kompozíciójaként történő előállításában a tükrözések száma páros, míg ellenkező esetben - azaz nemvalódi forgás esetén - a tükrözések száma páratlan.*

Az izometriák ortogonális részének tükrözések szorzataként történő előállítása után a transzlációk speciális előállítása következik.

12. Tétel. *Bármely transzláció előáll két, az eltolóvektorra merőleges hipersíkra vonatkozó tükrözés kompozíciójaként. A külső/belső tükörsík tetszőlegesen választható, ezek után a belső/külső tükörsík egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás. Legyen τ_v egy tetszőleges transzláció és tekintsük az eltolóvektorra merőleges H hiperalteret. A tér

$$L_1 := p + H$$

hipersíkját alapul véve, meg fogjuk mutatni, hogy a transzláció és a hipersíkra vonatkozó ρ_1 tükrözés kompozíciója egy olyan - egyértelműen meghatározott - L_2 hipersíkra vonatkozó tükrözés, melynek iránytere H - vagyis a hipersíkok párhuzamosak. Kiértékelve a $\varphi := \tau_v \circ \rho_1$ transzformációt a tér tetszőleges q pontján, azt kapjuk, hogy

$$\varphi(q) = q + v - \frac{2}{\langle v, v\rangle}\langle q - p, v\rangle v = q - \frac{2}{\langle v, v\rangle}\langle q - \left(p + \frac{1}{2}v\right), v\rangle v,$$

ami - tekintettel a hipersíkokra vonatkozó tükrözést leíró (4) képletre - éppen az

$$L_2 := p + \frac{1}{2}v + H$$

hipersíkra vonatkozó tükrözés. Ennélfogva

$$\rho_2 = \tau_v \circ \rho_1$$

és átrendezéssel $\tau_v = \rho_2 \circ \rho_1$ következik, vagyis a transzláció kívánt előállítása. Jegyezzük meg, hogy L_1 a belső, míg L_2 a külső hipersík szerepét játssza. Amennyiben L_1 - nek a külső tükörsík szerepét szánjuk, akkor a $\varphi := \rho_1 \circ \tau_v$ transzformációból kiindulva

$$L_2 := p - \frac{1}{2}v + H$$

adódik; a részletek átgondolása hasznos gyakorlófeladat. □

6. Következmény. *Három párhuzamos hipersíkra vonatkozó tükrözés helyettesíthető egyetlen hipersíkra vonatkozó tükrözéssel.*

Bizonyítás. Használjuk fel a párhuzamos hipersíkok egyikét, a másik kettő által meghatározott eltolás előállításához. □

13. Tétel. *Egy n-dimenziós euklideszi vektortér minden izometriája előáll legfeljebb $n+1$ darab hipersíkra vonatkozó tükrözés kompozíciójaként.*

Bizonyítás. Legyen φ egy tetszőleges izometria. A 11. Tételben mondottak szerint φ előáll egy transzláció és egy ortogonális transzformáció kompozíciójaként a

$$\varphi = \tau \circ f$$

alakban. Ha a transzlációt felírjuk az L_1 és az L_2 hipersíkokra vonatkozó ρ_1 és ρ_2 tükrözések

$$\tau = \rho_2 \circ \rho_1$$

kompozíciójaként, és ezek egyikét - a határozottság kedvéért például az L_1 hipersíkot - úgy választjuk meg, hogy illeszkedjék az origóra, akkor az

$$f_1 := \rho_1 \circ f$$

transzformáció változatlanul lineáris izometria (ortogonális transzformáció), ami azt jelenti, hogy előáll legfeljebb n darab hipersíkra - speciálisan: hiperaltérre - vonatkozó tükrözés kompozíciójaként. Az alapul vett izometria tehát a ρ_2 és még legfeljebb n darab tükrözés kompozíciója. □

8. Definíció. *Egy izometriát páros, illetve páratlan izometriának nevezünk aszerint, amint hipersíkokra vonatkozó tükrözések kompozíciójaként történő előállításában, a tükrözések száma páros, illetve páratlan.*

3. Állítás. *Egy izometria pontosan akkor páros, illetve páratlan, ha ortogonális része forgás, illetve nemvalódi forgás.*

Bizonyítás. Észrevételünk az 5. Következmény alapján nyilvánvaló. □

3. Az euklideszi sík izometriái

A továbbiakban egy kétdimenziós euklideszi vektorteret alapul véve okoskodunk. Ennek megfelelően, a hiperalterek dimenziója egy, a hipersíkok pedig az egydimenziós lineáris alterek és eltoltjaik - vagyis a vektortér affin egyenesei. A hipersíkra vonatkozó tükrözés tehát egyszerűen tengelyes tükrözést jelent. A vektortér affin egyeneseit az $a, b, \ldots$, az egyenesekre vonatkozó tükrözéseket pedig a $\rho_a, \rho_b, \ldots$ szimbólumokkal fogjuk jelölni.

14. Tétel. *Három párhuzamos egyenesre vonatkozó tükrözés kompozíciója helyettesíthető egyetlen tengelyes tükrözéssel úgy, hogy a tükörtengely párhuzamos az eredeti egyenesekkel.*

Bizonyítás. Ez a 6. Következmény speciális esete. □

3.1. Az euklideszi sík ortogonális csoportja

Mivel a nemvalódi forgások egyszerűen tengelyes tükrözések, a továbbiakban az ortogonális csoport forgáscsoportjával foglalkozunk részletesebben. A forgáscsoport leírásához vegyük figyelembe, hogy az elemek determinánsa pozitív, ezért az 11. Tétel és a 5 Következmény szerint a forgások pontosan két, az origóra illeszkedő egyenesre vonatkozó tükrözés kompozíciójaként állíthatók elő. Tekintsük az a_1 és a_2 egyenesek

$$v_1 = (\cos\theta_1, \sin\theta_1), \quad v_2 = (\cos\theta_2, \sin\theta_2)$$

irányvektorait; az

$$n_1 = (-\sin\theta_1, \cos\theta_1), \quad n_2 = (-\sin\theta_2, \cos\theta_2)$$

vektorok tehát a normálvektorai az egyeneseknek. A (3) analitikus képlet alapján a tükrözések mátrixai rendre

$$\begin{pmatrix} 1-2\sin^2\theta_1 & 2\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ 2\sin\theta_1\cos\theta_2 & 1-2\cos^2\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta_1 & \sin 2\theta_1 \\ \sin 2\theta_1 & -\cos 2\theta_1 \end{pmatrix}$$

és

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta_2 & \sin 2\theta_2 \\ \sin 2\theta_2 & -\cos 2\theta_2 \end{pmatrix}.$$

A mátrixok szorzata reprezentálja a tükrözések kompozíciójaként adódó forgást (az origó körül):

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta_2 & \sin 2\theta_2 \\ \sin 2\theta_2 & -\cos 2\theta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2\theta_1 & \sin 2\theta_1 \\ \sin 2\theta_1 & -\cos 2\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2(\theta_2-\theta_1) & -\sin 2(\theta_2-\theta_1) \\ \sin 2(\theta_2-\theta_1) & \cos 2(\theta_2-\theta_1) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

ahol $\theta = 2(\theta_2 - \theta_1)$ az ún. forgásszög (a tengelyek szögének kétszerese). A mátrixformula alapján a szabad tengelyválasztásra vonatkozó észrevételt is tehetünk, hiszen a θ forgásszög ismeretében kell adott θ_2 irányszöghöz (θ_1 irányszöghöz) a θ_1 irányszöget (θ_2 irányszöget) alkalmasan megválasztani.

15. Tétel. *Bármely forgás előáll két, az origóra illeszkedő egyenesre vonatkozó tükrözés kompozíciójaként. A külső/belső tengely tetszőlegesen választható, ezek után a belső/külső tengely egyértelműen meghatározott.*

3.2. Az euklideszi sík izometriacsoportja

A forgáscsoport elemeinek tükrözések szorzataként való előállítása alapján általánosíthatjuk a forgások fogalmát.

9. Definíció. *Az euklideszi sík egy metsző egyenespárjának a tagjaira vonatkozó tükrözések kompozícióját pont körüli forgásnak nevezzük, a metszéspontot pedig a forgás centrumának. A tengelyek szögének kétszerese a forgásszög. Ha a szóban forgó egyenesek merőlegesek egymásra, akkor az általuk meghatározott forgás egy félfordulat, vagy - ekvivalens terminológiával élve - egy centrális tükrözés.*

Ha a forgás centruma az origó, akkor a 15. Tételre tekintettel visszakapjuk a pozitív determinánsú ortogonális transzformációk fogalmát - ez a forgások eddigiekben használt értelmezése. Azt is mondhatjuk, hogy a forgások általános fogalmát (a hipersíkra, s nem feltétlenül hiperaltérre vonatkozó tükrözés mintájára) a TFT-szabály alapján alkotjuk meg: tol-forgat-tol. Ha ugyanis p a szóban forgó egyenesek közös pontja, akkor a TTT-szabály alapján

$$\varphi = (\tau_p \circ \rho_2 \circ \tau_{-p}) \circ (\tau_p \circ \rho_1 \circ \tau_{-p}) = \tau_p \circ \rho_2 \circ \rho_1 \circ \tau_{-p} = \tau_p \circ f \circ \tau_{-p},$$

ahol ρ_1 és ρ_2 az origóra illeszkedő egyenesekre vonatkozó tükrözések, s ennélfogva f forgás az ortogonális csoportban.

7. Következmény. *Egy pont körüli forgás tükrözések kompozíciójaként történő előállításában a centrumra illeszkedő külső/belső tengely tetszőlegesen választható, ezek után a belső/külső tengely egyértelműen meghatározott.*

16. Tétel. *Három, közös pontra illeszkedő egyenesre vonatkozó tükrözés helyettesíthető egyetlen tengelyes tükrözéssel, ahol a tengely illeszkedik az egyenesek közös pontjára.*

Bizonyítás. Használjuk fel a konkurrens egyenesek egyikét, a másik kettő által meghatározott forgás előállításához. □

10. Definíció. *Az euklideszi sík egy transzformációját csúsztatva tükrözésnek nevezzük, ha előáll egy tengelyes tükrözés és egy tükörtengely irányú transzláció kompozíciójaként.*

3. Megjegyzés. Az analitikus képletek segítségével egyszerűen ellenőrizhető, hogy a csúsztatva tükrözést definiáló leképezéskompozíció tagjainak a sorrendje közömbös.

17. Tétel. *Az euklideszi sík bármely izometriája az alábbi transzformációk egyike:*

- *tengelyes tükrözés,*
- *transzláció,*
- *pont körüli forgás,*
- *csúsztatva tükrözés.*

Bizonyítás. Az 13. Tétel alapján a sík bármely izometriája előáll legfeljebb három tengelyes tükrözés kompozíciójaként. Annak megfelelően, hogy a tengelyek metszők, vagy párhuzamosak, a két tengelyes tükrözés kompozíciójaként előálló páros izometriák pont körüli forgások, vagy transzlációk. Három tengelyes tükrözés kompozíciója viszont páratlan izometria, mely felírható egy nemvalódi forgás (azaz egy origóra illeszkedő tengelyre vonatkozó tükrözés) és egy eltolás kompozíciójaként: $\varphi = \tau_v \circ \rho$. Bontsuk fel az eltolóvektort a tengellyel párhuzamos és egy arra merőleges irányú komponensre, azaz

$$v = v_1 + v_2,$$

ahol v_1 a tükörtengely irányvektora, míg v_2 a tükörtengelyre merőleges vektor:

$$\varphi = \tau_v \circ \rho = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \rho.$$

Értelemszerűen τ_1, illetve τ_2 jelöli a v_1, illetve v_2 vektorral történő eltolást. Ha a v_2 irányú eltolás párhuzamos tengelyekre vonatkozó tükrözések kompozíciójaként való előállításában felhasználjuk a ρ tükrözés tengelyét, akkor a szóban forgó izometria a v_1 vektorral történő eltolás és az $\frac{1}{2}v_2$ pontra illeszkedő, v_1 irányvektorú egyenesre vonatkozó tükrözés szorzatára redukálódik, azaz csúsztatva tükrözés. Jegyezzük meg, hogy a $v_1 = \mathbf{0}$ esetben az izometria tengelyes tükrözésre redukálódik. □

4. Az euklideszi tér izometriái

A továbbiakban egy háromdimenziós euklideszi vektorteret alapul véve okoskodunk. Ennek megfelelően, a hiperalterek dimenziója kettő, a hipersíkok pedig a kétdimenziós lineáris alterek és eltoltjaik - vagyis a vektortér affin síkjai. A hipersíkra vonatkozó tükrözés tehát egyszerűen síkra vonatkozó tükrözést jelent. A vektortér affin síkjait a $H, K, \ldots$, a síkokra vonatkozó tükrözéseket pedig a $\rho_H, \rho_K, \ldots$ szimbólumokkal fogjuk jelölni.

18. Tétel. *Három párhuzamos síkra vonatkozó tükrözés kompozíciója helyettesíthető egyetlen síkra vonatkozó tükrözéssel úgy, hogy a tükörsík párhuzamos az eredeti síkokkal.*

Bizonyítás. Ez a 6. Következmény speciális esete. □

4.1. Az euklideszi tér ortogonális csoportja

Követve a síkbeli felépítést, kezdjük az ortogonális csoport forgáscsoportjával. A forgáscsoport leírásához vegyük figyelembe, hogy az elemek determinánsa pozitív, ezért az 11. Tétel és az 5. Következmény szerint a forgások pontosan két, az origóra illeszkedő síkra vonatkozó tükrözés kompozíciójaként állíthatók elő. Ha a forgás különbözik az identikus transzformációtól, akkor a síkok is különbözőek, ami azt jelenti, hogy metszésvonaluk a tér egy origóra illeszkedő egyenese. Nyilvánvaló, hogy a szóban forgó egyenes pontonként fix és egyértelműen meghatározott. Tekintsünk egy f forgást és legyen l a transzformáció pontonként fix egyenese. Mivel az ortogonális transzformációk megőrzik a vektorok szögét, ezért a forgástengely ortogonális komplementere olyan kétdimenziós altér, mely invariáns a forgással szemben. Megszorítva erre az altérre, f az euklideszi **sík** egy forgását származtatja. Ha tehát az invariáns H altér egy ortonormált bázisát kiegészítjük a pontonként fix egyenes egységnyi hosszú irányvektorával, akkor a tér olyan bázisát kapjuk, melyre vonatkozóan f mátrixa

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alakú. Ezek után a szabad síkválasztásra vonatkozó észrevétel a szabad tengelyválasztást biztosító 15. Tétel következménye, amit az invariáns kétdimenziós altérben alkalmazunk: a forgástengelyre illeszkedő tetszőleges K_1 síkot alapul véve, állítsuk elő az invariáns H altérben indukált forgást az $a_1 := H \cap K_1$ és az általa egyértelműen meghatározott a_2 egyenesekre vonatkozó tükrözések kompozíciójaként. A térbeli forgást ezek után úgy rekonstruálhatjuk, hogy először a K_1, majd pedig az a_2 és a forgástengely által meghatározott K_2 síkra tükrözünk.

19. Tétel. *Bármely forgás előáll két, az origóra illeszkedő síkra vonatkozó tükrözés kompozíciójaként. A külső/belső tükörsík tetszőlegesen választható, ezek után a belső/külső tükörsík egyértelműen meghatározott.*

A továbbiakban a nemvalódi forgásokat vizsgáljuk. Mivel páratlan izometriáról van szó, ezért előállíthatók egy, vagy pedig három tükrözés kompozíciójaként. A diszkusszió első lépésének elméleti hátterét az algebra alaptétele szolgáltatja. Ennek köszönhetően a páratlan (speciálisan három-) dimenziós vektorterek lineáris transzformációinak mindig van valós sajátértéke, hiszen a komplex gyökök konjugált párokban lépnek fel egy valós együtthatós polinom esetében, de a karakteriszitkus polinom fokszáma páratlan (speciálisan három). Mivel az ortogonális transzformáció megőrzi a vektorok hosszát, ezért a sajátérték ± 1. Ha e egy (egységnyi hosszúságú) sajátvektor, akkor ortogonális komplementere invariáns a transzformációval szemben, hiszen az ortogonális transzformációk a vektorok szögét is megőrzik. Kiegészítve az invariáns altér egy ortonormált bázisát az e vektorral, a tér olyan bázisát kapjuk, melyre vonatkozóan az ortogonális rész mátrixa

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ vagy } \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

alakú, ahol A és B 2×2-típusú ortogonális mátrixok, $\det A = -1$ és $\det B = 1$. Ez azt jelenti, hogy A (síkbeli) tükrözésmátrix, azaz a tükörtengely egységnyi hosszú irány-, illetve normálvekorát szerepeltetve az invariáns altér bázisaként,

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ami térbeli tükrözésmátrix (a pontonként fix tükörsíkot az invariáns altérben futó tükörtengely és az e vektor feszíti ki). A (síkbeli) forgásmátrixok esetén pedig

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

és (5) egy olyan transzformációt reprezentál, mely egy síkra vonatkozó tükrözés és egy a síkra merőleges tengely körüli forgás kompozíciója:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jegyezzük meg, hogy a tükörsík és a rá merőleges forgástengely metszéspontja éppen az origó.

4.2. Az euklideszi tér izometriacsoportja

A forgáscsoport elemeinek tükrözések szorzataként való előállítása alapján általánosíthatjuk a forgások fogalmát.

11. Definíció. *Az euklideszi tér egy metsző síkpárjának a tagjaira vonatkozó tükrözések kompozícióját tengely körüli forgásnak nevezzük, a metszésvonalat pedig a forgás tengelyének. A síkok szögének kétszerese a forgásszög. Ha a szóban forgó síkok merőlegesek egymásra, akkor az általuk meghatározott forgás egy félfordulat, vagy - ekvivalens terminológiával élve - egy tengelyes tükrözés.*

Ha a forgástengely illeszkedik az origóra, akkor a 19. Tételre tekintettel visszakapjuk a pozitív determinánsú ortogonális transzformációk fogalmát - ez a forgások eddigiekben használt értelmezése. Azt is mondhatjuk, hogy a forgások általános fogalmát (a hipersíkra, s nem feltétlenül hiperaltérre vonatkozó tükrözés mintájára) a TFT-szabály alapján alkotjuk meg: tol-forgat-tol. Ha ugyanis p a szóban forgó síkok közös pontja, akkor a TTT-szabály alapján

$$\varphi = (\tau_p \circ \rho_2 \circ \tau_{-p}) \circ (\tau_p \circ \rho_1 \circ \tau_{-p}) = \tau_p \circ \rho_2 \circ \rho_1 \circ \tau_{-p} = \tau_p \circ f \circ \tau_{-p},$$

ahol ρ_1 és ρ_2 az origóra illeszkedő síkokra vonatkozó tükrözések, s ennélfogva f forgás az ortogonális csoportban.

8. Következmény. *Egy tengely körüli forgás tükrözések kompozíciójaként történő előállításában a forgástengelyre illeszkedő külső/belső tükörsík tetszőlegesen választható, ezek után a belső/külső tükörsík egyértelműen meghatározott.*

20. Tétel. *Három, közös egyenesre illeszkedő síkra vonatkozó tükrözés kompozíciója helyettesíthető egyetlen síkra vonatkozó tükrözéssel úgy, hogy a tükörsík illeszkedik az eredeti síkok közös metszésvonalára.*

Bizonyítás. Használjuk fel a közös egyenesre illeszkedő síkok egyikét a másik kettő által meghatározott forgás előállításához. □

A nemvalódi forgások fogalmát is általánosíthatjuk a tükrözések szorzataként való előállítás alapján.

12. Definíció. *Az euklideszi tér egy transzformációját csúsztatva tükrözésnek nevezzük, ha előáll egy síkra vonatkozó tükrözés és egy tükörsík irányú transzláció kompozíciójaként. Egy síkra vonatkozó tükrözés és egy tengely körüli forgás kompozíciója forgatva tükrözés, ha a tükörsík merőleges a forgástengelyre.*

4. Megjegyzés. Az analitikus képletek segítségével egyszerűen ellenőrizhető, hogy a csúsztatva, illetve a forgatva tükrözést definiáló leképezéskompozíció tagjainak a sorrendje közömbös.

13. Definíció. *Az euklideszi tér egy transzformációját csavarmozgásnak nevezzük, ha előáll egy tengely körüli forgás és egy tengelyirányú transzláció kompozíciójaként.*

5. Megjegyzés. Az analitikus képletek segítségével egyszerűen ellenőrizhető, hogy a csavarmozgást definiáló leképezéskompozíció tagjainak a sorrendje közömbös.

21. Tétel. *Az euklideszi tér bármely izometriája az alábbi transzformációk egyike:*

- *síkra vonatkozó tükrözés,*
- *transzláció,*
- *tengely körüli forgás,*
- *csúsztatva tükrözés,*
- *forgatva tükrözés,*
- *csavarmozgás.*

Bizonyítás. Az 13. Tétel alapján a tér bármely izometriája előáll legfeljebb négy síkra vonatkozó tükrözés kompozíciójaként. Annak megfelelően, hogy a síkok metszők, vagy párhuzamosak, a két síkra vonatkozó tükrözés kompozíciójaként előálló páros izometriák tengely körüli forgások, vagy transzlációk. Három síkra vonatkozó tükrözés kompozíciója viszont páratlan izometria, melynek ortogonális része nemvalódi forgás, azaz tükrözés, vagy pedig forgatva tükrözés. Mindkét esetben bontsuk fel az eltolóvektort egy a tükörsíkkal párhuzamos és egy arra merőleges komponensre. Ha az ortogonális rész egyetlen tükrözésre redukálható, akkor az eltolóvektor felbontása a tükörsíkkal párhuzamos és egy arra merőleges irányú eltolásra, a megfelelő síkbeli állítás igazolása során látottak szerint adja, hogy csúsztatva tükrözésről van szó: felhasználva a merőleges komponenssel történő eltolás párhuzamos síkok szorzataként történő előállításában az ortogonális rész tükörsíkját, a leképezéskompozíció egy (már nem feltétlenül az origóra illeszkedő) síkra tükrözés és egy vele párhuzamos irányú eltolás kopozíciója (csúsztatva tükrözés). Ha pedig az ortogonális rész forgatva tükrözés, akkor egyrészt alkalmazzuk a csúsztatva tükrözésnél szereplő előállítást a tükörsíkra merőleges irányú eltolásnál, másrészt pedig szerepeltessünk egy a forgástengelyre illeszkedő síkot a tükörsíkkal párhuzamos irányú eltolás előállításában. Ha a tengely körüli forgás előállításában ugyanez a sík szerepel, akkor a leképezéskompozíció egy (már nem feltétlenül az origóra illeszkedő) síkra tükrözésés egy rá merőleges tengely körüli forgatás szorzata, azaz forgatva tükrözés lesz. A bizonyítás teljessé válik, ha megmutatjuk, hogy négy síkra vonatkozó tükrözés kompozíciója - feltéve, hogy a tükörsíkok speciális helyzete miatt nem redukálódik az előző esetek valamelyikére - csavarmozgás. Mivel páros izometriáról van szó, ezért transzláció és ortogonális transzformáció kompozíciójaként történő

$$\varphi = \tau \circ f$$

előállításában a lineáris rész forgás. Bontsuk fel a transzláció v eltolóvektorát a forgás tengelyével párhuzamos v_1 és a forgástengelyre merőleges v_2 komponensre. Ha τ_1, illetve τ_2 rendre a v_1, illetve a v_2 vektorral történő eltolást jelöli, akkor egyrészt

$$\tau = \tau_1 \circ \tau_2$$

írható, másrészt pedig feltehető, hogy az ortogonális transzformáció síkra vonatkozó tükrözések kompozíciójaként történő

$$f = \rho_2 \circ \rho_1$$

előállításában a második tükörsík merőleges a v_2 vektorra - ellenkező esetben forgassuk el a síkokat mindaddig, amíg a kívánt merőlegesség bekövetkezik[3]. Tekintsük most a

$$\varphi_2 := \tau_2 \circ \rho_2$$

[3]Analitikus megközelítésben, az e és az $e \times v_2$ vektorok által kifeszített síkról van szó, ahol e a forgástengely irányvektora.

izometriát. Mivel a transzláció két további, a ρ_2 tükrözés síkjával párhuzamos síkra vonatkozó tükrözés kompozíciója, ezért a szóban forgó izometria - három párhuzamos síkra vonatkozó tükrözés kompozíciójaként - egyetlen síkra vonatkozó tükrözéssel helyettesíthető úgy, hogy a helyettesítő tükörsík párhuzamos az eredeti síkokkal. Ennélfogva a ρ_1 tükrözés síkjával vett metszésvonala párhuzamos a ρ_2 és a ρ_1 tükrözések síkjainak eredeti metszésvonalával - ez éppen az ortogonális rész forgástengelye. Utóbbi pedig - a konstrukció szerint - párhuzamos a v_1 vektorral is, ami azt jelenti, hogy a transzformáció csavarmozgás. $\square$

6. Megjegyzés. Az alacsony dimenziós esetek ortogonális transzformációinak tárgyalása a magasabb dimenziós esetekben is alkalmazható egy indukciós elv alapján. Ennek elméleti háttere az, hogy egy euklideszi vektortér minden ortogonális transzformációjának van egy-, vagy kétdimenziós invariáns altere. Egydimenziós invariáns altér létezése a karakterisztikus polinom valós gyökének létezéséből következik. Ez a helyzet például páratlan dimenziós vektorterek esetén. Ha nincs valós gyök, akkor komplex sajátértékek lépnek fel, ráadásul konjugált párokban, hiszen a karakterisztikus polinom valós együtthatós. A komplex sajátértékekhez komplex (azaz komplex koordinátákkal megadható) sajátvektorok tartoznak:

$$M(v + wi) = (\alpha + \beta i)(v + wi),$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, míg $v, w \in V$ és M a szóban forgó ortogonális transzformáció mátrixa. Részletesen kiírva

$$M(v + wi) = Mv + Mwi = (\alpha v - \beta w) + (\alpha w + \beta v)i,$$

ahonnan az következik, hogy

$$Mv = \alpha v - \beta w, \quad Mw = \alpha w + \beta v.$$

Ha v (vagy w) nem sajátvektor (valós sajátértékkel), akkor v és w lineárisan független, továbbá az általuk generált kétdimenziós altér invariáns. Az egy- és kétdimenziós invariáns alterek ortonormált bázisaiból álló térbeli bázisra vonatkozóan tehát az n-dimenziós euklideszi vektortér ortogonális transzformációjának mátrixa

$$\begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots 0 \\ 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0\ldots 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0\ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0\ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_k & 0\ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm E_{n-k} \end{pmatrix}$$

alakú, ahol $S_1, \ldots, S_k$ kétdimenziós forgásmátrixok, míg $\pm E_{n-k}$ az indexnek megfelelő méretű diagonális mátrix, melynek főátlójában ± 1 elemek állnak.