Characterizations of derivations

Habilitációs értekezés tézisei

Dr. Novák-Gselmann Eszter

Debreceni Egyetem

Természettudományi és Technológiai Kar

Matematikai Intézet

Analízis Tanszék

Debrecen, 2017.

Introduction

The main purpose of this work is to characterize derivations through functional equations. Therefore, (besides the notion of derivations) it is natural to ask what a functional equation is. But there is no easy and satisfactory answer to this question. While such concepts as element, relation, mapping, operation, etc., are well defined in set theory, the principal concept set is an undefined term. As in set theory, we hope the reader already has a general insight of what this theory is about.

Functional equations occur almost everywhere. Their influence and applications can be felt in every field, and all fields benefit from their contact, use, and technique. The growth and development used to be influenced by their impact in other areas – not only in mathematics but also in other disciplines. Applications can be found in a wide variety of fields e.g., analysis, behavioral and social science, biology, combinatorics, economics, engineering, geometry, inequalities, information theory, physics, psychology, statistics etc.

Even though lots of mathematicians worked in this area, since the appearance of the famous monograph of J. Aczél [1] no systematic research existed. In this dissertation we will follow this monograph as well as that of M. Kuczma, see [17].

This work consists of five chapters. In the first one, we will summarize the most important notions and results from the theory of functional equations that will be used afterwards. In the second chapter we collected all the definitions and results regarding derivations that are essential while investigating this area. Let Q be a ring and let P be a subring of Q. A function $f\colon P \to Q$ is called a *derivation* if it is additive, i.e.,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in P)$$

and also satisfies the so-called *Leibniz rule*, i.e., the equation

$$f(xy) = f(x)y + xf(y) \quad (x, y \in P)\,.$$

As well as homomorphisms, derivations give a lot of information about the rings between which they acts. Therefore, the characterization of derivations can also be applicable not only from the theory of functional equations but also from the point of view of some algebraic investigations. As it can be seen, the notion of derivations is already formulated via functional equations (the Cauchy equation and the Leibniz rule). In Chapter 3 we intend to show that derivations can be characterized by one single functional equation. The results of this chapter are based on [3].

More exactly, we would like to examine whether the equations occurring in the definition of derivations are independent in the following sense.

Let Q be a commutative ring and let P be a subring of Q. Let $\lambda, \mu \in Q \setminus \{0\}$ be arbitrary, $f\colon P \to Q$ be a function and consider the equation

$$\lambda\,[f(x+y) - f(x) - f(y)] + \mu\,[f(xy) - xf(y) - yf(x)] = 0 \quad (x, y \in P).$$

Clearly, if the function f is a derivation, then this equation holds. We will investigate the opposite direction, and it will be proved that under some assumptions on the rings P and Q, derivations can be characterized via the above equation. This result will be proved as a consequence of the main theorem that will be devoted to the equation

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = g(xy) - xg(y) - yg(x) \quad (x, y \in P),$$

where $f, g\colon P \to Q$ are unknown functions.

Chapter 4 is devoted to the additive solvability of the system of functional equations

$$d_k(xy) = \sum_{i=0}^{k} \Gamma(i, k-i) d_i(x) d_{k-i}(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R},\ k \in \{0, \dots, n\}),$$

where $\Delta_n := \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, 0 \leq i, j \text{ and } i + j \leq n\}$ and $\Gamma\colon \Delta_n \to \mathbb{R}$ is a symmetric function such that $\Gamma(i, j) = 1$ whenever $i \cdot j = 0$. Here $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ and $\mathbb{R}$ denotes the set of the natural, the integer and the real numbers, respectively.

Moreover, the linear dependence and independence of the additive solutions $d_0, d_1, \dots, d_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ of the above system of equations is characterized. As a consequence of the main result, for any nonzero real derivation $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, the iterates $d^0, d^1, \dots, d^n$ of d are shown to be linearly independent, and the graph of the mapping $x \mapsto (x, d^1(x), \dots, d^n(x))$ to be dense in $\mathbb{R}^{n+1}$. The results of this chapter were achieved jointly with Zsolt Páles and were published in [8].

Finally, the closing chapter deals with the following problem. Assume that $\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a given differentiable function and for the additive function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, the mapping

$$\varphi(x) = f(\xi(x)) - \xi'(x)f(x)$$

fulfills some regularity condition (e.g. local boundedness, continuity, measurability etc.) on its domain. Is it true that in such a case f admits a representation

$$f(x) = \chi(x) + f(1) \cdot x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

where $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a real derivation?

In case φ is identically zero and $\xi(x) = x^k$, several results are known for instance due to Jurkat [15], Kurepa [18], and Kannappan–Kurepa [16]. Our investigation in this area began in a joint work with Z. Boros, see [2]. After some preliminary results, in this chapter we will show that in case $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ and $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q})$ and the function ξ is

$$\xi(x) = \frac{ax^n + b}{cx^n + d} \quad (x \in \mathbb{R}, cx^n + d \neq 0),$$

then the answer is *affirmative*. This result can be found in Gselmann [4–6]. Furthermore, we will also show that the above class of functions is expandable. More precisely, we will show (among others) the following. Assume that for the additive function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ the mapping φ defined by

$$\varphi(x) = f(\xi(x)) - \xi'(x)f(x)$$

is regular. Then the function f can be represented as

$$f(x) = \chi(x) + f(1) \cdot x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

where $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a derivation in any of the following cases

(a)

$$\xi(x) = a^x$$

(b)

$$\xi(x) = \cos(x)$$

(c)

$$\xi(x) = \sin(x)$$

(d)

$$\xi(x) = \cosh(x)$$

(e)

$$\xi(x) = \sinh(x)$$

(f)

$$\xi(x) = \ln(x)$$

(g)

$$\xi(x) = \arccos(x)$$

(h)

$$\xi(x) = \arcsin(x)$$

(i)

$$\xi(x) = \operatorname{arcosh}(x)$$

(j)

$$\xi(x) = \operatorname{arsinh}(x).$$

With the aid of Hyers' theorem and this result we were also able to prove stability type results concerning derivations. Here we lean on the paper Gselmann [7].

1 Derivations

Let Q be a ring and let P be a subring of Q. A function $f\colon P \to Q$ is called a *derivation* if it is additive, i.e.,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in P),$$

and also satisfies the so-called *Leibniz rule*, i.e., equation

$$f(xy) = f(x)y + xf(y) \quad (x, y \in P).$$

Some fundamental examples for derivations are the following.

Let $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ be a field, and suppose that we are given a derivation $f\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$. We define the mapping $f_0\colon \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[x]$ in the following way. If $p \in \mathbb{F}[x]$ has the form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

then let

$$f_0(p) = p^f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(a_k)x^k.$$

Then $f_0\colon \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[x]$ is a derivation.

Let R be a ring and $b \in R$, then the mapping $\mathrm{ad}_b\colon R \to R$ defined by

$$\mathrm{ad}_b(x) = [x, b] = xb - bx \qquad (x \in R)$$

is a derivation. A derivation $f\colon R \to R$ is termed to be an *inner derivation* if there is a $b \in R$ so that $f \equiv \mathrm{ad}_b$. We say that a derivation is an *outer derivation* if it is not inner.

From the additive property of derivations, we have also the following, see Theorem 14.1.1 of Kuczma [17].

Theorem 1.1. *Let $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a derivation and suppose that at least one of the following is fulfilled:*

(i) f is measurable;

(ii) f is bounded from above on a set of positive Lebesgue measure;

(iii) f is bounded from below on a set of positive Lebesgue measure.

Then f is identically zero.

The following result plays a key role while proving the existence of a nontrivial real derivation, see Kuczma [17, Theorem 14.2.1].

Theorem 1.2. *Let $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ be a field of characteristic zero, let $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ be a subfield of $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, let S be an algebraic base of $\mathbb{K}$ over $\mathbb{F}$, if it exists, and let $S = \emptyset$ otherwise. Let $f\colon \mathbb{F} \to \mathbb{K}$ be a derivation. Then, for every function $u\colon S \to \mathbb{K}$, there exists a unique derivation $g\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ such that $g|_{\mathbb{F}} = f$ and $g|_S = u$.*

Since the algebraic closure of the field $\mathbb{Q}$ is not $\mathbb{R}$, there exists an algebraic base of $\mathbb{R}$ over $\mathbb{Q}$. So we have the following, see also [17, Theorem 14.2.2].

Theorem 1.3. *There exist nontrivial derivations of $\mathbb{R}$.*

2 Characterization of derivations through one equation

The purpose of this chapter is to provide new characterization theorems on derivations.

The characterization of derivations has an extensive literature, the reader should consult for instance Horinouchi–Kannappan [13], Jurkat [15], Kurepa [18, 19] and also the two monographs Kuczma [17] and Zariski–Samuel [22].

More precisely, we would like to examine whether the equations occurring in the definition of derivations are independent in the following sense. Let $\lambda, \mu \in Q \setminus \{0\}$ be arbitrary, $f\colon P \to Q$ be a function and consider the equation

$$\lambda\,[f(x+y) - f(x) - f(y)] + \mu\,[f(xy) - xf(y) - yf(x)] = 0 \qquad (x, y \in P)\,.$$

Clearly, if the function f is a derivation, then this equation holds. In Chapter 3 we will investigate the opposite direction, and it will be proved that under some assumptions on the rings P and Q, derivations can be characterized through the above equation. This result will be proved as a consequence of the main theorem that will be devoted to the equation

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = g(xy) - xg(y) - yg(x) \qquad (x, y \in P)\,,$$

where $f, g\colon P \to Q$ are unknown functions.

The results presented here are based on Gselmann [3].

Our main result is contained in the following

Theorem 2.1. *Let $\mathbb{F}$ be a field, X be a vector space over $\mathbb{F}$ and $f, g\colon \mathbb{F} \to X$ be functions such that*

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = g(xy) - xg(y) - yg(x)$$

holds for all $x, y \in \mathbb{F}$. Then, and only then, there exist additive functions $\alpha, \beta\colon \mathbb{F} \to X$ and a function $\varphi\colon \mathbb{F} \to X$ with the property

$$\varphi(xy) = x\varphi(y) + y\varphi(x) \qquad (x, y \in \mathbb{F})\,,$$

such that

$$f(x) = \beta(x) + \frac{1}{2}\alpha(x^2) - x\alpha(x) \qquad (x, y \in \mathbb{F})$$

and

$$g(x) = \varphi(x) + \alpha(x) \qquad (x, y \in \mathbb{F})$$

are satisfied.

According to a result of Jessen–Karpf–Throrup [14], with the aid of the previous result, the following corollary can immediately be obtained.

Corollary 2.1. *Let $\mathbb{F}$ be an ordered field, X be a vector space over $\mathbb{F}$,*

$$\mathbb{F}_+ = \{x \in \mathbb{F} \,|\, x > 0\}$$

and $f, g \colon \mathbb{F}_+ \to X$ be functions such that

$$f(x + y) - f(x) - f(y) = g(xy) - xg(y) - yg(x)$$

holds for all $x, y \in \mathbb{F}_+$. Then the functions f and g can be extended to functions $\widetilde{f}, \widetilde{g} \colon \mathbb{F} \to X$ such that

$$\widetilde{f}(x) = \beta(x) + \frac{1}{2}\alpha(x^2) - x\alpha(x) \qquad (x, y \in \mathbb{F}),$$

and

$$\widetilde{g}(x) = \varphi(x) + \alpha(x) \qquad (x, y \in \mathbb{F}),$$

where $\alpha, \beta \colon \mathbb{F} \to X$ are additive function and $\varphi \colon \mathbb{F} \to X$ fulfills

$$\varphi(xy) = x\varphi(y) + y\varphi(x) \qquad (x, y \in \mathbb{F}).$$

From our main result of this section, with the choice $g(x) = -\frac{\mu}{\lambda} f(x)$ the following corollary can be derived easily.

Corollary 2.2. *Let $\mathbb{F}$ be a field and X be a vector space over $\mathbb{F}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ be arbitrarily fixed. Then the function $f \colon \mathbb{F} \to X$ is a derivation if and only if*

$$\lambda\,[f(x + y) - f(x) - f(y)] + \mu\,[f(xy) - xf(y) - yf(x)] = 0$$

holds for all $x, y \in \mathbb{F}$.

3 Additive solvability and linear independence of the solutions of a system of functional equations

In this chapter of the thesis we investigate two problems concerning derivations. On one hand, the additive solvability of the system of functional equations

$$d_k(xy) = \sum_{i=0}^{k} \Gamma(i, k-i) d_i(x) d_{k-i}(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R},\ k \in \{0, \dots, n\})$$

is studied, where $\Delta_n := \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 0 \leq i, j \text{ and } i + j \leq n\}$ and $\Gamma\colon \Delta_n \to \mathbb{R}$ is a symmetric function such that $\Gamma(i, j) = 1$ whenever $i \cdot j = 0$.

On the other hand, the linear dependence and independence of the additive solutions $d_0, d_1, \dots, d_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ of the above system of equations is characterized. As a consequence of the main result, for any nonzero real derivation $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, the iterates $d^0, d^1, \dots, d^n$ of d are shown to be linearly independent, and the graph of the mapping $x \mapsto (x, d^1(x), \dots, d^n(x))$ to be dense in $\mathbb{R}^{n+1}$.

This results were achieved jointly with Zsolt Páles in [8].

Given a real derivation $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, one can prove by induction that the iterates $d^0 := id$, $d^1 := d$, $\dots$, $d^n := d \circ d^{n-1}$ of d satisfy the following higher-order Leibniz rule

$$d^k(xy) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} d^i(x) d^{k-i}(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R},\ k \in \{1, \dots, n\}).$$

Motivated by this property, Heyneman–Sweedler [12] introduced the notion of nth-order derivation (in the context of functions mapping rings to modules, however, we will restrict ourselves only to real functions).

Definition 3.1. *Given $n \in \mathbb{N}$, a sequence of additive functions $d_0, d_1, \dots, d_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is termed a* derivation of order n*, if $d_0 = id$ and, for any $k \in \{1, \dots, n\}$,*

$$d_k(xy) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} d_i(x) d_{k-i}(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

is fulfilled.

Clearly, a pair (id, d) is a first-order derivation if and only if d is a derivation. More generally, if $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a derivation, then the sequence $(d^0, d^1, \ldots, d^n)$ is a derivation of order n. However, if $\widetilde{d}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a nontrivial derivation and $n \geq 2$, then $(d^0, d^1, \ldots, d^{n-1}, d^n + \widetilde{d})$ is also an nth-order derivation where the last element is not the nth iterate of the derivation d.

Firstly we will study the additive solvability of the following system of functional equations

$$d_k(xy) = \sum_{i=0}^{k} \Gamma(i, k-i) d_i(x) d_{k-i}(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R},\ k \in \{0, \ldots, n\}), \tag{2}$$

where

$$\Delta_n := \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, 0 \leq i, j \text{ and } i + j \leq n\}, \tag{3}$$

and $\Gamma\colon \Delta_n \to \mathbb{R}$ is a symmetric function such that $\Gamma(i, j) = 1$ whenever $i \cdot j = 0$. After that we shall characterize the linear dependence and independence of the additive solutions $d_0, d_1, \ldots, d_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ of (2).

Our first main result offers a sufficient condition on the recursive additive solvability of functional equations (2).

Theorem 3.1. *Let $n \geq 2$ and $\Gamma\colon \Delta_n \to \mathbb{R}$ be a symmetric function such that $\Gamma(i, j) = 1$ whenever $i \cdot j = 0$ and*

$$\Gamma(i + j, k)\Gamma(i, j) = \Gamma(i, j + k)\Gamma(j, k) \qquad (0 \leq i, j, k \text{ and } i + j + k \leq n). \tag{4}$$

Let $d_0 = id$ and let $d_1, \ldots, d_{n-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be additive functions such that (2) holds for $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Then there exists an additive function $d_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that (2) is also valid for $k = n$.

After that, we describe the nowhere zero solutions of (4).

Theorem 3.2. *Let $n \geq 2$ and $\Gamma\colon \Delta_n \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ be a symmetric function so that $\Gamma(i, j) = 1$ whenever $i \cdot j = 0$. Then Γ satisfies the functional equation (4) if and only if there exists a function $\gamma\colon \{0, 1, \ldots, n\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ such that*

$$\Gamma(i, j) = \frac{\gamma(i + j)}{\gamma(i)\gamma(j)} \qquad ((i, j) \in \Delta_n). \tag{5}$$

Theorem 3.3. *Let X be a Hausdorff locally convex linear space and let $a\colon \mathbb{R} \to X$ be an additive function. Then the following statements are equivalent:*

(i) there exists a nonzero continuous linear functional $\varphi \in X^*$ such that $\varphi \circ a = 0$;

(ii) there exists an upper semicontinuous function $\Phi\colon X \to \mathbb{R}$ such that $\Phi \ngeq 0$ and $\Phi \circ a \geq 0$;

(iii) the range of a is not dense in X, i.e., $\overline{a(\mathbb{R})} \neq X$.

By taking $X = \mathbb{R}^n$, the above theorem immediately simplifies to the following consequence which characterizes the linear dependence of finitely many additive functions.

Corollary 3.1. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $a_1, \dots, a_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be additive functions. Then the following statements are equivalent:*

(i) the additive functions $a_1, \dots, a_n$ are linearly dependent, i.e., there exist $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ such that $c_1^2 + \cdots + c_n^2 > 0$ and $c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n = 0$;

(ii) there exists an upper semicontinuous function $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ such that $\Phi \ngeq 0$ and

$$\Phi(a_1(x), \dots, a_n(x)) \geq 0 \qquad (x \in \mathbb{R});$$

(iii) the set $\{(a_1(x), \dots, a_n(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ is not dense in $\mathbb{R}^n$.

Theorem 3.4. *Let $n \in \mathbb{N}$, let $\Gamma\colon \Delta_n \to \mathbb{R}$ be a symmetric function such that $\Gamma(i, j) = 1$ whenever $i \cdot j = 0$, (4) is satisfied and, for all $k \in \{2, \dots, n\}$ there exists $i \in \{1, \dots, k-1\}$ such that $\Gamma(i, k-i) \neq 0$. Assume that $d_0 = id$ and $d_1, \dots, d_n\colon \mathbb{R} \to X$ are additive functions satisfying (2) for all $k \in \{1, \dots, n\}$. Then the following statements are equivalent:*

(i) there exist $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ such that $c_0^2 + c_1^2 + \cdots + c_n^2 > 0$ and

$$c_0 x + c_1 d_1(x) + \cdots + c_n d_n(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}); \tag{6}$$

(ii) *there exists an upper semicontinuous function* $\Phi\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *such that* $\Phi \not\geq 0$ *and*

$$\Phi(x, d_1(x), \ldots, d_n(x)) \geq 0 \qquad (x \in \mathbb{R});$$

(iii) *the set* $\{(x, d_1(x), \ldots, d_n(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ *is not dense in* $\mathbb{R}^{n+1}$*;*

(iv) $d_1 = 0$.

Let $n \in \mathbb{N}$ be arbitrary and $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a derivation. Then the $(n+1)$-tuple $(id, d, d^2, \ldots, d^n)$ is a derivation of order n. Thus from the previous theorem we immediately get the following.

Corollary 3.2. *Let* $n \in \mathbb{N}$ *and let* $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *be a derivation. Then the following statements are equivalent:*

(i) *there exist* $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ *such that* $c_0^2 + c_1^2 + \cdots + c_n^2 > 0$ *and*

$$c_0 x + c_1 d(x) + \cdots + c_n d^n(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R});$$

(ii) *there exists an upper semicontinuous function* $\Phi\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *such that* $\Phi \not\geq 0$ *and*

$$\Phi(x, d(x), \ldots, d^n(x)) \geq 0 \qquad (x \in \mathbb{R});$$

(iii) *the set* $\{(x, d(x), \ldots, d^n(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ *is not dense in* $\mathbb{R}^{n+1}$*;*

(iv) $d = 0$.

4 Characterization of derivations by actions on certain elementary function

It is easy to see from the definition of derivations that every derivation $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies the equation

$$f(x^k) = kx^{k-1} f(x) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \tag{7}$$

for arbitrarily fixed $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Furthermore, the converse is also true, in the following sense: if $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ is fixed and an additive function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies (7), then f is a derivation, see e.g., Jurkat [15], Kurepa [18], and Kannappan–Kurepa [16].

Motivated by a problem of I. Halperin (1963), Jurkat [15] and, independently, Kurepa [18] proved that every additive function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} f(x) \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

has to be linear.

In [21] A. Nishiyama and S. Horinouchi investigated additive functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying the additional equation

$$f(x^n) = cx^k f(x^m) \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \tag{8}$$

where $c \in \mathbb{R}$ and $n, m, k \in \mathbb{Z}$ are arbitrarily fixed. This approach is obviously the common generalization of the abovementioned ones. In the second part of this chapter we will deal with the stability of this last system of functional equations. Our main results could serve as a generalization of the theorems of [21].

In order to avoid superfluous repetitions, henceforth we will say that the function in question is *locally regular* on its domain, if at least one of the following statements are fulfilled:

(i) bounded on a Lebesgue measurable set of positive Lebesgue measure;

(ii) continuous at a point;

(iii) there exists a set of positive Lebesgue measure so that the restriction of the function in question onto this set is measurable in the sense of Lebesgue.

Furthermore, a function will be called *globally regular*, if instead of (ii),

(ii)' continuous on its domain

holds.

Firstly we investigate how derivations can be characterized among additive functions by their actions on certain monomial functions. These results are based on the papers Gselmann [4–6] and also on [2] which is a joint work with Zoltán Boros.

Theorem 4.1. *Let $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n \neq m$ so that $n = -m$ or $\operatorname{sign}(n) = \operatorname{sign}(m)$, further let $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be additive functions. Define the function $\phi \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ by the formula*

$$\phi(x) = f(x^n) - x^{n-m} g(x^m) \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

and assume that ϕ is locally regular. Then, the functions $F, G \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by

$$F(x) = f(x) - f(1)x \quad \text{and} \quad G(x) = g(x) - g(1)x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

are derivations and

$$nF(x) = mG(x)$$

holds for arbitrary $x \in \mathbb{R}$.

Lemma 4.1. *Let $\kappa \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq m$ and assume that $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is an additive function. Define the function $\phi \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ by*

$$\phi(x) = f(x^n) - \kappa x^{n-m} f(x^m) \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

and assume that ϕ is locally regular. Then, the function $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by

$$F(x) = f(x) - f(1)x \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

is a derivation such that for any $x \in \mathbb{R}$

$$(n - \kappa m) F(x) = 0.$$

From this lemma, the following corollary can be concluded immediately.

Corollary 4.1. *Let $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$ be arbitrarily fixed and $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be an additive function and define the function ϕ by*

$$\phi(x) = f(x^r) - r x^{r-1} f(x) \qquad (x \in \mathbb{R},\ x > 0),$$

and assume that ϕ is locally regular. Then, the function $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by

$$F(x) = f(x) - f(1)x \quad (x \in \mathbb{R})$$

is a derivation.

The result presented below generalizes that of Halter-Koch–Reich [9–11].

Theorem 4.2. *Let* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *and* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q})$ *be such that*

– *if* $c = 0$, *then* $n \neq 1$;

– *if* $d = 0$, *then* $n \neq -1$.

Further let $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *be additive functions and define the function* ϕ *by*

$$\phi(x) = f\left(\frac{ax^n + b}{cx^n + d}\right) - \frac{x^{n-1}g(x)}{(cx^n + d)^2} \qquad (x \in \mathbb{R},\ cx^n + d \neq 0)\,.$$

Let us assume ϕ *to be globally regular. Then, the functions* $F, G \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *defined by*

$$F(x) = f(x) - f(1)x \quad \text{and} \quad G(x) = g(x) - g(1)x \quad (x \in \mathbb{R})$$

are derivations.

Theorem 4.3. *Let* $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ *and* $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *be an additive function. Define* ϕ *on* $\mathbb{R}$ *by*

$$\phi(x) = f(x^n) - f(x)^n \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Let us assume that ϕ *is locally regular. Then the function* f *is linear, that is,*

$$f(x) = f(1)x$$

holds for all $x \in \mathbb{R}$.

Roughly speaking the abovementioned results deal with a special case of the following problem. Assume that $\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a given differentiable function and for the additive function $d \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, the mapping

$$x \longmapsto d(\xi(x)) - \xi'(x)d(x)$$

is regular on its domain. Is it true that in case d admits a representation

$$d(x) = \chi(x) + d(1) \cdot x \quad (x \in \mathbb{R})\,,$$

where $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a real derivation?

In view of the above results, in case $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ and $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q})$ and the function ξ is given by

$$\xi(x) = \frac{ax^n + b}{cx^n + d} \quad (x \in \mathbb{R}, cx^n + d \neq 0)\,,$$

then the answer is *affirmative*. The main aim of this chapter is to extend this result to other classes of elementary functions such as the exponential function, the logarithm function, the trigonometric functions and the hyperbolic functions. Concerning such type of investigations, we have to mention the paper of Gy. Maksa (see [20]), where the previous problem was investigated under the supposition that the mapping

$$x \longmapsto d\left(\xi(x)\right) - \xi'(x)d(x)$$

is identically zero.

Our main result in this direction is contained in the following, see Gselmann [7].

Theorem 4.4. *Assume that for the additive function $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ the mapping ϕ defined by*

$$\phi(x) = d\left(\xi(x)\right) - \xi'(x)d(x)$$

is regular. Then the function d can be represented as

$$d(x) = \chi(x) + d(1) \cdot x \quad (x \in \mathbb{R})\,,$$

where $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a derivation in any of the following cases

(a)

$$\xi(x) = a^x$$

(b)

$$\xi(x) = \cos(x)$$

(c)

$$\xi(x) = \sin(x)$$

(d)

$$\xi(x) = \cosh(x)$$

(e)

$$\xi(x) = \sinh(x)$$

(f)

$$\xi(x) = \ln(x)$$

(g)

$$\xi(x) = \arccos(x)$$

(h)

$$\xi(x) = \arcsin(x)$$

(i)

$$\xi(x) = \operatorname{arcosh}(x)$$

(j)

$$\xi(x) = \operatorname{arsinh}(x).$$

With the aid of Hyers' theorem and the results presented above, we were also able to prove stability type results concerning derivations.

1 Bevezetés

Ennek az értekezésnek a fő célkitűzése derivációkkal kapcsolatos jellemzési tételek ismertetése függvényegyenletek segítségével. Ezért (a derivációk fogalmának ismertetése mellett) először azt kellene tisztáznunk, hogy pontosan mit is értünk függvényegyenlet alatt. Ennek a fogalomnak a megadása azonban a legtöbb matematikai fogalommal ellentétben nem egyszerű feladat. Hasonló a helyzet a halmazelméletben a halmaz fogalmával. Míg a reláció, függvény vagy a művelet fogalma jól definiáltak, addig a halmaz fogalmát nem definiáljuk, matematikai absztrakciónak tekintjük. Ezért reméljük, hogy ehhez a halmazelméleti példához hasonlóan, az olvasónak is van valamilyen intuitív elképzelése arról, hogy mit értünk függvényegyenlet alatt.

Függvényegyenletek számtalan helyen bukkannak fel. Hatásuk és alkalmazásuk szinte minden tudományterületen érezhető és minden ilyen terület profitál a megjelenésükből. Többek között az alábbi területeken alkalmazható leginkább a függvényegyenletek elmélete: analízis, magatartástudomány, szociológia, biológia, kombinatorika, közgazdaságtudomány, mérnöki tudományok, geometria, információelmélet, fizika, pszichológia, statisztika stb.

Noha a függvényegyenletek elméletével olyan kiváló matematikusok is foglalkoztak, mint például J. D'Alembert, L. Euler, C.F. Gauß, A. L. Cauchy, N.H. Abel, K. Weierstraß, J.G. Darboux és D. Hilbert, egészen 1966-ig nem létezett a témának egységes tárgyalásmódja, ekkor jelent meg ugyanis J. Aczél [1] monográfiája. Ebben a értekezésben mi is részben ezt a monográfiát, részben pedig a Kuczma [17] munkát fogjuk követni.

Az értekezés öt fejezetből áll, az elsőben a legfontosabb fogalmakat és állításokat foglaljuk össze a függvényegyenletek elméletéből, a másodikban pedig a derivációkkal kapcsolatos leginkább nélkülözhetetlen definíciókat és tételeket soroljuk fel. Legyen Q egy gyűrű, P pedig a Q egy részgyűrűje. Az $f\colon P \to Q$ leképezést *deriváció*nak nevezzük, ha f *additív*, azaz,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (x, y \in P)$$

és kielégíti az úgynevezett *Leibniz-szabály*t, vagyis,

$$f(xy) = f(x)y + xf(y) \qquad (x, y \in P)$$

teljesül.

Csakúgy mint a homomorfizmusoknak, a derivációknak is nagy szerep jut az algebrában, hiszen ezek a leképezések számos információval szolgálnak arról, hogy azok a gyűrűk, melyek között hatnak, mennyire „nem kommutatívak”. Így, a derivációkkal kapcsolatos jellemzési tételek nemcsak a függvényegyenletek elmélete, hanem az algebra szempontjából is relevánsak lehetnek. Látható, hogy már a deriváció fogalmának bevezetése is függvényegyenletek (a Cauchy-egyenlet és a Leibniz-szabály) segítségével történik. Az értekezés harmadik fejezetében azt mutatjuk meg, hogy deriváció jellemezhetőek egyetlen függvényegyenlettel is. A fejezet ezen eredményei a szerző [3] dolgozatán alapulnak.

Ebben a fejezetben azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy a derivációk fogalmában szereplő függvényegyenletek függetlenek-e az alábbi értelemben. Legyen Q egy kommutatív gyűrű, P pedig a Q egy részgyűrűje. Legyenek továbbá $\lambda, \mu \in Q \setminus \{0\}$ rögzített konstansok és tekintsük az $f\colon P \to Q$ függvényre vonatkozó

$$\lambda\,[f(x+y) - f(x) - f(y)] + \mu\,[f(xy) - xf(y) - yf(x)] = 0 \quad (x, y \in P)\,.$$

egyenletet. Ha az f függvény deriváció, akkor egy az egyenlet nyilván fennáll. Ebben a fejezetben igazoljuk ennek a megfordítását, vagyis (a P és a Q gyűrűre tett megfelelő feltevések esetén) a fenti függvényegyenlet jellemzi a derivációkat. Ez az eredmény a fejezet fő eredményének következménye, mely az $f, g\colon P \to Q$ ismeretlen függvényekre vonatkozó

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = g(xy) - xg(y) - yg(x) \quad (x, y \in P)\,,$$

egyenlettel foglalkozik.

A negyedik fejezetben arra keressük a választ, hogy a

$$d_k(xy) = \sum_{i=0}^{k} \Gamma(i, k-i) d_i(x) d_{k-i}(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R},\ k \in \{0, \ldots, n\}),$$

függvényegyenlet-rendszernek mikor létezik az *additív függvények* körében megoldása, ahol $\Delta_n := \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, 0 \le i, j \text{ és } i + j \le n\}$ és $\Gamma\colon \Delta_n \to \mathbb{R}$ olyan szimmetrikus függvény, melyre $\Gamma(i, j) = 1$ teljesül, ha $i \cdot j = 0$. Továbbá, ebben a fejezetben azzal a problémával is foglalkozunk, hogy a fenti függvényegyenlet-rendszer $d_0, d_1, \ldots, d_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív megoldásai milyen feltételek teljesülése esetén lesznek lineárisan függetlenek. Ennek az eredménynek a következményeként igazoljuk azt is, hogy tetszőleges nemtriviális valós $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriváció esetén a $d^0, d^1, \ldots, d^n$ iteráltak lineárisan függetlenek és az $x \mapsto (x, d^1(x), \ldots, d^n(x))$ leképezés gráfja sűrű $\mathbb{R}^{n+1}$-ben. Az ebben a részben található eredmények a szerző Páles Zsolttal közös, [8] dolgozatán alapulnak.

Az értekezés utolsó fejezete az alábbi problémát taglalja. Legyen $\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy adott, differenciálható függvény és tegyük fel, hogy az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvény olyan, hogy a

$$\varphi(x) = f(\xi(x)) - \xi'(x) f(x)$$

módon megadott φ leképezés az értelmezési tartományán valamilyen regularitási tulajdonságot elégít ki (pl. lokálisan korlátos, folytonos, mérhető stb.). Igaz-e, hogy ebben az esetben az f függvény előáll

$$f(x) = \chi(x) + f(1) \cdot x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

valamely $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós derivációval?

Az első eredmények ebben a témakörben az 1960-as évekből származnak, lásd például a Jurkat [15], Kurepa [18] és Kannappan–Kurepa [16] dolgozatokat, ahol a szerzők a fenti problémát a $\varphi \equiv 0$ és $\xi(x) = x^k$ esetben vizsgálták. A szerző első hozzájárulása ehhez a témához a Boros Zoltánnal közös [2] dolgozat.

Néhány előkészítő állítás után, ebben a fejezetben azt fogjuk megmutatni, hogy abban az esetben, ha $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ és $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q})$ valamint

$$\xi(x) = \frac{ax^n + b}{cx^n + d} \quad (x \in \mathbb{R}, cx^n + d \neq 0)\,,$$

akkor a fenti problémára a válasz *igenlő*. Ezek az eredmények megtalálhatóak a [4–6] dolgozatokban is. Végül, olyan állításokat ismertetünk, melyek azt mutatják, hogy a fent megadott függvényosztály tovább bővíthető. Pontosabban, az alábbi eredményt fogjuk igazolni. Tegyük fel, hogy az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvény olyan, hogy a segítségével értelmezett

$$\varphi(x) = f\left(\xi(x)\right) - \xi'(x)f(x)$$

leképezés reguláris. Ekkor van olyan $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós deriváció, hogy

$$f(x) = \chi(x) + f(1) \cdot x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

feltéve, hogy ξ az alábbi függvények valamelyikével egyezik meg.

(a)
$$\xi(x) = a^x$$

(b)
$$\xi(x) = \cos(x)$$

(c)
$$\xi(x) = \sin(x)$$

(d)
$$\xi(x) = \cosh(x)$$

(e)
$$\xi(x) = \sinh(x)$$

(f)
$$\xi(x) = \ln(x)$$

(g)
$$\xi(x) = \arccos(x)$$

(h)
$$\xi(x) = \arcsin(x)$$

(i)
$$\xi(x) = \operatorname{arcosh}(x)$$

(j)
$$\xi(x) = \operatorname{arsinh}(x).$$

Ennek az állításnak a segítségével derivációkra vonatkozó, Hyers-típusú tételeket is igazolunk. Ebben a részben a [7] dolgozatot használjuk fel.

2 Derivációk

Legyen Q egy gyűrű, P pedig a Q egy részgyűrűje. Az $f\colon P \to Q$ leképezést *derivá-ció*nak nevezzük, ha f *additív*, azaz

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (x, y \in P),$$

és eleget tesz az úgynevezett *Leibniz-szabály*nak, vagyis

$$f(xy) = f(x)y + xf(y) \qquad (x, y \in P)$$

teljesül.

Derivációk esetében az alábbi két példa kulcsfontosságú.

Legyen $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ egy test és tegyük fel, hogy az $f\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ leképezés deriváció és definiáljuk az $f_0\colon \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[x]$ leképezést a következő módon. Ha $p \in \mathbb{F}[x]$ és

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

akkor legyen

$$f_0(p) = p^f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(a_k) x^k.$$

Könnyű megmutatni, hogy $f_0\colon \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[x]$ deriváció.

Legyen R egy gyűrű és $b \in R$, ekkor az

$$\mathrm{ad}_b(x) = xb - bx = [x, b] \qquad (x \in R)$$

módon megadott $\mathrm{ad}_b\colon R \to R$ leképezés deriváció. Az $f\colon R \to R$ függvényt *belső derivációnak* nevezzük, ha van olyan $b \in R$, melyre $f \equiv \mathrm{ad}_b$. Ellenkező esetben az f derivációt *külső derivációnak* hívjuk.

Derivációk esetében az additivitás felhasználásával azonnal adódik az alábbi állítás, lásd [17, Theorem 14.1.1].

2.1 Tétel. *Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy olyan valós deriváció, melyre az alábbi állítások közül legalább egy teljesül.*

(i) f mérhető;

(ii) f alulról korlátos egy pozitív Lebesgue-mértékű halmazon;

(iii) f felülről korlátos egy pozitív Lebesgue-mértékű halmazon.

Ekkor f azonosan zéró.

Az alábbi tétel módszert ad arra, hogy hogyan lehet derivációkat egy adott testről egy nagyobb testre kiterjeszteni [17, Theorem 14.2.1].

2.2 Tétel. *Legyen* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *egy nulla karakterisztikájú test,* $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ *pedig ennek egy részteste Jelölje továbbá* S $\mathbb{K}$ *egy* $\mathbb{F}$ *feletti algebrai bázisát, ha van ilyen, ellenkező esetben legyen* $S = \emptyset$*. Legyen* $f : \mathbb{F} \to \mathbb{K}$ *egy deriváció. Ekkor tetszőleges* $u : S \to \mathbb{K}$ *függvény esetén van egy olyan egyértelműen meghatározott* $g : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *deriváció, melyre* $g|_{\mathbb{F}} = f$ *és* $g|_S = u$*.*

Mivel $\mathbb{Q}$ algebrai lezártja nem a teljes $\mathbb{R}$, ezért a fenti tételből azonnal adódik az alábbi.

2.1 Következmény. *Létezik nemtriviális valós deriváció.*

3 Derivációk jellemzése egyetlen függvényegyenlettel

Derivációkkal kapcsolatos jellemzési tételek irodalma meglehetősen bőséges, lásd például a Horinouchi–Kannappan [13], Jurkat [15], Kurepa [18, 19] dolgozatokat, valamint a Kuczma [17], illetve Zariski–Samuel [22] monográfiákat. Ezen eredmények mindegyike olyan, hogy az ismeretlen függvényre az additivitás mellett valamilyen további függvényegyenlet fennállását megkövetelve lehet igazolni, hogy a szóban forgó függvény deriváció. Ennek a fejezetnek a fő eredménye az, hogy megmutatjuk, hogy derivációk jellemezhetőek egyetlen függvényegyenlettel is. Az itt található eredmények a szerző [3] dolgozatán alapulnak.

Pontosabban, ebben a fejezetben a következő problémával foglalkozunk. Legyenek $\lambda, \mu \in Q \setminus \{0\}$ adott konstansok és tekintsük az $f : P \to Q$ ismeretlen függvényre vonatkozó

$$\lambda \left[f(x + y) - f(x) - f(y) \right] + \mu \left[f(xy) - x f(y) - y f(x) \right] = 0. \quad (x, y \in P)$$

egyenletet. Nyilvánvaló, hogy ha f deriváció, akkor kielégíti ezt a függvényegyenletet is. Az értekezésben megmutatjuk, hogy a P és Q gyűrűre kirótt megfelelő algebrai feltevések esetén ennek a megfordítása is igaz. Ez az eredmény egy általánosabb tétel következménye, mely az ismeretlen $f, g\colon P \to Q$ függvényekre vonatkozó

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = g(xy) - xg(y) - yg(x), \quad (x, y \in P)$$

egyenlet általános megoldásait írja le. A fejezet fő eredménye az alábbi.

3.1 Tétel. *Legyen $\mathbb{F}$ egy test, X pedig egy lineáris tér $\mathbb{F}$ felett. Tegyük fel, hogy az $f, g\colon \mathbb{F} \to X$ függvények olyanok, hogy*

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = g(xy) - xg(y) - yg(x)$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{F}$ esetén. Ekkor és csakis ekkor, léteznek olyan $\alpha, \beta\colon \mathbb{F} \to X$ additív függvények és egy olyan $\varphi\colon \mathbb{F} \to X$ függvény, melyre

$$\varphi(xy) = x\varphi(y) + y\varphi(x) \qquad (x, y \in \mathbb{F}),$$

úgy, hogy

$$f(x) = \beta(x) + \frac{1}{2}\alpha(x^2) - x\alpha(x) \qquad (x, y \in \mathbb{F})$$

és

$$g(x) = \varphi(x) + \alpha(x) \qquad (x, y \in \mathbb{F})$$

A Jessen–Karpf–Throrup [14] dolgozat egy kiterjesztési tételének felhasználásával, ebből az állításból az alábbi következmény adódik.

3.1 Következmény. *Legyen $\mathbb{F}$ egy rendezett test, X pedig egy lineáris tér $\mathbb{F}$ felett,*

$$\mathbb{F}_+ = \{x \in \mathbb{F} \mid x > 0\}$$

és $f, g\colon \mathbb{F}_+ \to X$ olyan függvények, hogy

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = g(xy) - xg(y) - yg(x)$$

minden $x, y \in \mathbb{F}_+$ esetén. Ekkor az f és g függvények kiterjeszthetőek olyan $\widetilde{f}, \widetilde{g}\colon \mathbb{F} \to X$ függvényekké, melyekre

$$\widetilde{f}(x) = \beta(x) + \frac{1}{2}\alpha(x^2) - x\alpha(x) \qquad (x, y \in \mathbb{F})$$

és

$$\widetilde{g}(x) = \varphi(x) + \alpha(x), \qquad (x, y \in \mathbb{F})$$

teljesül, ahol $\alpha, \beta\colon \mathbb{F} \to X$ *additív függvények,* $\varphi\colon \mathbb{F} \to X$ *pedig egy olyan függvény, melyre*

$$\varphi(xy) = x\varphi(y) + y\varphi(x) \qquad (x, y \in \mathbb{F})\,.$$

A fejezet fő eredményéből a $g(x) = -\dfrac{\mu}{\lambda} f(x)$ választással kapjuk a következő állítást.

3.2 Következmény. *Legyen* $\mathbb{F}$ *egy test,* X *pedig egy lineáris tér* $\mathbb{F}$ *felett,* $\lambda, \mu \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ *tetszőleges, de rögzített konstansok. Ekkor az* $f\colon \mathbb{F} \to X$ *függvény pontosan akkor deriváció, ha*

$$\lambda\,[f(x+y) - f(x) - f(y)] + \mu\,[f(xy) - xf(y) - yf(x)] = 0$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{F}$ *esetén.*

4 Egy függvényegyenlet-rendszer additív megoldhatósága és a megoldások lineáris függetlensége

Az értekezés negyedik fejezetének első részében azt vizsgáljuk, hogy a

$$d_k(xy) = \sum_{i=0}^{k} \Gamma(i, k-i) d_i(x) d_{k-i}(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R},\ k \in \{0, \ldots, n\})$$

függvényegyenlet-rendszernek milyen feltételek mellett léteznek additív megoldásai. Itt $\Delta_n := \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | 0 \leq i, j \text{ és } i + j \leq n\}$, $\Gamma\colon \Delta_n \to \mathbb{R}$ pedig egy olyan szimmetrikus függvény, melyre $\Gamma(i, j) = 1$ teljesül, amennyiben $i \cdot j = 0$. Továbbá, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ és $\mathbb{R}$ jelölik rendre a természetes, az egész, illetve a valós számok halmazát.

A fejezet második részében pedig arra a problémára keressük a választ, hogy a fenti függvényegyenlet-rendszer additív megoldásai mikor lesznek lineárisan függetlenek. Ennek következményeként igazoljuk azt is, hogy tetszőleges nemtriviális

$d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós deriváció esetén, a $d^0, d^1, \ldots, d^n$ iteráltak lineárisan függetlenek, továbbá az $x \mapsto (x, d^1(x), \ldots, d^n(x))$ leképezés gráfja sűrű $\mathbb{R}^{n+1}$-ben.

Ezek az eredmények a Páles Zsolttal közös [8] dolgozaton alapulnak.

Legyen $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy valós deriváció. Ekkor d iteráltjai, azaz, a $d^0 := id$, $d^1 := d, \ldots, d^n := d \circ d^{n-1}$ függvények kielégítik az alábbi, úgynevezett *magasabbrendű Leibniz-szabály*t, azaz,

$$d^k(xy) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} d^i(x) d^{k-i}(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R},\ k \in \{1, \ldots, n\}).$$

Ebből a tulajdonságból kiindulva Heyneman–Sweedler [12] vezette be az úgynevezett *n-edrendű deriváció*k fogalmát, gyűrűn értelmezett, modulusba képező függvényekre. Az értekezés ezen fejezetében azonban csak valós függvényekkel fogunk foglalkozni, így a definíciót is csak erre az esetre ismertetjük.

4.1 Definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, azt mondjuk, hogy a $d_0, d_1, \ldots, d_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvényekből álló $(n+1)$ elemű rendszer* n-edrendű deriváció*, ha $d_0 = id$ és minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén,*

$$d_k(xy) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} d_i(x) d_{k-i}(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}). \tag{9}$$

Nyilván, az (id, d) pár pontosan akkor elsőrendű deriváció, ha d deriváció. Továbbá, ha $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy valós deriváció, akkor a d iteráltjaiból álló $(d^0, d^1, \ldots, d^n)$ rendszer egy n-edrendű deriváció. Létezik azonban olyan n-edrendű deriváció, mely nem ilyen alakú. Ehhez legyen ugyanis $\widetilde{d}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy nemtriviális valós deriváció. Ekkor $(d^0, d^1, \ldots, d^{n-1}, d^n + \widetilde{d})$ egy olyan n-edrendű deriváció, mely nem az előbbi alakú.

A fejezet első részében azt vizsgáljuk, hogy a fent megadott függvényegyenletrendszernek mikor létezik az additív függvények körében megoldása. Ezzel kapcsolatban a következő tételt igazoljuk.

4.1 Tétel. *Legyen $n \geq 2$, $\Gamma\colon \Delta_n \to \mathbb{R}$ pedig egy olyan szimmetrikus függvény, melyre $\Gamma(i, j) = 1$ amennyiben $i \cdot j = 0$, tegyük fel továbbá, hogy*

$$\Gamma(i + j, k)\Gamma(i, j) = \Gamma(i, j + k)\Gamma(j, k) \qquad (0 \leq i, j, k \text{ és } i + j + k \leq n). \tag{10}$$

Legyen $d_0 = id$ és legyenek $d_1, \dots, d_{n-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan additív függvények, melyek kielégítik a

$$d_k(xy) = \sum_{i=0}^{k} \Gamma(i, k-i) d_i(x) d_{k-i}(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R},\ k \in \{0, \dots, n-1\}), \tag{11}$$

egyenletet minden $k \in \{1, \dots, n-1\}$ esetén. Ekkor létezik egy olyan $d_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvény, hogy a (11) *egyenlet $k = n$ esetén is fennáll.*

Ezt követően a (10) egyenlet seholsem zéró megoldásait határoztuk meg.

4.2 Tétel. *Legyen $n \geq 2$, $\Gamma \colon \Delta_n \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pedig egy olyan szimmetrikus függvény, melyre $\Gamma(i, j) = 1$, ha $i \cdot j = 0$. Ekkor Γ pontosan akkor elégíti ki a* (10) *egyenletet, ha létezik egy olyan $\gamma \colon \{0, 1, \dots, n\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ függvény, melyre*

$$\Gamma(i, j) = \frac{\gamma(i + j)}{\gamma(i)\gamma(j)} \qquad ((i, j) \in \Delta_n). \tag{12}$$

4.3 Tétel. *Legyen X egy lokálisan konvex Hausdorff-féle lineáris tér $a \colon \mathbb{R} \to X$ pedig egy additív függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) Létezik egy olyan $\varphi \in X^*$ nemzéró folytonos lineáris funkcionál, hogy $\varphi \circ a = 0$.

(ii) Létezik egy olyan $\Phi \colon X \to \mathbb{R}$ felülről félig folytonos függvény, melyre $\Phi \not\geq 0$ és $\Phi \circ a \geq 0$.

(iii) a képtere nem sűrű X-ben, vagyis $\overline{a(\mathbb{R})} \neq X$.

Ebből a tételből az $X = \mathbb{R}^n$ választással azonnal adódik az alábbi állítás, melynek segítségével véges sok additív függvény lineáris függősége jellemezhető.

4.1 Következmény. *Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $a_1, \dots, a_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvények. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) Az $a_1, \dots, a_n$ additív függvények lineárisan függőek, azaz, léteznek olyan $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ konstansok, melyekre $c_1^2 + \cdots + c_n^2 > 0$ és $c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n = 0$.

(ii) Létezik egy olyan felülről félig folytonos $\Phi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $\Phi \not\geq 0$ és

$$\Phi(a_1(x), \dots, a_n(x)) \geq 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(iii) *Az* $\{(a_1(x), \dots, a_n(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ *halmaz nem sűrű* $\mathbb{R}^n$*-ben.*

4.4 Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma\colon \Delta_n \to \mathbb{R}$ *pedig egy olyan szimmetrikus függvény, melyre* $\Gamma(i, j) = 1$ *teljesül, ha* $i \cdot j = 0$*. Tegyük fel, hogy a* (10) *egyenlet minden* $k \in \{2, \dots, n\}$ *esetén fennáll és azt is, hogy van olyan* $i \in \{1, \dots, k-1\}$*, hogy* $\Gamma(i, k-i) \neq 0$*. Tegyük fel továbbá, hogy* $d_0 = id$ *és* $d_1, \dots, d_n\colon \mathbb{R} \to X$ *olyan additív függvények, melyek kielégítik a* (11) *rendszert minden* $k \in \{1, \dots, n\}$ *esetén. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) *Léteznek olyan* $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ *konstansok, hogy* $c_0^2 + c_1^2 + \dots + c_n^2 > 0$ *és*

$$c_0 x + c_1 d_1(x) + \dots + c_n d_n(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{13}$$

(ii) *Létezik egy olyan felülről félig folytonos* $\Phi\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *függvény, hogy* $\Phi \not\geq 0$ *és*

$$\Phi(x, d_1(x), \dots, d_n(x)) \geq 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(iii) *Az* $\{(x, d_1(x), \dots, d_n(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ *halmaz nem sűrű* $\mathbb{R}^{n+1}$*-ben.*

(iv) $d_1 = 0$.

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pedig egy valós deriváció. Ekkor az $(id, d, d^2, \dots, d^n)$ rendszer egy n-edrendű deriváció, így a fenti állításból azonnal adódik az alábbi.

4.2 Következmény. *Legyen* $n \in \mathbb{N}$, $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *pedig egy deriváció. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) *Léteznek olyan* $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ *konstansok, hogy* $c_0^2 + c_1^2 + \dots + c_n^2 > 0$ *és*

$$c_0 x + c_1 d(x) + \dots + c_n d^n(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(ii) *Van olyan felülről félig folytonos* $\Phi\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *függvény, hogy* $\Phi \not\geq 0$ *és*

$$\Phi(x, d(x), \dots, d^n(x)) \geq 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(iii) *Az* $\{(x, d(x), \dots, d^n(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ *halmaz nem sűrű* $\mathbb{R}^{n+1}$*-ben.*

(iv) $d = 0$.

5 Derivációk és elemi függvények

A Leibniz-szabály és az additivitás felhasználásával könnyen látható, hogy minden $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriváció teljesíti az

$$f(x^k) = kx^{k-1}f(x) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \tag{14}$$

azonosságot tetszőlegesen rögzített $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ esetén.

Ennek a megfordítása is igaz. Pontosabban, ha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan additív függvény, mely valamely rögzített $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ esetén kielégíti a (14) egyenletet, akkor f szükségképpen deriváció, lásd például a Jurkat [15], Kurepa [18] és Kannappan–Kurepa [16] dolgozatokat.

I. Halperin egy 1963-as problémájával kapcsolatosan, Jurkat [15] és tőle függetlenül Kurepa [18] megmutatta, hogy ha az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvényre még az is teljesül, hogy

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}f(x) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

akkor f lineáris függvény, azaz,

$$f(x) = f(1) \cdot x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

teljesül.

Ezeknek a problémáknak egy lehetséges általánosításaként a [21] dolgozatban A. Nishiyama és S. Horinouchi olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvényeket vizsgált, melyekre fennáll az

$$f(x^n) = cx^k f(x^m) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \tag{15}$$

azonosság is, itt $c \in \mathbb{R}$ és $n, m, k \in \mathbb{Z}$ rögzített konstansok.

A felesleges ismétlések elkerülése végett, a továbbiakban azt fogjuk mondani, hogy egy függvény *lokálisan reguláris* az értelmezési tartományán, ha az alábbi állítások közül legalább egy teljesül rá:

(i) korlátos egy pozitív Lebesgue-mértékű halmazon;

(ii) folytonos legalább egy pontban;

(iii) létezik egy olyan pozitív Lebesgue-mértékű halmaz, melyre való leszűkítése a szóban forgó függvénynek, mérhető;

Azt mondjuk továbbá, hogy a szóban forgó függvény *(globálisan) reguláris*, ha a fenti (ii) állítás helyett, az erősebb
(ii)' folytonos az értelmezési tartományán
állítás teljesül.

A fejezet első részében azzal a problémával fogunk foglalkozni, hogy hogyan jellemezhetőek a deriválciók az additív függvények között, ha ismeretes ezen függvények hatása bizonyos monomfüggvényeken. Ennek a témakörnek a kiindulópontja a szerző, Boros Zoltánnal közös [2] dolgozata, a fejezet eredményei azonban a Gselmann [4–6] dolgozatok alapján kerülnek ismertetésre.

5.1 Tétel. *Legyenek $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ olyan rögzített konstansok, melyekre még az is teljesül, hogy $n \neq m$ és $n = -m$ vagy $\mathrm{sign}(n) = \mathrm{sign}(m)$. Az $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvények segítségével értelmezzük a $\phi \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ leképezést a*

$$\phi(x) = f\left(x^n\right) - x^{n-m} g\left(x^m\right) \qquad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right),$$

képlettel. Ha a ϕ függvény lokálisan reguláris, akkor az

$$F(x) = f(x) - f(1)x \quad \text{és} \quad G(x) = g(x) - g(1)x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $F, G \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények deriválciók, továbbá,

$$nF(x) = mG(x)$$

is teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

5.1 Lemma. *Legyenek $\kappa \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq m$ rögzítettek és tekintsük az $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvényt. Ha a*

$$\phi(x) = f\left(x^n\right) - \kappa x^{n-m} f\left(x^m\right) \qquad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right)$$

képlettel értelmezett $\phi \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ függvény lokálisan reguláris, akkor az

$$F(x) = f(x) - f(1)x \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right)$$

módon megadott $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény deriváció, melyre még az is teljesül, hogy

$$(n - \kappa m)\, F(x) = 0.$$

Ennek az állításnak a közvetlen felhasználásával azonnal adódik az alábbi következmény.

5.1 Következmény. *Legyen $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$ tetszőlegesen rögzített, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pedig egy additív függvény. Tegyük fel, hogy a*

$$\phi(x) = f\,(x^r) - r x^{r-1} f\,(x) \qquad (x \in \mathbb{R},\ x > 0)\,,$$

képlettel megadott ϕ függvény lokálisan reguláris, ekkor az

$$F(x) = f(x) - f(1)x \quad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény deriváció.

A Halter-Koch–Reich [9–11] dolgozatok egy lehetséges általánosításaként az alábbi állítást igazoljuk.

5.2 Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ és $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q})$ olyan, hogy*

– *ha $c = 0$, akkor $n \neq 1$;*

– *ha $d = 0$, akkor $n \neq -1$.*

Legyenek továbbá $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvények és tekintsük a

$$\phi(x) = f\left(\frac{ax^n + b}{cx^n + d}\right) - \frac{x^{n-1} g(x)}{(cx^n + d)^2} \qquad (x \in \mathbb{R},\ cx^n + d \neq 0)\,.$$

módon megadott ϕ függvényt. Ekkor, ha a ϕ függvény reguláris, akkor az

$$F(x) = f(x) - f(1)x \quad \text{és} \quad G(x) = g(x) - g(1)x \quad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $F, G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények deriváció k.

Könnyen látható, hogy a fenti eredmények a következő probléma speciális esetei. Legyen $\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy adott differenciálható függvény, $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pedig egy olyan additív függvény, melyre az

$$x \longmapsto d\left(\xi(x)\right) - \xi'(x)d(x)$$

leképezés reguláris az értelmezési tartományán. Igaz-e, hogy ekkor a d függvény előáll

$$d(x) = \chi(x) + d(1) \cdot x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

alakban, ahol $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy valós deriváció?

A 5.2. Tétel azt mondja, ki, hogy erre a kérdésre igenlő a válasz, feltéve, hogy $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ és $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q})$, valamint

$$\xi(x) = \frac{ax^n + b}{cx^n + d} \quad (x \in \mathbb{R}, cx^n + d \neq 0).$$

Azon feltevés mellett, hogy az

$$x \longmapsto d\left(\xi(x)\right) - \xi'(x)d(x)$$

leképezés azonosan zéró, a problémával Maksa Gyula foglalkozott a [20] dolgozatban.

A Gselmann [7] dolgozat eredményeit felhasználva a fent megfogalmazott problémával kapcsolatban az alábbi állításokat igazoljuk.

5.3 Tétel. *Tegyük fel, hogy a $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvény olyan, hogy a*

$$\phi(x) = d\left(\xi(x)\right) - \xi'(x)d(x)$$

módon megadott ϕ függvény reguláris. Ekkor d előáll

$$d(x) = \chi(x) + d(1) \cdot x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

alakban, ahol $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy valós deriváció, feltéve, hogy az alábbi esetek valamelyike áll fent.

(a)

$$\xi(x) = a^x$$

(b)

$$\xi(x) = \cos(x)$$

(c)

$$\xi(x) = \sin(x)$$

(d)

$$\xi(x) = \cosh(x)$$

(e)

$$\xi(x) = \sinh(x)$$

(f)

$$\xi(x) = \ln(x)$$

(g)

$$\xi(x) = \arccos(x)$$

(h)

$$\xi(x) = \arcsin(x)$$

(i)

$$\xi(x) = \mathrm{arcosh}(x)$$

(j)

$$\xi(x) = \mathrm{arsinh}(x).$$

Az itt ismertetett eredmények alkalmasak továbbá arra is, hogy a segítségükkel Hyers-típusú stabilitási tételeket lehessen igazolni derivációkra.

Bibliography

[1] János Aczél. *Lectures on functional equations and their applications*. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 19. Academic Press, New York-London, 1966. Translated by Scripta Technica, Inc. Supplemented by the author. Edited by Hansjorg Oser.

[2] Zoltán Boros and Eszter Gselmann. Hyers-Ulam stability of derivations and linear functions. *Aequationes Math.*, 80(1-2):13–25, 2010.

[3] Eszter Gselmann. Notes on the characterization of derivations. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 78(1-2):137–145, 2012.

[4] Eszter Gselmann. Derivations and linear functions along rational functions. *Monatsh. Math.*, 169(3-4):355–370, 2013.

[5] Eszter Gselmann. Approximate derivations of order n. *Acta Math. Hungar.*, 144(1):217–226, 2014.

[6] Eszter Gselmann. On approximate n-Jordan homomorphisms. *Ann. Math. Sil.*, (28):47–58, 2014.

[7] Eszter Gselmann. Additive functions and their actions on certain elementary functions. *Math. Inequal. Appl.*, 18(3):1037–1045, 2015.

[8] Eszter Gselmann and Zsolt Páles. Additive solvability and linear independence of the solutions of a system of functional equations. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 82(1-2):101–110, 2016.

[9] Franz Halter-Koch and Ludwig Reich. Additive functions commuting with Möbius transformations and field monomorphisms. *Aequationes Math.*, 58(1-2):176–182, 1999. Dedicated to János Aczél on the occasion of his 75th birthday.

[10] Franz Halter-Koch and Ludwig Reich. Characterization of field homomorphisms by functional equations. *Publ. Math. Debrecen*, 56(1-2):179–183, 2000.

[11] Franz Halter-Koch and Ludwig Reich. Characterization of field homomorphisms by functional equations. II. *Aequationes Math.*, 62(1-2):184–191, 2001.

[12] Robert G. Heyneman and Moss Eisenberg Sweedler. Affine Hopf algebras. I. *J. Algebra*, 13:192–241, 1969.

[13] Sôichi Horinouchi and Palaniappan Kannappan. On the system of functional equations $f(x+y) = f(x) + f(y)$ and $f(xy) = p(x)f(y) + q(y)f(x)$. *Aequationes Math.*, 6:195–201, 1971.

[14] Børge Jessen, Jørgen Karpf, and Anders Thorup. Some functional equations in groups and rings. *Math. Scand.*, 22:257–265, 1968.

[15] Wolfgang B. Jurkat. On Cauchy's functional equation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16:683–686, 1965.

[16] Palaniappan Kannappan and Svetozar Kurepa. Some relations between additive functions. I. *Aequationes Math.*, 4:163–175, 1970.

[17] Marek Kuczma. *An introduction to the theory of functional equations and inequalities*. Birkhäuser Verlag, Basel, second edition, 2009. Cauchy's equation and Jensen's inequality, Edited and with a preface by Attila Gilányi.

[18] Svetozar Kurepa. The Cauchy functional equation and scalar product in vector spaces. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Ser. II Društvo Mat. Fiz. Hrvatske*, 19:23–36, 1964.

[19] Svetozar Kurepa. Remarks on the Cauchy functional equation. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, 5 (19):85–88, 1965.

[20] Gyula Maksa. On additive functions which differentiate elementary functions in some sense. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 41:125–136, 2013.

[21] Akinori Nishiyama and Sôichi Horinouchi. On a system of functional equations. *Aequationes Math.*, 1:1–5, 1968.

[22] Oscar Zariski and Pierre Samuel. *Commutative algebra. Vol. 1*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1975. With the cooperation of I. S. Cohen, Corrected reprinting of the 1958 edition, Graduate Texts in Mathematics, No. 28.