1949

Conditional equations for monomial functions

Feltételes egyenletek általánosított monom függvényekre

előzetes tézisfüzet

Garda-Mátyás Edit

Témavezető: **Dr. Boros Zoltán**

Debreceni Egyetem

Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2020.

1. Introduction

In this PhD dissertation we study monomial functions $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ of degree $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ which satisfy the conditional equation $y^n f(x) = x^n f(y)$ or $y^n f(x) = x^n g(y)$ for all points (x, y) on a specified curve. The above question was motivated by similar problems solved for additive functions, see the papers [1, 5, 6, 12, 30, 25, 35].
Our investigations were carried out along the following curves:

$$
\begin{aligned}
&S_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, ax + by = c\} \quad \text{with } a\,,\ b\,,\ c \in \mathbb{R}\,,\ (a^2 + b^2) \cdot c \neq 0\,,\\
&S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^m = y\} \quad \text{with } m \in \mathbb{Z}\,, \quad |m| \geqslant 2\,,\\
&S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 1\},\\
&S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - y^2 = 1\},\\
&S_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\},\\
&S_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0 \ \text{ and } \ \log x = y\},\\
&S_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, e^x = y\}.
\end{aligned}
$$

Before summarizing our theorems, let's look at the necessary terminology.
We call a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *additive* if $f(x + y) = f(x) + f(y)$ holds for all $x, y \in \mathbb{R}$. A function $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) is called *n–additive* if F is additive in each of its variables. Given a function $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, by the *diagonalization* of F we understand the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ arising from F by putting all the variables (from $\mathbb{R}$) equal. If, in particular, f is the diagonalization of an n–additive function $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, we say that f is a *generalized monomial of degree n*. Generalized monomials of degree 2 are called quadratic functions, cubic functions are generalized monomials of order 3. Quadratic functions are characterized by

the functional equation

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y) \qquad (x,y\in\mathbb{R}), \tag{1.1}$$

which is the so called *norm square equation* or *parallelogram law.*
The biadditive symmetric functional F that generates the quadratic function f is given by the formula

$$F(x,y)=\frac{1}{2}[f(x+y)-f(x)-f(y)]$$

for all $x,y\in\mathbb{R}$.
We say that $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is a *derivation* if f is additive and satisfies the functional equation $f(xy)=f(x)y+xf(y)$ for every $x,y\in\mathbb{R}$. The family of derivations $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is denoted by $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. A functional $B\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is called a *bi-derivation* if the mappings $t\mapsto B(t,x)$ and $t\mapsto B(x,t)$ $(t\in\mathbb{R})$ are derivations for each $x\in\mathbb{R}$. For each $n\in\mathbb{N}$, an additive mapping $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is called a derivation of order n, if there exists $B\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that B is a (symmetric) bi-derivation of order $n-1$ (that is, B is a derivation of order $n-1$ in each variable) and $f(xy)-xf(y)-f(x)y=B(x,y)$ $(x,y\in\mathbb{R})$. The identically zero map is the only derivation of order zero. The set of derivations of order n will be denoted by $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

2. New results

Our main results are presented in four chapters, classified by curves. In Chapter 3 we investigate the continuity of quadratic and higher order monomial functions satisfying additional equations along the straight line. Examining the quadratic functions, we get the following results.

Theorem 2.1. *(Z. Boros and E. Garda-Mátyás [9]). If* $A, B \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *and* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *are quadratic functions such that*

$$(Ax + B)^2 f(x) = x^2 g(Ax + B)$$

for every $x \in \mathbb{R}$, *then there exists* $C \in \mathbb{R}$ *such that*

$$f(x) = g(x) = C \cdot x^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Corollary 2.1. *(Z. Boros and E. Garda-Mátyás [9]). If a quadratic function* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfies the additional equation* $y^2 f(x) = x^2 f(y)$ *for the pairs* $(x, y) \in S_0$, *then* $f(x) = f(1)x^2$ *for every* $x \in \mathbb{R}$.

Remark 2.1. The implication in Corollary 2.1 does not hold if $c = 0$. In this case, if, for instance, $b \neq 0$, $y = -\frac{a}{b}x = Ax$, and our assumption can be written as $A^2x^2 f(x) = x^2 f(Ax)$, i.e., $f(Ax) = A^2 f(x)$. Indeed, there exists a discontinuous example of the form $f(x) = (h(x))^2$ $(x \in \mathbb{R})$, where $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a discontinuous additive function, such that the homogeneity field of h contains A.

Extending the investigation to higher order monomial functions we have the following result.

Theorem 2.2. *(Z. Boros and E. Garda-Mátyás [10]). Suppose that* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *is a generalized monomial function of degree* $n \in \mathbb{N}$ *and* f

satisfies the additional equation $y^n f(x) = x^n f(y)$ *under the condition* $(x, y) \in S_0$. *Then* $f(x) = x^n f(1)$ *for all* $x \in \mathbb{R}$.

Generalizing the problem by introducing a second monomial function we prove a stronger result.

Theorem 2.3. *Suppose that* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *and* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *are generalized monomials of degree* $n \in \mathbb{N}$ *that satisfy the additional equation* $y^n f(x) = x^n g(y)$ *for the pairs* $(x, y) \in S_0$. *Then* $f(x) = g(x) = x^n f(1)$ *for all* $x \in \mathbb{R}$.

Chapter 4 contains results for quadratic and cubic functions satisfying conditional equations involving the power function. First we study the case when there is a single quadratic function in the conditional equation.

Theorem 2.4. *(Z. Boros and E. Garda-Mátyás [9], E. Garda-Mátyás [16]). If* $2 \leqslant |m|$, $m \in \mathbb{Z}$ *and the quadratic function* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfies*

$$f(x^m) = x^{2m-2} f(x)$$

for every $x \in \mathbb{R}$, *then there exists* $C \in \mathbb{R}$ *such that*

$$f(x) = C \cdot x^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

We note that in case $m = 0$ the same implication is trivial, while in case $m = 1$ the additional equation becomes a trivial identity that does not imply any restriction for f (hence f can be discontinuous as well).

In the particular case $m = 2$, but with a modified version of the additional equation, we find discontinuous solutions.

Theorem 2.5. *(Z. Boros and E. Garda-Mátyás [9]). Let* $K \in \mathbb{R}$. *If a quadratic function* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfies the additional equation*

$$f(x^2) = K x^2 f(x) \tag{2.1}$$

for every $x \in \mathbb{R}$, *then either* $f = 0$ *or* $K \in \{1, 2, 4\}$. *In the latter cases, we have the following representations for* f.

- *A quadratic mapping* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fulfills* (2.1) *with* $K = 1$ *if, and only if,*
$$f(x) = f(1) \cdot x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
- *A quadratic mapping* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fulfills* (2.1) *with* $K = 2$ *if, and only if, there exists* $\varphi \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ *such that*
$$f(x) = 4x\varphi(x) - \varphi(x^2) \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{2.2}$$
- *If* $B\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *is a symmetric bi-derivation, then*
$$f(x) = B(x, x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$
is a quadratic solution of the equation (2.1) *with* $K = 4$.

Remark 2.2. If $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, then equation (2.1) yields $f(x) = \varphi(x^2)$ $(x \in \mathbb{R})$. This observation ensures the existence of a non-zero quadratic solution f of (2.2) for $K = 2$. The existence of such solutions in the cases $K = 1$ and $K = 4$ is an obvious consequence of the last theorem.

Remark 2.3. We can observe that, in case $K = 4$, this theorem provides only a sufficient condition for f to satisfy equations (1.1) and (2.1). It is an open question whether this condition is necessary.

However, we can prove a somewhat weaker necessary condition in that case.

Theorem 2.6. *If a quadratic function* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfies the additional equation*
$$f\left(x^2\right) = 4x^2 f(x)$$
for every $x \in \mathbb{R}$, *then* f *is the trace of a symmetric bi-derivation of order 2.*

The significance of the previous results is highlighted by the following theorem, where two quadratic functions are involved.

Theorem 2.7. *The quadratic functions* f, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfy the additional equation* $y^2 f(x) = x^2 g(y)$ *for the pairs* $(x, y) \in S_1$ *with* $m = 2$ *if, and only if, there exist an additive function* $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *and a quadratic function* $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfying the condition*

$$h(x^2) = 4x^2 h(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

such that

$$f(x) = h(x) + \varphi(x^2) \quad \text{and} \quad g(x) = \frac{1}{4}h(x) + x\varphi(x)$$

for all $x \in \mathbb{R}$.

And finally, extending the study to cubic functions, we get the following result.

Theorem 2.8. *(Z. Boros and E. Garda-Mátyás [10]). If* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *is a generalized monomial of degree 3 that satisfies the additional equation* $y^3 f(x) = x^3 f(y)$ *under the condition* $(x, y) \in S_1$, *then* $f(x) = x^3 f(1)$ *for all* $x \in \mathbb{R}$.

In Chapter 5 we investigate the continuity of additive, quadratic and higher order monomial functions that satisfy subsidiary equations along hyperbolas or the unit circle.
We start with a negative result along the hyperbola given by the equation $xy = 1$. If $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a generalized monomial function of degree $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, f satisfies the additional equation

$$f(x) = x^{2n} f\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (\forall\, x \neq 0),$$

it is easy to see, that there exist discontinuous solutions.
For example, if $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a not identically zero derivation, then a

discontinuous solution f is

$$f(x) = x^{n-2k}\left(d(x)\right)^{2k} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

where $k \in \{1, 2, \ldots, [n/2]\}$.
Although we know that for all $n \geqslant 2$ there are discontinuous solutions of monomial functions satisfying the additional equation $y^n f(x) = x^n f(y)$ for all $(x, y) \in S_2$, we continue our investigations for quadratic functions. In this case, the conditional equation has the form

$$f(x) = x^4 f\left(\frac{1}{x}\right), \quad (\forall\, x \neq 0). \tag{2.3}$$

Despite the fact that the continuity of f does not follow from this assumption, we can obtain some interesting and important results for the mappings $x \mapsto F(x, 1)$ and $x \mapsto F(x, 1/x)$. Using these results hereinafter, we prove the continuity of quadratic functions in several related cases.

Lemma 2.1. *(E. Garda-Mátyás [16]). If a quadratic function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies the additional equation* (2.3) *then*

$$F(x, 1) = x f(1)$$

for all $x \in \mathbb{R}$.

Lemma 2.2. *(E. Garda-Mátyás [16]). If a quadratic function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies the additional equation $y^2 f(x) = x^2 f(y)$ for the pairs $(x, y) \in S_2$, then*

$$f\left(x^2\right) = 2x^4 F\left(x, \frac{1}{x}\right) + 6x^2 f(x) - 7x^4 f(1)$$

for all $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lemma 2.3. *(E. Garda-Mátyás [16]). If a quadratic function $f\colon \mathbb{R} \to$*

$\mathbb{R}$ *satisfies*

$$F\left(x, \frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$$

for every $x \neq 0$, *then* $f(x) = x^2 f(1)$ *for all* $x \in \mathbb{R}$.

Thereafter we investigate the continuity of additive and quadratic functions satisfying additional equations along the hyperbola given by the equation $x^2 - y^2 = 1$. Our first result relates to the additive case.

Theorem 2.9. *Let* $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *be additive functions. If* f, g *satisfy the additional equation* $yf(x) = xg(y)$ *for the pairs* $(x, y) \in S_3$, *then* $f(x) = g(x) = xf(1)$ *for all* $x \in \mathbb{R}$.

Our next result applies to the quadratic case with a single quadratic function.

Theorem 2.10. *(E. Garda-Mátyás [16]). If a quadratic function* $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfies the conditional equation* $y^2 f(x) = x^2 f(y)$ *for all* $(x, y) \in S_3$, *then* $f(x) = x^2 f(1)$ *for all* $x \in \mathbb{R}$.

We generalize this result by using a second quadratic function.

Theorem 2.11. *Let* $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *be quadratic functions. If* f, g *satisfy the additional equation* $y^2 f(x) = x^2 g(y)$ *for the pairs* $(x, y) \in S_3$, *then* $f(x) = g(x) = x^2 f(1)$ *for all* $x \in \mathbb{R}$.

We continue our investigations with quadratic real functions that satisfy conditional equations along the unit circle. When the conditional equation is with a single quadratic function, we have the following result.

Theorem 2.12. *(E. Garda-Mátyás [16]). If a quadratic function* $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfies* $y^2 f(x) = x^2 f(y)$ *for the pairs* $(x, y) \in S_4$, *then* $f(x) = x^2 f(1)$ *for all* $x \in \mathbb{R}$.

Generalizing this result by using a second quadratic function, we obtain the following theorem.

Theorem 2.13. *If* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *are quadratic functions that satisfy the additional equation* $y^2 f(x) = x^2 g(y)$ *for the pairs* $(x, y) \in S_4$*, then* $f(x) = g(x) = x^2 f(1)$ *for all* $x \in \mathbb{R}$.

Finally, considering further tools from the literature of functional equations, which include very recent results as well, we get an interesting necessary condition for quadratic functions that satisfy the additional equation (2.3).

Theorem 2.14. *If a quadratic function* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfies the additional equation* $y^2 f(x) = x^2 f(y)$ *under the condition* $xy = 1$*, then there exists a* H *symmetric bi-derivation of order 3 for which* $f(x) = H(x, x) + x^2 f(1)$.

In Chapter 6 we investigate quadratic and cubic functions $f,\ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ that satisfy conditional equations involving logarithmic and exponential functions. In both cases, we prove the equality and continuity of the quadratic and cubic functions f, g.

Theorem 2.15. *Suppose* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *are monomial functions of degree* $n \in \{2, 3\}$ *and* f, g *satisfy the additional equation* $y^n f(x) = x^n g(y)$ *on* $\mathbb{R}^+$ *for the pairs* $(x, y) \in S_5$*, then* $f(x) = g(x) = x^n f(1)$.

Theorem 2.16. *Suppose* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *are monomial functions of degree* $n \in \{2, 3\}$ *and* f, g *satisfy the additional equation* $y^n f(x) = x^n g(y)$ *for the pairs* $(x, y) \in S_6$*, then* $f(x) = g(x) = x^n f(1)$.

We note that in the above theorems, both the logarithm and the exponential base can be any positive real number except 1.

3. Bevezetés

Ebben a PhD értekezésben olyan $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-edfokú monom függvényeket tanulmányozunk ($n \geqslant 2$), amelyek teljesítik az $y^n f(x) = x^n f(y)$ vagy $y^n f(x) = x^n g(y)$ feltételes egyenletet egy adott görbe összes (x, y) pontjára.
A fenti kérdést az additív függvényekkel kapcsolatban megoldott hasonló problémák indokolták, lásd [1, 5, 6, 12, 30, 25, 35].
Vizsgálatainkat a következő görbék mentén végeztük:

$$
\begin{aligned}
&S_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, ax + by = c\},\ a\,,\, b\,,\, c \in \mathbb{R}\,,\, (a^2 + b^2) \cdot c \neq 0\,,\\
&S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^m = y\},\ m \in \mathbb{Z}\,,\quad |m| \geqslant 2\,,\\
&S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 1\},\\
&S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - y^2 = 1\},\\
&S_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\},\\
&S_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0 \ \text{ és }\ \log x = y\},\\
&S_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, e^x = y\}.
\end{aligned}
$$

Tételeink összefoglalása előtt felidézzük az eredmények megfogalmazásához szükséges terminológia fontosabb elemeit.
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *additív* függvénynek nevezzük, ha bármely valós x, y esetén $f(x + y) = f(x) + f(y)$ teljesül. Az $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) függvényt n–*additív* függvénynek nevezzük, ha F minden változójában additív. Adott $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény esetén az F *diagonalizáltjának* nevezzük azt az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyet az F-ből kapunk az összes ($\mathbb{R}$-beli) változó egyenlővé tételével. Sajátos esetben, ha f az $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ n–additív függvény diagonalizáltja, akkor azt mondjuk, hogy f *általánosított* n *-edfokú monom.*

A másodfokú általánosított monomokat kvadratikus függvényeknek nevezzük, a köbfüggvények a harmadfokú általánosított monomok. A kvadratikus függvényeket az

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y) \qquad (x,y\in\mathbb{R}), \tag{3.1}$$

függvényegyenlet jellemzi, amely az úgynevezett *norma-négyzet egyenlet*.

Az f kvadratikus függvényt generáló biadditív szimmetrikus F függvényt a következő képlet adja:

$$F(x,y)=\frac{1}{2}[f(x+y)-f(x)-f(y)]$$

bármely $x,y\in\mathbb{R}$ esetén.

Az $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény *deriváció*, ha f additív és teljesíti az $f(xy)=f(x)y+xf(y)$ függvényegyenletet bármely $x,y\in\mathbb{R}$ esetén. Az $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deriválciók halmazát $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-rel jelöljük. A $B\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt *bi-derivációnak* nevezzük, ha a $t\mapsto B(t,x)$ és $t\mapsto B(x,t)$ $(t\in\mathbb{R})$ leképezések derivációk minden $x\in\mathbb{R}$ esetén. Minden $n\in\mathbb{N}$ esetén, egy $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ additív leképezést n-edrendű derivációnak nevezünk, ha létezik $B\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ úgy, hogy B egy $(n-1)$-edrendű (szimmetrikus) bi-deriváció (vagyis B $(n-1)$-edrendű deriváció mindkét változójában) és $f(xy)-xf(y)-f(x)y = B(x,y)\,(x,y\in\mathbb{R})$. Az azonosan nulla leképezés az egyetlen nulladrendű deriváció. Az n-edrendű derivációk halmazát $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$-nel jelöljük.

4. Új eredmények

Legfontosabb eredményeinket négy fejezetben mutatjuk be, görbék szerint csoportosítva.
A 3. fejezetben olyan kvadratikus és magasabb rendű monom függvények folytonosságát vizsgáljuk, amelyek az egyenes mentén teljesítenek kiegészítő egyenleteket. A kvadratikus függvényeket vizsgálva a következő eredményeket kapjuk.

4.1. Tétel. *(Z. Boros és E. Garda-Mátyás [9]). Ha $A, B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus függvények úgy, hogy*

$$(Ax+B)^2 f(x) = x^2 g(Ax+B)$$

bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor létezik $C \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$f(x) = g(x) = C \cdot x^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

4.1. Következmény. *(Z. Boros és E. Garda-Mátyás [9]). Ha egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus függvény teljesíti az $y^2 f(x) = x^2 f(y)$ kiegészítő egyenletet az $(x, y) \in S_0$ párokra, akkor $f(x) = f(1)x^2$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.*

4.1. Megjegyzés. Az 4.1. következményben $c = 0$ esetén az implikáció nem áll fenn. Ebben az esetben, ha például $b \neq 0$, akkor $y = -\frac{a}{b}x = Ax$, és a feltételezésünk $A^2x^2 f(x) = x^2 f(Ax)$ alakban írható, vagyis $f(Ax) = A^2 f(x)$. Valójában létezik $f(x) = (h(x))^2$ $(x \in \mathbb{R})$ alakú nem folytonos példa, ahol $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy nem folytonos additív függvény, úgy, hogy a h homogenitási teste tartalmazza A-t.

Kiterjesztve a vizsgálatot magasabb rendű monom függvényekre, a következő eredményt kapjuk.

4.2. Tétel. *(Z. Boros és E. Garda-Mátyás [10]). Legyen* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *olyan általánosított* n*-edfokú monom függvény* ($n \in \mathbb{N}$)*, amely teljesíti az* $y^n f(x) = x^n f(y)$ *kiegészítő egyenletet az* $(x, y) \in S_0$ *feltétel mellett. Ekkor* $f(x) = x^n f(1)$*, minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén.*

Általánosítva a problémát egy második monom függvény bevezetésével, egy erősebb eredményt bizonyítunk.

4.3. Tétel. *Feltételezzük, hogy* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *általánosított* n*-edfokú monomok* ($n \in \mathbb{N}$) *és teljesítik az* $y^n f(x) = x^n g(y)$ *kiegészítő egyenletet az* $(x, y) \in S_0$ *párokra. Akkor* $f(x) = g(x) = x^n f(1)$ *minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén.*

A 4. fejezet a hatványfüggvényt tartalmazó feltételes egyenleteket teljesítő kvadratikus és köbfüggvények eredményeit tartalmazza. Először azt az esetet tanulmányozzuk, amikor a kiegészítő egyenletben csak egy kvadratikus függvény található.

4.4. Tétel. *(Z. Boros és E. Garda-Mátyás [9], E. Garda-Mátyás [16]). Ha* $2 \leqslant |m|$*,* $m \in \mathbb{Z}$ *és az* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kvadratikus függvény teljesíti az*

$$f(x^m) = x^{2m-2} f(x)$$

egyenletet bármely $x \in \mathbb{R}$ *esetén, akkor létezik* $C \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy*

$$f(x) = C \cdot x^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyezzük, hogy az $m = 0$ esetben ez a következtetés triviális, vagyis maga a kiegészítő egyenlet az f folytonosságát adja, míg $m = 1$ esetén maga a feltétel triviális azonosságá válik, azaz nem jelent semmilyen korlátozást az f számára (ezért f lehet nem folytonos is).

Az $m = 2$ sajátos esetben, de a kiegészítő egyenlet módosított változatával nem folytonos megoldásokat találunk.

4.5. Tétel. *(Z. Boros és E. Garda-Mátyás [9]). Legyen* $K \in \mathbb{R}$. *Ha* *egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus függvény teljesíti az*

$$f(x^2) = Kx^2 f(x) \tag{4.1}$$

kiegészítő egyenletet bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor vagy $f = 0$, vagy $K \in \{1, 2, 4\}$. Ez utóbbi esetekben f-nek a következő reprezentációi vannak.

- *Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus leképezés a $K = 1$ esetben akkor és csak akkor tesz eleget a (4.1) feltételnek, ha*

$$f(x) = f(1) \cdot x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

- *Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus leképezés a $K = 2$ esetben akkor és csak akkor tesz eleget a (4.1) feltételnek, ha létezik $\varphi \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ úgy, hogy*

$$f(x) = 4x\varphi(x) - \varphi(x^2) \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{4.2}$$

- *Ha $B\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy szimmetrikus bi-deriváció, akkor*

$$f(x) = B(x, x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

  a (4.1) egyenlet egy kvadratikus megoldása $K = 4$ esetén.

4.2. Megjegyzés. Ha $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, akkor a (4.1) egyenletből $f(x) = \varphi(x^2)$ $(x \in \mathbb{R})$ következik. Ez a megfigyelés biztosítja a (4.1) egyenlet egy nem nulla kvadratikus f megoldásának létezését $K = 2$ esetén. Az ilyen megoldások létezése $K = 1$ és $K = 4$ esetén az utolsó tétel nyilvánvaló következménye.

4.3. Megjegyzés. Megfigyelhetjük, hogy $K = 4$ esetén ez a tétel csak elégséges feltételt biztosít az f számára ahhoz, hogy teljesítse a (3.1) és a (4.1) egyenleteket. Nyitott kérdés, hogy ez szükséges feltétel-e.

Ebben az esetben azonban valamivel gyengébb szükséges feltételt tudunk bizonyítani.

4.6. Tétel. *Ha egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus függgvény teljesíti az*

$$f\left(x^2\right) = 4x^2 f(x) \tag{4.3}$$

kiegészítő egyenletet bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor f egy másodfokú szimmetrikus bi-deriváció diagonalizáltja.

Az előző eredmények jelentőségét a következő tétel emeli ki, ahol két kvadratikus függvény szerepel.

4.7. Tétel. *Az f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus függvények akkor és csakis akkor teljesítik az $y^2 f(x) = x^2 g(y)$ kiegészítő egyenletet az $(x, y) \in S_1$ párokra $m = 2$ esetén, ha létezik egy $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvény és egy $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus függvény, mely teljesíti a*

$$h(x^2) = 4x^2 h(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenletet úgy, hogy

$$f(x) = h(x) + \varphi(x^2) \quad \text{és} \quad g(x) = \frac{1}{4}h(x) + x\varphi(x)$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

És végül, köbfüggvényekre kiterjesztve a vizsgálatot a következő eredményt kapjuk.

4.8. Tétel. *(Z. Boros és E. Garda-Mátyás [10]). Ha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy általánosított harmadfokú monom, amely teljesíti az $y^3 f(x) = x^3 f(y)$ kiegészítő egyenletet $(x, y) \in S_1$ feltétel mellett, akkor $f(x) = x^3 f(1)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.*

Az 5. fejezetben olyan additív, kvadratikus és magasabb rendű monom függvények folytonosságát vizsgáljuk, amelyek a hiperbolák

vagy az egységkör mentén teljesítenek kiegészítő egyenleteket.
Negatív eredménnyel kezdünk az $xy = 1$ egyenlet által adott hiperbola mentén. Ha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy n-edfokú általánosított monom függvény $(2 \leqslant n \in \mathbb{N})$, f eleget tesz az

$$f(x) = x^{2n} f\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (\forall\ x \neq 0)$$

kiegészítő egyenletnek, könnyen belátható, hogy léteznek nem folytonos megoldások.
Például, ha $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy nem azonosan nulla deriváció, akkor egy nem folytonos f megoldás az

$$f(x) = x^{n-2k} \left(d(x)\right)^{2k} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol $k \in \{ 1\,, 2\,, \ldots\,, [n/2] \}$.
Habár tudjuk, hogy minden $n \geqslant 2$ esetén vannak nem folytonos megoldásai az $y^n f(x) = x^n f(y)$ kiegészítő egyenletet teljesítő monom függvényeknek az $(x, y) \in S_2$ feltétel mellett, folytatjuk a vizsgálatainkat kvadratikus függvényekkel. Ebben az esetben a feltételes egyenlet

$$f(x) = x^4 f\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (\forall\ x \neq 0) \tag{4.4}$$

alakú. Annak ellenére, hogy az f folytonossága nem következik ebből a feltevésből, érdekes és fontos eredményeket kaphatunk az $x \mapsto F(x, 1)$ és $x \mapsto F(x, 1/x)$ leképezésekre. Ezeket az eredményeket felhasználva a továbbiakban igazoljuk a kvadratikus függvények folytonosságát több kapcsolódó esetben.

4.1. Lemma. *(E. Garda-Mátyás [16]). Ha egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus függvény teljesíti a* (4.4) *kiegészítő egyenletet, akkor*

$$F(x, 1) = x f(1)$$

minden $x \in \mathbb{R}$ *esetén.*

4.2. Lemma. *(E. Garda-Mátyás [16]). Ha egy* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kvadratikus függvény teljesíti az* $y^2 f(x) = x^2 f(y)$ *kiegészítő egyenletet az* $(x, y) \in S_2$ *párok esetén, akkor*

$$f\left(x^2\right) = 2x^4 F\left(x, \frac{1}{x}\right) + 6x^2 f(x) - 7x^4 f(1)$$

minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *-ra.*

4.3. Lemma. *(E. Garda-Mátyás [16]). Ha egy* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kvadratikus függvény eleget tesz az*

$$F\left(x, \frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$$

feltételnek bármely $x \neq 0$ *esetén, akkor* $f(x) = x^2 f(1)$ *minden* $x \in \mathbb{R}$ *-re.*

Ezután a kiegészítő egyenleteket az $x^2 - y^2 = 1$ egyenletű hiperbola mentén teljesítő additív és kvadratikus függvények folytonosságát vizsgáljuk. Első eredményünk az additív esetre vonatkozik.

4.9. Tétel. *Legyenek* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *additív függvények. Ha* f, g *teljesítik az* $yf(x) = xg(y)$ *kiegészítő egyenletet az* $(x, y) \in S_3$ *párok esetén, akkor* $f(x) = g(x) = xf(1)$ *minden* $x \in \mathbb{R}$ *-re.*

A következő eredményünk a kvadratikus esetre vonatkozik, egyetlen kvadratikus függvénnyel.

4.10. Tétel. *(E. Garda-Mátyás [16]). Ha egy* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kvadratikus függvény eleget tesz az* $y^2 f(x) = x^2 f(y)$ *kiegészítő egyenletnek az* $(x, y) \in S_3$ *feltétel mellett, akkor* $f(x) = x^2 f(1)$ *minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén.*

Ezt az eredményt általánosítjuk egy második kvadratikus függvény használatával.

4.11. Tétel. *Legyenek* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kvadratikus függvények. Ha* f, g *teljesítik az* $y^2 f(x) = x^2 g(y)$ *kiegészítő egyenletet az* $(x, y) \in S_3$ *párok esetén, akkor* $f(x) = g(x) = x^2 f(1)$ *minden* $x \in \mathbb{R}$ *-re.*

A kiegészítő egyenleteket az egységkör mentén teljesítő kvadratikus valós függvényekkel folytatjuk vizsgálatainkat. Amikor a feltételes egyenletben egyetlen kvadratikus függvény van, a következő eredményt kapjuk.

4.12. Tétel. *(E. Garda-Mátyás [16]). Ha egy* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kvadratikus függvény eleget tesz az* $y^2 f(x) = x^2 f(y)$ *kiegészítő egyenletnek az* $(x, y) \in S_4$ *párok esetén, akkor* $f(x) = x^2 f(1)$ *minden* $x \in \mathbb{R}$*-re.*

Általánosítva ezt az eredményt egy második kvadratikus függvény használatával, a következő tételt kapjuk.

4.13. Tétel. *Ha* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kvadratikus függvények teljesítik az* $y^2 f(x) = x^2 g(y)$ *kiegészítő egyenletet az* $(x, y) \in S_4$ *párok esetén, akkor* $f(x) = g(x) = x^2 f(1)$ *minden* $x \in \mathbb{R}$ *-re.*

Végül, figyelembe véve a függvényegyenletek irodalmának további eszközeit, amelyek nagyon friss eredményeket is tartalmaznak, érdekes szükséges feltételt kapunk a (4.4) kiegészítő egyenletet teljesítő kvadratikus függvényekre.

4.14. Tétel. *Ha egy* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kvadratikus függvény eleget tesz az* $y^2 f(x) = x^2 f(y)$ *kiegészítő egyenletnek az* $xy = 1$ *feltétel mellett, akkor létezik egy* H *harmadrendű szimmetrikus bi-deriváció, amelyre* $f(x) = H(x, x) + x^2 f(1)$.

A 6. fejezetben olyan $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus és köbfüggvényeket vizsgálunk, amelyek logaritmus illetve exponenciális függvényeket tartalmazó feltételes egyenleteket teljesítenek. Mindkét esetben bebizonyítjuk az f, g kvadratikus és köbfüggvények egyenlőségét és folytonosságát.

4.15. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *n-edfokú monom függvények* ($n \in \{2,3\}$) *és* f, g *eleget tesznek az* $y^n f(x) = x^n g(y)$ *kiegészítő egyenletnek* $\mathbb{R}^+$*-on minden* $(x, y) \in S_5$ *esetén. Ekkor* $f(x) = g(x) = x^n f(1)$.

4.16. Tétel. *Ha* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *n-edfokú monom függvények* ($n \in \{2,3\}$) *és* f, g *teljesítik az* $y^n f(x) = x^n g(y)$ *kiegészítő egyenletet az* $(x, y) \in S_6$ *párok esetén, akkor* $f(x) = g(x) = x^n f(1)$.

Megjegyezzük, hogy a fenti tételekben mind a logaritmus, mind az exponenciális függvény alapja bármely pozitív valós szám lehet, az 1-et kivéve.

REFERENCES

[1] J. Aczél, *Some unsolved problems in the theory of functional equations*, Arch. Math. **15** (1964), 435–444.

[2] J. Aczél, *The general solution of two functional equations by reduction to functions additive in two variables and with the aid of Hamel bases*, Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Ser. II Društvo Mat. Fiz. Hrvatske **20** (1965), 65–73.

[3] J. Aczél and J. Dhombres, *Functional equations in several variables*, Encyclopaedia of Mathematics and its Applications vol. 31, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York-New Rochelle-Melbourne-Sydney, 1989.

[4] M. Amou, *Quadratic functions satisfying an additional equation*, Acta Math. Hungar. (2020). https://doi.org/10.1007/s10474-020-01047-0

[5] W. Benz, *5. Problem* in *Report of Meeting: The twenty-seventh international symposium on functional equations*, Aequationes Math. **39** (1990), 302.

[6] Z. Boros and P. Erdei, *A conditional equation for additive functions*, Aequationes Math. **70** (2005), 309–313.

[7] Z. Boros and W. Fechner, *An alternative equation for polynomial functions*, Aequationes Math. **89/1** (2015), 17–22.

[8] Z. Boros, W. Fechner and P. Kutas, *A regularity condition for quadratic functions involving the unit circle*, Publ. Math. Debrecen **89/3** (2016), 297–306.

[9] Z. Boros and E. Garda-Mátyás, *Conditional equations for quadratic functions*, Acta Math. Hungar. **154(2)** (2018), 389-401.

[10] Z. Boros and E. Garda-Mátyás, *Conditional equations for monomial functions*, Publ. Math. Debrecen (accepted).

[11] B. Ebanks, *Characterizing ring derivations of all orders via functional equations: results and open problems*, Aequationes Math. **89** (2015), 685–718.

[12] B. Ebanks, *Linked pairs of additive functions*, Aequationes Math. **91** (2017), 1025–1040.

[13] B. Ebanks, *Polynomially linked additive functions*, Aequationes Math. **91** (2017), 317–330.

[14] B. Ebanks, *Polynomially linked additive functions-II*, Aequationes Math. **92** (2018), 581–597.

[15] B. Ebanks and C.T. Ng, *Homogeneous tri-additive forms and derivations* Linear Algebra and its Applications **435** (2011),2731–2755.

[16] E. Garda-Mátyás, *Quadratic functions fulfilling an additional condition along hyperbolas or the unit circle*, Aequationes Math., **93** (2) (2019), 451–465.

[17] A. Grząślewicz, *Some remarks to additive functions*, Math. Japon. **23** (1978/79), 573–578.

[18] E. Gselmann, *Notes on the characterization of derivations*, Acta Sci. Math. (Szeged) **78** (2012), 137–145.

[19] E. Gselmann, *Derivations and linear functions along rational functions*, Monatsh. Math. **169** (2013), 355–370.

[20] E. Gselmann, Cs. Vincze and G. Kiss, *On functional equations characterizing derivations: methods and examples*, Results Math (2018) 73: 74. https://doi.org/10.1007/s00025-018-0833-6

[21] F. Halter-Koch, *Characterization of field homomorphisms and derivations by functional equations*, Aequationes Math. **59** (2000), 298–305.

[22] F. Halter-Koch, *A characterization of derivations by functional equations*, Math. Pannon. **11** (2000), 187–190.

[23] F. Halter-Koch und L. Reich, *Charakterisierung von Derivationen höherer Ordnung mittels Funktionalgleichungen*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber II **207** (1998), 123–131.

[24] G. Hamel, *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung f(x + y) = f(x) + f(y)*, Math. Ann. **60** (1905), 459–462.

[25] W. B. Jurkat, *On Cauchy's functional equation*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 683–686.

[26] Pl. Kannappan and S. Kurepa, *Some relations between additive functions I*, Aequationes Math. **4** (1970), 163–175.

[27] Pl. Kannappan and S. Kurepa, *Some relations between additive functions II*, Aequationes Math. **6** (1971), 46–58.

[28] Z. Kominek, L. Reich and J. Schwaiger, *On additive functions fulfilling some additional condition*, Sitzungsber. Abt. II **207** (1998), 35–42.

[29] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities (second edition)*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2009.

[30] S. Kurepa, *The Cauchy functional equation and scalar product in vector spaces*, Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Ser. II Društvo Mat. Fiz. Hrvatske **19** (1964), 23–36.

[31] S. Kurepa, *Remarks on the Cauchy functional equation*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **5 (19)** (1965), 85–88.

[32] P. Kutas, *Algebraic conditions for additive functions over the reals and over finite fields*, Aequationes Math. (in print).

[33] Gy. Maksa, *On the trace of symmetric bi-derivations*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, Vol. **IX**, No. 6 (1987), 303–307.

[34] M. A. McKiernan, *On vanishing n-th ordered differences and Hamel bases*, Ann. Polon. Math. **19** (1967), 331–336.

[35] A. Nishiyama and S. Horinouchi, *On a system of functional equations*, Aequationes Math. **1** (1968), 1–5.

[36] L. Reich, *Derivationen zweiter Ordnung als Lösungen von Funktionalgleichungen — ein überblick*, Grazer Math. Ber. **337** (1998), 45–65.

[37] L. Székelyhidi, *On a class of linear functional equations*, Publ. Math. Debrecen **29** (1-2) (1982), 19–28.

[38] L. Székelyhidi, *Convolution Type Functional Equation on Topological Abelian Groups*, World Scientific, Singapore, 1991.

[39] J. Unger und L. Reich, *Derivationen höherer Ordnung als Lösungen von Funktionalgleichungen*, Grazer Math. Ber. **336** (1998), 1–83.

[40] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative algebra. Vol. I.* With the cooperation of I. S. Cohen. The University Series in Higher Mathematics, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1958.

List of publications

Author's publications related to the dissertation:

1. Z. Boros and E. Garda-Mátyás, *Conditional equations for quadratic functions*, Acta Math. Hungar. **154(2)** (2018), 389-401.

2. Z. Boros and E. Garda-Mátyás, *Conditional equations for monomial functions*, Publ. Math. Debrecen (accepted).

3. E. Garda-Mátyás, *Quadratic functions fulfilling an additional condition along hyperbolas or the unit circle*, Aequationes Math., **93** (2) (2019), 451–465.