Játékelmélet (2019 / 2020-as tanév, II. félév)

(TTMME0208, TTMMG0208)

Az előadásokat és a gyakorlatokat **pénteken** az M 402 tanteremben tartjuk.
Az *előadás* időpontja: 10^{00}–12^{00}, a *gyakorlat* időpontja: 12^{15}–13^{50}.[1]

TEMATIKA és KOLLOKVIUMI TÉTELEK

A tételek leírása után [az ajánlott irodalom vonatkozó fejezete/szakasza] illetve (a megfelelő 2020. évi előadás dátuma) olvasható.

1. Játékok normál formában. Stratégiák, stratégiaprofilok. Nash-egyensúly. Véges játékok, a szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölése. Példák, bimátrix játékok. Osztozkodási feladatok.
   [**FPSS1:** 1.6., 2.1., 2.2., 2.7. definíciók; 2.8., 2.9, 2.10 tételek] (február 14.)
2. Kétszemélyes antagonisztikus játékok. A játék értéke. Kétszemélyes zérusösszegű (KZ) játékok. Egyensúly és minimax.
   [**FPSS1:** 2.3., 2.4. definíciók; 2.5. tétel; 4.1. szakasz] (február 21.)
3. A Nash-egyensúly létezésének elegendő feltételei. A legjobbválasz-leképezés fogalma és folytonossága. Fixpont-tételek alkalmazásai.
   [**FPSS1:** 2.2., 2.4. szakaszok] (február 28.)
4. Bertrand- és Cournot-féle oligopóliumok játékelméleti modellezése. Duopólium és monopólium összevetése (lineáris keresleti függvény esetén).
   [**FPSS1:** 2.15., 2.18. példák] (március 6.)
5. Véges játékok kevert bővítése, Nash-egyensúly létezése.
   [**FPSS1:** 23. oldal, 2.3. szakasz] (március 13.)
6. Mátrixjátékok. [**FPSS1:** 4.2. szakasz] (március 20.)
7. Játékok extenzív formában; játékfa. Információs halmazok. Extenzív és normál forma. Nash-egyensúly és részjáték tökéletesség. Példák.
   [**FPSS1:** 3.1., 3.2., 3.3. szakaszok] (március 27..)
8. Kombinatorikus játékok, kupac játékok. [**Veg10**](március 27.)
9. Játékok koalíciós formában. Példák. Kétszemélyes kooperatív játékok. A Nash-féle alkumodell. [**FPSS2:** 1.1. szakasz, 6. fejezet] (április 17.)
10. Elosztási, házasítási problémák és algoritmusok. [**Veg10**](április 24.)[2]

[1] A kurzusra regisztrált végzős hallgatókra tekintettel a május 8-i és 15-i órarendi időpontokat hallgatói beszámolókra tartjuk fenn. Az április 3-i dátum a Szakmai Hétre esik, ez alkalommal csak konzultációs lehetőséget biztosítok. Április 10. és május 1. pedig ünnepnap. A nagy számú elmaradt foglalkozást a megtartott előadások és gyakorlatok (alkalmanként összesen 15 perces) meghosszabbításával (részben) pótoljuk.

[2] Április 24-én a dolgozat miatt felcseréljük az előadást és a gyakorlatot.

Érdemjegyek megszerzésének lehetőségei

Gyakorlati jegy:
A tantárgyi tájékoztató végén felsorolt gyakorlati feladatok, továbbá az ajánlott jegyzetek megjelölt szakaszaihoz a jegyzetekben felsorolt gyakorlati jellegű (konkrét játékra vonatkozó) feladatok, valamint a gyakorlatokon házi feladatként megfogalmazott feladatok gyakorlaton történő bemutatásával szorgalmi pontok szerezhetők. Ezek hozzáadódnak a félév végén megírható (max. 20 pontos) dolgozat pontszámához. A pontszám érdemjegyre váltása a következő oldalon található mintadolgozatban közölt táblázat szerint történik.

Vizsgajegy:

- *Szóbeli vizsga* tehető a fenti tételsor alapján.
- A gyakorlatokon bemutatott (ebben a tájékoztatóban vagy a jegyzetben szereplő illetve előadáson/gyakorlaton megfogalmazott) *elméleti feladatok megoldásai alapján a vizsgajegy megajánlható* (a megoldott feladatok száma vagy nehézsége alapján). Például egy egyszerű ellenpélda vagy egy nagyon rövid bizonyítás 1 pont; egy kissé nehezebb ellenpélda megadása vagy egy viszonylag egyszerű bizonyítás 2 pont; egy összetett vagy nehezebb bizonyítás 3 pont. Elméleti többletpontok is csak a szorgalmi időszakban, a gyakorlatokon bemutatott eredményekkel szerezhetők. A szorgalmi időszak végén 5 szerzett elméleti pont után jeles vizsgajegy kerül megajánlásra.
- A szóbeli vizsga a *vizsga-beszámoló* céljára kiadott feladatok egyikének kidolgozásával és a vizsgaalkalmak egyikén (rendes vizsgajelentkezéssel, vizsgajeggyel értékelve) vagy a szorgalmi időszakban (megajánlott jeggyel értékelve) beszámoló formájában történő bemutatásával is kiváltható.

E-mail: `zboros@science.unideb.hu`

Internet: `http://math.unideb.hu/boros-zoltan/oktatas.html`

Szorg. pont:	Dolg. pont:	**Össz. gyak. pont:**	**Gy. jegy: 1 2 3 4 5**

Játékelmélet – zárthelyi szemináriumi *minta*dolgozat

Időpont: 2020. április 24. péntek 10:00
Terem: M 402 *NÉV*: ....

Az alábbi feladatok összpontszáma 20, megoldási idő 100 perc.
Tankönyv, jegyzet nem használható.
Értékelés (a gyakorlati jegy megállapítása a dolgozat összpontszáma és a szorgalmi pontok összege alapján):

0	—	9	pont ...	1
10	—	11	pont ...	2
12	—	14	pont ...	3
15	—	17	pont ...	4
18	—	$20_{(+)}$	pont ...	5

Feladatok

1. Tekintsük a következő kétszereplős osztozkodási feladatot: A játékos kedvű néhai nagybácsi 5 ingatlant hagy két unokaöccsére illetve az árvaházra a következő feltételekkel: Mindkét unokaöccs a végrendelet kihirdetésekor, egyezkedés nélkül egy-egy borítékban leadhatja a jegyzőnek, hogy 0, 1, 2 vagy 3 ingatlanra tart-e igényt. A jegyző összesíti és lehetőség szerint teljesíti az igényeket. A fenmaradó ingatlanokat az árvaházra íratja. Ha mindkét örökös 3 ingatlant igényel (ami nem teljesíthető), akkor egyik sem kap semmit, hanem az összes ingatlan az árvaházé lesz.
(a) Adjuk meg a két unokaöccs — mint játékos — szempontjából ennek a játéknak a bimátrix reprezentációját!
(b) Keressük meg a szigorúan dominált stratégiákat, és azok kiküszöbölésével redukáljuk a játékot!
(c) Határozzuk meg a játék egyensúlyi pontjait! *(2 + 1 + 1 = 4 pont)*

2. Határozzuk meg az
$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
mátrix által megadott mátrixjáték (vagyis az A mátrix segítségével leírható kétszemélyes, zérusösszegű, véges játék kevert bővítésének) normál formáját és az egyensúlyi stratégia-profilokat! *(4 pont)*

3. Két játékos (**A**ntal és **B**éla) a következő osztó-játékot játssza: Antal megnevezi a 6 valamelyik pozitív egész osztóját (1, 2, 3 vagy 6). Utána Béla majd megint Antal (végül, ha hamarabb véget nem ér a játék, megint Béla) következik. A soron következő játékos is a 6 egyik osztóját kell megjelölje, de ez nem lehet egyetlen korábban megnevezett osztó egész többszöröse (pl. ha elsőként Antal választása 2, utána Béla nem választhatja a 2 vagy a 6 számokat, csak az 1 és a 3 valamelyikét). Ha valaki az 1-est választja, az veszít (ekkor a játék véget ér és a vesztes fizet 5 forintot az ellenfelének).
(a) Rajzoljuk fel a játék extenzív alakját bemutató gráfot!
(b) A játék gráfján szemléltessük a játék értékelését és írjuk le a játékosok racionális stratégiájából levezethető menetét (vagy meneteit)!
$\longrightarrow$ *(2 + 2 = 4 pont)*

4. [Speciális szimmetrikus Bertrand-duopólium]:
Ebben a modellben két termelő van jelen egy termék piacán, akik meghatározhatják a termékért általuk kért árat (mondjuk 0 és 10 EUR között; feltesszük, hogy ebben a zárt intervallumban bármilyen valós szám lehet a termék ára). A terméket mindketten 2 EUR önköltséggel állítják elő. A piaci keresleti függvény

$$D(p) = 30 - 3p \qquad (p \in [0, 10]).$$

Ez adja meg a fogyasztók által az adott termékből vásárolt teljes mennyiséget p áron. Minden fogyasztó attól a termelőtől vásárol, aki alacsonyabb árat jelöl meg, egyenlő árak esetén pedig a kereslet fele-fele arányban oszlik meg a termelők között. Az egyes termelők nyereségét (azaz kifizetését) úgy kapjuk meg, hogy az általuk eladott termék mennyiségét szorozzuk az ár és az önköltség különbségével.
(a) Adjuk meg ennek a konstrukciónak a játékelméleti modelljét (a stratégiahalmazok és a kifizetés-függvények felírásával)!
(b) Határozzuk meg a játékosok legjobbválasz-leképezéseit!
(c) Határozzuk meg a játék Nash-egyensúlypontjait! Adjuk meg az egyensúlyi árhoz tartozó keresletet (az összes eladott termék mennyiségét)!
(d) Összehasonlítás céljából határozzuk meg az ugyanilyen keresleti piacon ugyanilyen önköltséggel termelő monopólium (egyedül jelen lévő termelő) által a nyereség maximalizálása érdekében alkalmazott árat és az eladott termék mennyiségét!
$\longrightarrow$ *(2 + 2 + 2 + 2 = 8 pont)*

Játékelmélet feladatok

A tárgy gyakorlatain többek között az alább felsorolt elméleti és gyakorlati feladatokkal foglalkozunk. Ezek (vagy az órákon feladott illetve az ajánlott jegyzetben található további hasonló feladatok) bemutatásával lehet elméleti illetve gyakorlati szorgalmi pontokat szerezni, a gyakorlati feladatok otthoni megoldásával pedig a dolgozatra felkészülni.

ELMÉLETI FELADATOK

1. Bizonyítsuk be, hogy egy véges játékban a szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölése után megmaradó (tovább nem redukálható) játék (azaz a ki nem zárt stratégiaprofilok halmaza) nem függ az egyes szigorúan dominált stratégiák kizárásának sorrendjétől!

2. [A játék aggregátor függvénye]:
   Legyen $G = (S_1\,,\, S_2\,,\, \ldots\,,\, S_n\,;\, f_1\,,\, f_2\,,\, \ldots\,,\, f_n)$ egy normál formában adott játék és $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$. Definiáljuk a $H : S \times S \to \mathbb{R}$,,aggregátor" függvényt úgy, hogy
   $$\mathbf{x} = (x_1\,,\, x_2\,,\, \ldots\,,\, x_n) \in S \quad \text{és} \quad \mathbf{y} = (y_1\,,\, y_2\,,\, \ldots\,,\, y_n) \in S$$
   esetén legyen
   $$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1\,,\ \,,\, \ldots\,,\, x_{i-1}\,,\, y_i\,,\, x_{i+1}\,,\, \ldots\,,\, x_n).$$
   Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{x}^* \in S$ akkor és csak akkor Nash-féle egyensúlypontja a G játéknak, ha minden $\mathbf{y} \in S$ esetén
   $$H(\mathbf{x}^*,\, \mathbf{y}) \le H(\mathbf{x}^*,\, \mathbf{x}^*)$$
   teljesül!

3. [Szigorúan konkáv függvények maximum-helyei]:
   (a) Legyen $N \in \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{R}^N$ konvex, kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan konkáv függvény. Igazoljuk, hogy f-nek pontosan egy maximum-helye van!
   (b) Adjunk példát olyan $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan konkáv függvényre, amelyiknek nincs maximum-helye!
   (c) Adjunk példát olyan $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ szigorúan konkáv függvényre, amelyiknek nincs maximum-helye!

4. Igazoljuk, hogy ha $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ és $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ korlátos, akkor
   $$\inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} f(x, y) \ge \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} f(x, y)\,.$$

5. Az alábbi feladatok a legjobbválasz-függvény(ek) folytonosságával vannak kapcsolatban, de a megoldáshoz nincs szükség játékelméleti eszközökre.
(a) Legyen $k, m \in \mathbb{N}$, valamint $S \subset \mathbb{R}^k$ és $T \subset \mathbb{R}^m$ nem üres, kompakt halmazok. Tegyük fel, hogy $f\colon S \times T \to \mathbb{R}$ folytonos és minden $t \in T$ esetén létezik olyan $h(t) \in S$, amire bármely $s \in S \setminus \{h(t)\}$ esetén

$$f(h(t), t) > f(s, t) .$$

Igazoljuk, hogy $h\colon T \to S$ folytonos!
(b) Adjunk példát olyan $f\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre, amelyhez minden $t \in [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ esetén létezik olyan $h(t) \in [0,1]$, amire bármely $s \in [0,1] \setminus \{h(t)\}$ esetén

$$f(h(t), t) > f(s, t) ,$$

viszont az

$$s \mapsto f\left(s\,,\,\frac{1}{2}\right) \qquad (s \in [0,1])$$

függvény bármelyik maximuhelyét választva $h\left(\frac{1}{2}\right)$ értékének, $h\colon [0,1] \to [0,1]$ nem folytonos!

6. Legyen $S \subset \mathbb{R}^2$ konvex, zárt, $\mathbf{d} = (d_1\,,\, d_2) \in S$ úgy, hogy

$$S_{\mathbf{d}} = \{\, (x_1\,,\, x_2) \in S \,|\, x_1 \geq d_1\,,\;\; x_2 \geq d_2 \,\}$$

korlátos, valamint létezik $\mathbf{x}^\diamond = (x_1^\diamond\,,\, x_2^\diamond) \in S_{\mathbf{d}}$ úgy, hogy $x_1^\diamond > d_1$ és $x_2^\diamond > d_2$. Legyen továbbá

$$g(x_1\,,\, x_2) = (x_1 - d_1)(x_2 - d_2) \qquad ((x_1\,,\, x_2) \in S_{\mathbf{d}}) .$$

(a) Igazoljuk, hogy ha az $\mathbf{x}\,,\, \mathbf{y} \in S_{\mathbf{d}}$ párokra $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ és $g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{y}) \neq 0$ teljesül, akkor

$$g\left(\frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y})\right) > \frac{1}{2}\left(g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y})\right) .$$

(b) Legyen $\mathbf{y}^* = (y_1^*\,,\, y_2^*)$ a g függvény egyetlen maximumhelye,

$$h(x_1\,,\, x_2) = (y_2^* - d_2)x_1 + (y_1^* - d_1)x_2 \qquad \left((x_1\,,\, x_2) \in \mathbb{R}^2\right) ,$$

és

$$H = \{\, (x_1\,,\, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, h(x_1\,,\, x_2) \leq h(y_1^*\,,\, y_2^*) \,\}.$$

Igazoljuk, hogy $S_{\mathbf{d}} \subset H_{\mathbf{d}}$.

GYAKORLATI FELADATOK

1. Tekintsük a mintadolgozat 1. feladatában leírt osztozkodási feladatnak azt a változatát, amikor a két örökös 100 ingatlanon osztozkodik, és bármelyikük 0-tól 100-ig akármennyi (de egész számú) ingatlant igényelhet! Válaszoljuk meg a hivatkozott feladat (b) és (c) kérdéseit erre az esetre vonatkozóan!

2. Tekintsük a mintadolgozat 1. feladatában leírt osztozkodási feladatnak azt a változatát, amikor három örökös 5 ingatlanon osztozkodik, és bármelyikük 0, 1, 2 vagy 3 ingatlant igényelhet! Válaszoljuk meg a hivatkozott feladat (b) és (c) kérdéseit erre az esetre vonatkozóan!

3. Tekintsük az őrült autós játék következő játékelméleti modelljét: $S_1 = S_2 = [0,1]$, továbbá tetszőleges $j \in \{1,2\}$ és $(s_1\,,\, s_2) \in S_1 \times S_2$ esetén

$$f_j(s_1\,,\, s_2) = \begin{cases} s_j\,, & \text{ha } \; s_1 + s_2 \le 1\,, \\ -1\,, & \text{ha } \; s_1 + s_2 > 1\,. \end{cases}$$

   Határozzuk meg a játék Nash-egyensúlypontjait!

4. Tekintsük az őrült autós játék következő játékelméleti modelljét: $S_1 = S_2 = [0,1]$, továbbá tetszőleges $j \in \{1,2\}$ és $(s_1\,,\, s_2) \in S_1 \times S_2$ esetén

$$f_j(s_1\,,\, s_2) = \begin{cases} s_j\,, & \text{ha } \; s_1 + s_2 < 1\,, \\ -1\,, & \text{ha } \; s_1 + s_2 \ge 1\,. \end{cases}$$

   Határozzuk meg a játék Nash-egyensúlypontjait!

5. *Telephely-probléma*: Tekintsünk néhány [**(a)** két / **(b)** három] fagylaltárust, akik a $[0,1]$ intervallum pontjainak megfeleltetett tengerparti strand-szakasz általuk megválasztott pontjain telepednek meg. A fürdőzők a hozzájuk legközelebb elhelyezkedő árusnál fognak fagylaltot venni, ha pedig több árus egyforma távolságra van tőlük (közelebbi pedig nincs), akkor ezek közül egyforma valószínűséggel választanak (így minden fagylaltos kifizetése tekinthető az általa kiszolgált partszakasz hosszának, illetve ha valamely szakaszt egyszerre több fagylaltos szolgál ki, a szakasz hosszának rájuk eső hányada a kifizetés). Határozzuk meg ennek a játéknak az egyensúlyi stratégiaprofiljait!

6. [Speciális szimmetrikus Bertrand-duopólium]:
   Ebben a modellben két termelő van jelen egy termék piacán, akik meghatározhatják a termékért általuk kért árat (mondjuk 0 és 65 EUR között; feltesszük, hogy ebben a zárt intervallumban bármilyen valós szám lehet a termék ára). A terméket mindketten 5 EUR önköltséggel állítják elő. A piaci keresleti függvény

$$D(p) = 130 - 2p \qquad (p \in [0,65]).$$

Ez adja meg a fogyasztók által az adott termékből vásárolt teljes mennyiséget p áron. Minden fogyasztó attól a termelőtől vásárol, aki alacsonyabb árat jelöl meg, egyenlő árak esetén pedig a kereslet fele-fele arányban oszlik meg a termelők között. Az egyes termelők nyereségét (azaz kifizetését) úgy kapjuk meg, hogy az általuk eladott termék mennyiségét szorozzuk az ár és az önköltség különbségével.

(a) Adjuk meg ennek a konstrukciónak a játékelméleti modelljét (a stratégiahalmazok és a kifizetés-függvények felírásával)!

(b) Határozzuk meg a játékosok legjobbválasz-leképezéseit!

(c) Határozzuk meg a játék Nash-egyensúlypontjait! Adjuk meg az egyensúlyi ár(ak)hoz tartozó keresletet (az összes eladott termék mennyiségét)!

(d) Összehasonlítás céljából határozzuk meg az ugyanilyen keresleti piacon ugyanilyen önköltséggel termelő monopólium (egyedül jelen lévő termelő) által a nyereség maximalizálása érdekében alkalmazott árat és az eladott termék mennyiségét!

7. [Speciális szimmetrikus Cournot-duopólium]:
Legyen $S_1 = S_2 = [0,1]\,,\ S = S_1 \times S_2\,,$

$$p(y) = \begin{cases} \dfrac{7}{4} - \dfrac{1}{2}y\,, & \text{ha } \ 0 \le y \le \dfrac{3}{2}\,, \\[2ex] \dfrac{5}{2} - y\,, & \text{ha } \ \dfrac{3}{2} < y \le 2\,, \end{cases}$$

valamint

$$f_i(x_1\,,\,x_2) = x_i p(x_1 + x_2) - \frac{1}{2}x_i \quad ((x_1\,,\,x_2) \in S) \quad (i = 1,2).$$

(a) Igazoljuk, hogy a

$$t \mapsto f_1(t,x) \ \text{ és } \ t \mapsto f_2(x,t) \quad (t \in [0,1])$$

leképezések minden $x \in [0,1]$ esetén folytonos, szigorúan konkáv függvények!

(b) Mutassuk meg, hogy a

$$D = \left\{ ((x_1\,,\,x_2) \in S \ \middle|\ \frac{1}{2} \le x_i \le 1 \ (i = 1,2),\ x_1 + x_2 = \frac{3}{2} \right\}$$

halmaz minden eleme Nash-féle egyensúly-pontja a $G = (S_1\,,\,S_2\,;\,f_1\,,\,f_2)$ játéknak!

8. Arisztid fogadást vesztett Bendegúzzal szemben, ezért meg kell hívnia egy kávéra. Arisztid leírja egy cetlire egy kávézó nevét, Bendegúz pedig leírja

egy ital nevét az alábbi táblázatból, így döntik el, hogy hova mennek és milyen kévét fognak inni Arisztid költségére. Mindketten ismerik a táblázatban (forintban) feltüntetett árakat, továbbá felteszik, hogy az ár a szolgáltatás minőségével arányos, ezért Bendegúz növelni, Arisztid pedig csökkenteni szeretné az árat. A táblázatban szereplő P mely értéke(i) esetén van egyensúlyi helyzet ebben a véges játékban?

	cukrászda	gyorsétterem	főtéri kávézó
espresso	150	200	220
cappuccino	280	P	260
cafe latte	300	250	270

9. Tekintsük a közkedvelt kő–papír–olló játékot azzal a megállapodással, hogy a vesztes fizet 10 forintot a győztesnek (döntetlen esetén mindenkinek 0 forint a kifizetése)!
(a) Adjuk meg ennek a zéró összegű véges játéknak a mátrix reprezentációját!
(b) Elemezzük, hogy van-e egyensúlyi stratégia-profil ebben a játékban!
(c) Ellenőrizzük, hogy ez a játék szimmetrikus-e!
(d) Határozzuk meg az egyensúlyi stratégiákat (illetve stratégia-profilokat) ennek a játéknak a kevert bővítésében!
(e) Végezzük el a felsorolt vizsgálatokat arra a módosított játékra, amikor a papírt mutató játékos 20 forintot fizet az ollót mutatónak (a többi esetben a kifizetés nem változik, tehát marad ± 10 illetve 0 forint)!

10. Egy televíziós játékban 2 játékos pénz-kupacot gyűjthet a következő módon: a játékvezető letesz egy 1000 forintos bankjegyet az első játékos elé. A játékos dönthet, hogy elteszi-e a pénzt, és akkor véget ér a játék, vagy folytatódhat a pénz-osztás, mely esetben a játékvezető áttolja a pénzt a másik játékos elé, és hozzátesz egy újabb 1000 forintost. Ekkor a másik játékos dönthet arról, hogy elteszi-e a pénzt, vagy folytatódjon a játék. A játékvezető felváltva teszi a pénz-kupacot a játékosok elé és toldja meg minden alkalommal 1000 forinttal egészen addig, amíg az egyik játékos el nem teszi az addig felhalmozott pénzt vagy ki nem gyűlik 100 000 forint, amit az éppen soron következő játékos viheti haza. Elemezzük ennek a játéknak az értékét a kezdő játékos számára és határozzuk meg a racionális kimeneteleit!

11. Egy négytagú rablóbanda osztozkodik a zsákmányon, ami 10 darab aranytallér. A rablók között van egy szigorú sorrend (1., 2., 3. és 4. rabló). Az elosztásra a főnök (az 1. rabló) tesz javaslatot. Ha mindenki elfogadja a javaslatot, az osztozkodás véget ér. Ha valaki kifogással él, kézfeltartással szavaznak a javaslatról. Szavazategyenlőség esetén a főnök szava dönt és tartózkodni nem lehet. Ha a szavazat megerősíti a főnök javaslatát, az osz-

tozkodást aszerint fejezik be. Amennyiben viszont a főnököt leszavazzák, leváltásra kerül és kizárják a bandából (legalábbis az osztozkodás idejére). Ekkor a korábbi 2. rablóból lesz főnök, így ő tehet új javaslatot. Az eljárást addig folytatják, amíg sikerül elosztani a zsákmányt. Mennyi a játék értéke a főnök számára és mi lesz a játék racionális kimenetele?

12. Tekintsük a következő módosított érme-párosítás játékot: Rögzítsük két, egymást követően letett (ill. dobott) érméhez a következő lehetséges kifizetéseket (F=fej, I=írás):

$$(F, F) \mapsto \pm 4\,, \quad (F, I) \mapsto \pm 2\,, \quad (I, F) \mapsto \pm 8\,, \quad (I, I) \mapsto \pm 6\,.$$

A játék kezdetekor a 2. játékos dönt arról, hogy a fenti kifizetések számára azonos ((F,F) ill. (I,I)) vagy különböző ((F,I) ill. (I,F)) érme-oldal párosítások esetén legyenek pozitívak (a többi esetben rá a negatív kifizetés vonatkozik és a játék zéró összegű). Ezután az 1. játékos letesz egy érmét az asztalra (jól látható módon), majd a második játékos feldob egy szabályos érmét, amelyik leesés után véletlenszerűen mutatja valamelyik oldalát. Ezzel a játék véget ér, a játékosok a 2. játékos kezdeti választása és a kialakult érme-párosítás alapján kifizetik egymást (a vesztes a győztest).
(a) Rajzoljuk fel a játék extenzív alakját bemutató gráfot!
(b) A játék gráfján szemléltessük a játék értékelését és írjuk le a játékosok racionális stratégiájából levezethető menetét (vagy meneteit)!

13. Határozzuk meg az

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix által megadott mátrixjáték (vagyis az A mátrix segítségével leírható kétszemélyes, zérusösszegű, véges játék kevert bővítésének) normál formáját és az egyensúlyi stratégia-profilokat!

14. Tekintsük az egyszerű érme-párosítást, amikor két játékos egymást nem látva letesz egy-egy érmét, majd a létrejött párokra az első játékos az alábbi kifizetéseket kaphatja (F=fej, I=írás):

$$(F, F) \mapsto 4\,, \quad (F, I) \mapsto -2\,, \quad (I, F) \mapsto -8\,, \quad (I, I) \mapsto 6\,.$$

A második játékos kifizetése ezzel ellentétes (tehát a játék zéró összegű).
(a) Határozzuk meg a (véges) játék egyensúly-pontjait!
(b) Adjuk meg a játék kevert bővítését!
(c) Határozzuk meg a kevert bővítés egyensúly-pontjait!

15. Mutassuk be az előzőekben elemzett mátrix-játékok fiktív lejátszásának néhány lehetséges lefolyását (a számítások bonyodalmaitól függően 10-15-20 lépésben)!

Adjuk meg a számítások konkrét képleteit, esetleg készítsünk számítógépen futtatható programot!

16. Tekintsük a mintadolgozat 3. feladatában leírt osztó-játék azon módosítását, hogy amikor valamelyik játékos pontosan két lehetőség közül választhatna (melyek egyike a vesztő 1-es), akkor nem ő választ, hanem sorsolás következik, és a soron következő játékos (aki eredetileg döntött volna) p valószínűséggel köteles 1-est mondani, illetve $1 - p$ valószínűséggel mondja be a másik még megengedett osztót. Határozzuk meg a játék értékét és racionális kimeneteleit p függvényében!

17. Van három kupac kavicsunk, amelyekben rendre 2, 3 illetve 4 kavics található. Két játékos felváltva vesz el valamelyik kupacból tetszőleges számú kavicsot (legalább egy kavicsot kell elvenni és egy lépésben csak egy kupacból vehetnek el). Az nyer, aki utoljára tud kavicsot felvenni. Kinek van nyerő stratégiája?

18. Egy alaszkai kocsmában találkozik két aranyásó. Mindketten készülnek hajóra szállni és elutazni, ezért többé nincs szükségük kesztyűre. Jelenleg az egyiküknél három balkezes, a másikuknál három jobbkezes kesztyű található. A kocsmáros egy teljes pár kesztyűért 1 üveg rumot ad, egy darab (fél pár) kesztyűért ennek a negyedét. Határozzuk meg a két aranyásó koalíciójának az értékét!

VIZSGA-BESZÁMOLÓRA MEGOLDHATÓ FELADATOK

Az alábbi (1-2.) feladatokban a, b, c, d rögzített pozitív valós számokat jelölnek.

1. Tekintsük az egyszerű érme-párosítást, amikor két játékos egymást nem látva letesz egy-egy érmét, majd a létrejött párokra az első játékos az alábbi kifizetéseket kaphatja (F =fej, I =írás):

$$(F,F) \mapsto a\,, \quad (F,I) \mapsto -b\,, \quad (I,F) \mapsto -c\,, \quad (I,I) \mapsto d$$

   (a negatív előjel azt jelöli, hogy ő fizet). A második játékos kifizetése ezzel ellentétes (tehát a játék zéró összegű).
   (a) Határozzuk meg a (véges) játék egyensúly-pontjait!
   (b) Adjuk meg a játék kevert bővítését!
   (c) Határozzuk meg a kevert bővítés egyensúly-pontjait!

2. Tekintsük a közkedvelt kő–papír–olló játékot azzal a megállapodással, hogy
   - a követ mutató játékos a forintot fizet a papírt mutatónak;
   - a papírt mutató játékos b forintot fizet az ollót mutatónak;
   - az ollót mutató játékos c forintot fizet a követ mutatónak;
   - amennyiben egyforma jelet mutatnak, mindenkinek 0 forint a kifizetése!

   (a) Adjuk meg ennek a kétszemélyes, zéró összegű véges játéknak a mátrix reprezentációját!
   (b) Elemezzük, hogy van-e egyensúlyi stratégia-profil ebben a játékban!
   (c) Ellenőrizzük, hogy ez a játék szimmetrikus-e!
   (d) Határozzuk meg az egyensúlyi stratégiákat (illetve stratégia-profilokat) ennek a játéknak a kevert bővítésében!

3. Bizonyítsuk be, hogy lineáris piaci keresleti függvény valamint azonos költséggel és azonos kapacitás-korlátokkal rendelkező termelők esetén a Cournot-féle oligopóliumnak csak szimmetrikus egyensúlyi helyzete van! Határozzuk meg ezt az egyensúlyi helyzetet és elemezzük ennek határeseteit (amikor 1 termelő van, illetve, amikor a termelők száma végtelenhez tart)!

4. Elemezzük a telephely-problémát 3 fagylaltárus esetén!

5. Adjuk meg a háromszemélyes szimmetrikus osztozkodási feladat általános megoldását!

Fejenként egy-egy feladatot kell megoldani. Egy feladatra csak egy hallgatótól fogadok el megoldást. A megoldásokat névvel ellátva írásban kell beadni. Teljes és helyes megoldások esetén megbeszélendő időpontban szóbeli beszámolóra kerül sor. A beszámolón kérdésekre kell válaszolni a megoldás indoklása valamint annak elméleti megalapozása tárgyában.

Ajánlott könyvek, jegyzetek:

[Bor85] Kim C. Border: *Fixed point theorems with application to economics and game theory*, Cambridge University Press, Cambridge UK, 1985.

[Con76] J. H. Conway: *On numbers and games*, Academic Press, 1976.

[Csi80] Csirmaz László: *Játékok és Grundy-számaik*, KöMaL, 1980. december.

[FPSS1] Forgó Ferenc – Pintér Miklós – Simonovits András – Solymosi Tamás: *Játékelmélet*, 2005 (elektronikus jegyzet):

`http://docplayer.hu/10054945-Jatekelmelet-1-forgo-ferenc-pinter-miklos-simonovits-andras-solymosi-tamas-elektronikus-jegyzet.html`

[FPSS2] Forgó Ferenc – Pintér Miklós – Simonovits András – Solymosi Tamás: *Kooperatív játékelmélet*, 2006 (elektronikus jegyzet):

`http://docplayer.hu/8204397-Kooperativ-jatekelmelet.html`

[Gib05] R. Gibbons: *Bevezetés a játékelméletbe*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.

[NM44] J. von Neumann, O. Morgenstern: *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1944.

[Neu65] Neumann J.: *Válogatott előadások és tanulmányok*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1965.

[Osb03] Martin J. Osborne: *An Introduction to Game Theory*, Oxford University Press, 2003.

[SzF74] Szép J., Forgó F.: *Bevezetés a játékelméletbe*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1974.

[SzM86] Szidarovszky F., Molnár S.: *Játékelmélet műszaki alkalmazásokkal*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.

[Veg10] Végh László: *Alkalmazott modul – játékelmélet jegyzet*, ELTE, Budapest, 2010 (elektronikus jegyzet):

`http://web.cs.elte.hu/~veghal/gyak/jatekelm-2010dec10.pdf`

[Wil72] J. D. Williams: *Játékelmélet*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972.