Kalkulus (Informatika BSc: MI) tantárgyi tájékoztató

Tárgykód(ok): INBMM0104 E/G *Félév*: 2020/2021-I. *Előadó*: Boros Zoltán
Óraszám: 2 + 2 (előadás + tantermi gyakorlat) *Kredit*: 6 (kötelező) *Előfeltétele*: —

Az előadások részletes tematikája:

Az előadás **dátuma** (2020) *időpont*: kedd 12.00 – 13.40, *helyszín*: on-line	Az előadás tartalmi vázlata
szeptember 8.	*Egyetemi Tanévnyitó miatt elmarad.*
szeptember 15.	Valós számok; természetes, egész és racionális számok. Teljes indukció. Hatványozás. Alulról/felülről korlátos halmaz, pontos korlát. Abszolút érték, intervallumok, egész rész.
szeptember 22.	Valós számsorozatok. Konvergencia, korlátosság, monotonitás. Műveleti szabályok. Rendezés, rendőr-tétel. Nevezetes sorozatok.
szeptember 29.	Valós számsorok. Hányados-kritérium. Hatványsorok és néhány elemi függvény.
október 6.	Valós függvények folytonossága. Átviteli elv, műveleti szabályok. Zárt intervallumon folytonos függvények.
október 13.	Valós függvények határértékei. Átviteli elv. Határérték és folytonosság. Monoton függvények.
október 20.	Valós függvények differenciálhatósága. Példák, műveleti szabályok. Elemi függvények és differenciálhányadosaik.
október 27.	*Nincs előadás* (Szakmai Napok: október 26–30.).
november 3.	A lokális szélsőérték szükséges feltétele. Középérték-tételek, differenciálható függvények monotonitása. L'Hôpital-szabály. Konvexitás, inflexiós pontok. Függvény-vizsgálat.
november 10.	Primitív függvény, határozatlan integrál, alapintegrálok, az integrál linearitása és alkalmazásai.
november 17.	Integrálási szabályok (parciális és helyettesítéses integrálás) és módszerek (az integrálási szabályok tipikus alkalmazásai, a helyettesítés speciális esetei), racionális törtek integrálása, racionalizáló helyettesítések.
november 24.	A Riemann-integrál fogalma. Közbeeső integrálközelítő összegek. Az integrál kiszámítása: Newton–Leibniz-formula.
december 1.	Riemann-kritérium; a Riemann-integrálhatóság elegendő feltételei (folytonosság, monotonitás). Műveletek Riemann-integrálható függvényekkel (folytonos függvény módosítása egy [vég]pontban, intervallum-additivitás, linearitás).
december 8.	Az integrál, mint a felső határ függvénye. Integrálási szabályok Riemann-integrálra. Improprius integrálok értelmezése, létezése. Az integrál alkalmazásai.

A gyakorlatok órarendi időpontjai:

A gyakorlatvezető neve:	Nap	Óra	Tanterem
Boros Zoltán	hétfő	10–12	IK-102
Pénzes Evelin	hétfő	12–14	IK-F09
Pénzes Evelin	hétfő	14–16	IK-F02
Grünwald Richárd	szerda	12–14	IK-F08
Grünwald Richárd	szerda	14–16	IK-102
Molnár Gábor Marcell	szerda	12–14	IK-107
Molnár Gábor Marcell	szerda	14–16	IK-TEOKJ fszt. 108. (IV. ea.)
Vértessy Balázs	szerda	16–18	IK-F0

A táblázatban feltüntetett kétórás intervallum tartalmazza a 2-szer 50 perces gyakorlati óra és a 2-szer 10 perces szünet időtartamát. A gyakorlatvezető határozza meg (a gyakorlatra járó hallgatókkal szóban egyeztetve) a tényleges időbeosztást (például lehet — az előadás mintájára — szünet nélkül 100 perces gyakorlatot is tartani).

A gyakorlatok tematikája az előadást követi, de attól ütemezésében a gyakorlatvezető belátása szerint eltérhet. Célszerű a mellékletben közzétett gyakorló feladatsorok használata otthoni felkészülésre és ugyanezen feladatsor feladatainak (vagy az ajánlott példatárakban található további hasonló feladatok) megoldása a gyakorlatokon.

Alapvető feladat-típusok:

- (lineáris, másodfokú, törtet tartalmazó, gyökös) egyenlőtlenségek megoldása;
- sorozatok konvergenciájának vizsgálata, a határérték meghatározása;
- sorok konvergenciájának vizsgálata; mértani (és egyéb speciális) sorok (illetve ilyenek lineáris kombinációi) összegének meghatározása;
- függvények határértékének meghatározása algebrai átalakítások segítségével;
- elemi függvények deriválása; a műveleti szabályok alkalmazása;
- függvényvizsgálat (értelmezési tartomány, „paritás”, periódus, zérushelyek, folytonosság, szakadási helyek, határértékek az értelmezési tartomány határpontjaiban illetve +/- végtelenben, differenciálhatóság, első és második derivált, monoton szakaszok, [lokális] szélsőérték-helyek, konvex/konkáv szakaszok, inflexiós helyek, vázlatos ábra, értékkészlet);
- határozatlan és határozott integrálok kiszámítása (alapintegrálok, linearitás alkalmazása; a parciális és a helyettesítéses integrálás tipikus esetei; racionális törtfüggvények integrálása, egyszerűbb racionalizáló helyettesítések);
- terület-számítás integrálással, az integrál egyéb alkalmazásai;
- improprius-integrálok meghatározása definíció alapján.

A gyakorlat számonkérése és teljesítése:

A gyakorlat teljesítését a gyakorlatvezető aláírással igazolja. **A gyakorlati aláírás feltétele a gyakorlatokon való részvétel és a gyakorlati számonkérés során elért legalább 50 %-os eredmény.** A szorgalmi időszakban két zárthelyi gyakorlati dolgozatot kell írni. A felkészülést a gyakorló feladatsorok mellett a két mellékelt gyakorlati mintadolgozat is elősegíti. A dolgozatok feladatainak helyes megoldásával dolgozatonként maximum 30 pont, a gyakorlat során tehát összesen maximum **60** pont szerezhető. A gyakorlatokon aktív hallgatók szorgalmi pontokat szerezhetnek; egy-egy zárthelyi dolgozat előtt legfeljebb 10 pontot. Az így kapott szorgalmi pontszám hozzáadódik a soron következő dolgozatban elért pontszámhoz (de abban az esetben, ha ez az összeg meghaladná a 30 pontot, csak 30 pont vehető figyelembe az összeg helyett; tehát a szorgalmi pontok figyelembe vételével is összesen legfeljebb 60 gyakorlati pont szerezhető). Ha a hallgató összesített gyakorlati pontszáma (a továbbiakban: GyP) eléri vagy meghaladja a **30** pontot, a gyakorlatvezető aláírja a gyakorlat teljesítését. Egyéni tanrend engedélyezése esetén a hallgató nem köteles gyakorlatra járni, de a dolgozatok megírása (az eredeti vagy a pótlásra kijelölt időpontban) és legalább 30 gyakorlati pont elérése ilyen esetben is kötelező.

Dolgozatok ütemezése:

- **november 2 / 4**. (hétfő/szerda): *1. gyakorlati dolgozat* a gyakorlat keretében (a gyakorlat helyén és időpontjában).
- **december 7 / 9**. (hétfő/szerda): *2. gyakorlati dolgozat* a gyakorlat keretében (a gyakorlat helyén és időpontjában).
- december 17. (csütörtök) 10:00–12:00, (később bejelentendő helyen): javító ill. pót-dolgozat (az 1. vagy 2. dolgozat újraírható).

Amennyiben egy hallgató javító dolgozatot ad be, a dolgozat eredeti pontszáma törlődik, és helyette a javító dolgozat pontszáma veendő figyelembe (akkor is, ha az kisebb).

A gyakorlati pontszám teljes mértékben beszámításra kerül a kurzuson szerzett vizsgajegy megállapításakor.

A gyakorlatokon és a vizsgadolgozatok alkalmával a Tanulmányi és Vizsgaszabályzat követelményein túlmenően a járványhelyzetre vonatkozó aktuális szabályok betartása is kötelező.

A vizsga lebonyolítása és értékelése:

A szorgalmi időszakban gyakorlati aláírást szerző hallgatók az általuk — az előadó által meghirdetett időpontok közül — választott vizsganapon írásbeli vizsgát tehetnek. Aki 2020. december 17-én teszi le a vizsgáját, azt úgy kell tekinteni, hogy nem kíván élni a december 17-i gyakorlati dolgozat újraírás lehetőségével.

A vizsga sikeres teljesítéséhez szükséges a beugró részben a maximális 10 pontból legalább 6 pont megszerzése. A vizsgadolgozatban — túlnyomórészt elméleti kérdésekből, kis mértékben pedig azokhoz kapcsolódó konkrét példákra vonatkozó feladatok megoldásával — összesen 40 pont szerezhető (illetve bizonyítások leírásáért ehhez többletpontok is adhatók). Amennyiben a vizsgázó sikeresen teljesíti a beugró részt, a féléves összteljesítményét a gyakorlatokon szerzett (max. 60) pontszámának és a vizsgadolgozat (max. 40 + többlet) pontszámának összege határozza meg az alábbi táblázatok alapján:

Megnevezés (leírás)	Szerezhető pontszám
Beugró (alapvető definíciók illetve alaptételek) (BP).	min. 6 (!), max. 10
További elméleti kérdések (definíciók, tételek); példák (TEK). A tételek bizonyítása nem elvárás, de egyes tételek bizonyításának a leírásával további többletpontok szerezhetők.	max. 30 (+ bizonyításokért többletpontok)
Vizsgadolgozat összpontszáma (VDP = BP + TEK)	***max. 40*** (+ bizonyításokért többletpontok)
+ Gyakorlati eredményért kapott pontszám beszámítása (GyP)	max. +60
Összesített vizsga-pontszám (ÖVP = GyP + VDP)	max. **100** (+ biz.)

Az így kialakított összesített vizsga-pontszám alapján a következő táblázat szerint kerül beírásra a vizsgajegy (az egy sorba írt feltételek között „és" kapcsolat értendő):

Beugró pontszám (BP):	Összesített vizsga pontszám (ÖVP):	Vizsgajegy
BP < 6	—	elégtelen (1)
6 ≤ BP	36 ≤ ÖVP ≤ 44	elégtelen (1)
6 ≤ BP	45 ≤ ÖVP ≤ 54	elégséges (2)
6 ≤ BP	55 ≤ ÖVP ≤ 69	közepes (3)
6 ≤ BP	70 ≤ ÖVP ≤ 84	jó (4)
6 ≤ BP	85 ≤ ÖVP ≤ 100 (+ többlet)	jeles (5)

A vizsga rendjére vonatkozóan a Tanulmányi és Vizsgaszabályzat rendelkezései az irányadóak. A hallgatók csak fényképes igazolvánnyal vehetnek részt a vizsgán. A vizsga során tankönyv, jegyzet, telekommunikációs eszköz vagy adatolvasásra alkalmas berendezés nem használható.

A hallgató saját vizsgadolgozatának értékelését a vizsganapot követő munkanapon 18:00-tól 19:30 óráig megtekintheti a Matematikai Épület M 326 irodájában. Értékelés után a vizsgadolgozatok pontszámai és az érdemjegyek rögzítésre kerülnek a Tanulmányi Rendszerben.

A vizsgadolgozat beugró kérdései (az aláhúzott kérdések a legjellemzőbbek)

Alapvető definíciók: abszolút érték; gyökvonás, pozitív valós szám egész illetve racionális kitevős hatványai; sorozat monotonitása, konvergenciája, határértéke; sor részletösszegei, konvergenciája; függvény abszolút és helyi maximuma (minimuma); (szigorúan) monoton növekvő (csökkenő) függvény; függvény (pontbeli) folytonossága; függvény határértéke; valós függvények differenciálhatósága, differenciálhányadosa (deriváltja); primitív függvény; korlátos függvény adott beosztáshoz tartozó alsó/felső integrálközelítő összege, alsó/felső Darboux-integrálja, Riemann-integrálhatósága (és integrálja).

Alaptételek: az abszolút érték alapvető tulajdonságai; sorozatok és műveletek; rendőr-tétel; a sor konvergenciájának szükséges feltétele; a differenciálszámítás műveleti szabályai; az összetett függvény differenciálhatósága, deriváltja; a lokális minimum (maximum) szükséges feltétele; a monotonitás (szükséges és) elegendő feltétele(i) differenciálható függvényekre; Newton–Leibniz-formula.

A vizsgadolgozatban feltehető további elméleti kérdések (az előbbiek, valamint)

Definíciók: természetes, egész és racionális számok; valós szám egész része; intervallumok; sorozat fogalma, korlátossága; abszolút (illetve feltételesen) konvergens sor; valós számhalmaz torlódási pontja; függvény korlátossága, egyoldali folytonossága, egyoldali határértéke; egyenletes folytonosság; a végtelen, mint határérték; szakadási helyek típusai; hatványsor fogalma, konvergencia-sugara; páros, páratlan, periodikus függvény; nevezetes elemi függvények (exp, cos, sin, cosh, sinh definíciója hatványsor összegeként, a természetes alapú logaritmus); további elemi függvények ($\exp_a$, $\log_a$, tg, ctg, arcsin, arctg, arsh); konvex (konkáv) függvény; inflexiós hely; beosztás finomítása, szelekciója, közbeeső integrálközelítő összeg; improprius-integrálok.

Tételek: n-edik gyök létezése; korlátos monoton sorozat konvergenciája; sorozatok és rendezés; nevezetes sorozatok; abszolút konvergens sor konvergenciája; konvergencia-kritériumok sorokra; Cauchy–Hadamard-tétel; az exp, cosh, sinh, cos és sin függvények tulajdonságai (azonosságok, nevezetes határértékek, monoton szakaszok); átviteli elv (függvény folytonosságára, határértékére); folytonosság (illetve határérték) és műveletek, az összetett függvény folytonossága; zárt intervallumon folytonos függvény tulajdonságai; a határérték és a folytonosság kapcsolata; monoton függvények tulajdonságai (az inverz-függvény monotonitása, folytonossága, egyoldali határértékek); differenciálhatóság és folytonosság kapcsolata; az inverz függvény differenciálhatósága, deriváltja; hatványsorok differenciálhatósága; középérték-tételek (Cauchy-, Lagrange-, Rolle-); a konvexitás (konkavitás) elegendő feltétele (kétszer) differenciálható függvényekre; L'Hospital-szabály; adott függvény primitív függvényeinek kapcsolata intervallumon; a Riemann-integrálhatóság Riemann-kritériuma és elegendő feltételei; linearitás és intervallum-additivitás Riemann-integrálra; az integrálfüggvény (mint a felső határ függvénye) differenciálhatósága; a parciális integrálás tétele Riemann-integrálra, a helyettesítéses integrálás tétele Riemann-integrálra; az integrál, mint terület; forgástest térfogata és felszíne.

A felkészüléshez ajánlott irodalom

- Bárczy Barnabás: *Differenciálszámítás* — Példatár, Műszaki Könyvkiadó, 1968 (7. kiadás: 1994).
- Gselmann Eszter: *Kalkulus* (előadást követő jegyzet), DE TTK Matematikai Intézet, Debrecen, 2019.
- Gselmann Eszter: *Kalkulus példatár*, DE TTK Matematikai Intézet, Debrecen, 2018.
- B. P. Gyemidovics: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény*, Tankönyvkiadó, 1974.
- Lajkó Károly: *Kalkulus I.* (egyetemi jegyzet), mobiDIÁK könyvtár, DE Matematikai és Informatikai Intézet, Debrecen, 2003.
- Lajkó Károly, Kalkulus II. (egyetemi jegyzet, 1–2. kötet), DE Matematikai és Informatikai Intézet, Debrecen, 2002.
- Lajkó Károly: *Kalkulus I. példatár,* mobiDIÁK könyvtár, DE Matematikai és Informatikai Intézet, Debrecen, 2003.
- Lajkó Károly, Kalkulus II. példatár (1–2. kötet), DE Matematikai és Informatikai Intézet, Debrecen, 2002.
- Rimán János: *Matematikai analízis I.*, EKTF, Líceum Kiadó, Eger, 1998.
- Rimán János: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény I.-II.*, EKTF, Líceum Kiadó, Eger, 1998.
- W. Rudin: *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

Elérhetőségek

Az előadó *e-mail címe*: zboros@science.unideb.hu

— *honlapja*: http://math.unideb.hu/boros-zoltan/oktatas.html

— *irodája*: Matematikai Épület M 326

— *fogadóórái*: hétfő 14–15, kedd 16–17

A tájékoztató mellékletei

- 5 gyakorló feladatsor: Kalk-p1.pdf, Kalk-p2.pdf, Kalk-p3.pdf, Kalk-p4.pdf, Kalk-p5.pdf;
- 2 gyakorlati dolgozat minta: Kalk-zh1m.pdf, Kalk-zh2m.pdf;
- 1 vizsgadolgozat minta: Kalk-vd-m.pdf.

Debrecen, 2020. szeptember 7.

Boros Zoltán