Gyakorló feladatok: vektoranalízis

Vincze Csaba

Debreceni Egyetem

2020. április 8.

1. Feladat. Irja fel a

$$c(t) = (r\cos^2 t, r\cos t\sin t, r\sin t) \quad (-\pi/2 \le t \le \pi/2)$$

Viviani-féle görbe[1] érintőjének egyenletrendszerét a $t_0 = \pi/3$ paraméterű pontban.

2. Feladat. Igazolja, hogy a Viviani-féle görbe az origó középpontú, r sugarú gömb és az

$$\left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{r^2}{4}.$$

egyenletű egyenes körhenger áthatása (metszésvonala).

3. Feladat. Igazolja, hogy a Viviani-féle görbe ívhossza $2r\sqrt{2}E(1/\sqrt{2})$, ahol

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin\varphi}\, d\varphi$$

az ún. másodfajú teljes elliptikus integrál (ld. még az ellipszis kerülete[2]).

4. Feladat. Irja fel az $y^2 = ax^3$ egyenletű Neil-féle parabola[3] érintőegyenesének egyenletét a $P(a, a^2)$ pontban.

5. Feladat. Irja fel a

$$\left(13 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = 100$$

egyenletű tórusz érintősíkjának egyenletét a $P(3, 4, 6)$ pontban.

6. Feladat. Számítsa ki a

$$X(x, y, z) = \left(x^2, yz, \frac{z}{x^2 + y^2}\right)$$

vektormező divergenciáját és rotációját.

---

[1] Vincenzo Viviani (1922-1703), olasz matematikus, Galilei tanítványa.

[2] Az ellipszis pontjainak $x(t) = a\sin t$, $y(t) = b\cos t$ paraméterezése birtokában a kerület $4aE(e)$, ahol $e = c/a$ a numerikus excentricitás.

[3] William Neil (1637-1670), angol matematikus. A Neil-féle parabolán legördülő golyó egyenlő időintervallumok alatt egyenlő távolságot fut be.

7. Feladat. Számítsa ki a Laplace operátor hatását a $f(x, y, z) = x^2y^3 + \cos z$ skalármezőn.

8. Feladat. Határozza meg a

$$f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2}$$

skalármező gradiensvektorát a $P(2, 1, 1)$ pontban. Milyen alakzat a

$$\frac{z}{x^2 + y^2} = 1$$

szintfelület?

9. Feladat. Határozza meg azoknak a pontoknak a mértani helyét a síkon, ahol az $X(x, y) = (x^2y, y^2x)$ vektormező rotációja eltünik.

10. Feladat. Határozza meg a

$$X(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}(-2xz, -2yz, x^2 + y^2)$$

vektormező potenciálját.

11. Feladat. Paraméterezze a $P(-1, 2, 1)$ és $Q(1, -1, 4)$ pontokat összekötő egyenes szakaszt.

12. Feladat. Számítsa ki a $f(x, y, z) = y + z\sqrt{x}$ skalármező integrálját a Viviani-görbe mentén (a paraméterezést és az integrálási határokat illetően ld. 1. Feladat).

13. Feladat. Számítsa ki a $X(x, y, z) = (x^3, y, xz)$ vektormező integrálját a Viviani-görbe mentén (a paraméterezést és az integrálási határokat illetően ld. 1. Feladat).

14. Feladat. Számítsa ki a

$$\sigma\colon [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \sigma(u, v) := ((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v)\,.$$

tórusz első alapmennyiségeit: $E = \langle D_1\sigma, D_1\sigma\rangle$, $F = \langle D_1\sigma, D_2\sigma\rangle$, $G = \langle D_2\sigma, D_2\sigma\rangle$.

15. Feladat. Számítsa ki a

$$\sigma\colon [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \sigma(u, v) := ((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v)$$

tórusz felszinét.

16. Feladat. Számítsa ki a

$$\sigma\colon [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \sigma(u, v) := ((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v)$$

tórusz második alapmennyiségeit: $l = \langle D_1D_1\sigma, N\rangle$, $m = \langle D_1D_2\sigma, N\rangle$, $n = \langle D_2D_2\sigma, N\rangle$, ahol

$$N = \frac{1}{|D_1\sigma \times D_2\sigma|}D_1\sigma \times D_2\sigma$$

a felületi egységnormális.

17. Feladat. Számítsa ki a

$$\sigma\colon [0,2\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3,\ \sigma(u,v):=((R+r\cos v)\cos u,(R+r\cos v)\sin u,r\sin v)$$

tórusz Gauss görbületét:

$$K\circ\sigma=\frac{ln-m^2}{EG-F^2}.$$

18. Feladat. Számítsa ki a

$$\sigma\colon [0,2\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3,\ \sigma(u,v):=((R+r\cos v)\cos u,(R+r\cos v)\sin u,r\sin v)$$

tórusz Euler-karakterisztikáját:

$$\int_\sigma K=2\pi\chi(\sigma),$$

ahol $\chi(\sigma)$ a felület Euler-karakterisztikája, azaz a görbületfüggvény felületi integrálja (az ún. teljes görbület) konstans szorzótól eltekintve.

19. Feladat. Számítsa ki a

$$f(x,y,z)=xyz \ \text{ és a }\ f(x,y,z)=\frac{z}{x^2+y^2}$$

skalármezők integrálját a

$$\sigma\colon [0,2\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3,\ \sigma(u,v):=((R+r\cos v)\cos u,(R+r\cos v)\sin u,r\sin v)$$

felületen.

20. Feladat. Számítsa ki a $X(x,y,z)=(x,y,z)$ vektormező integrálját a

$$\sigma\colon [0,2\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3,\ \sigma(u,v):=((R+r\cos v)\cos u,(R+r\cos v)\sin u,r\sin v)$$

felületen és határozza meg a tórusz térfogatát a Gauss-Osztrogradszkij-tétel alapján.