A centrálaxonometriáról az A. 456 feladat kapcsán

Szilasi Zoltán

0. Bevezetés

Síkgeometriai feladatok megoldásánál gyakran hasznos fogás a tekintett ábrát valamely térbeli alakzat vetületeként felfogni; erre sok érdekes példa található a [9] szakköri füzetben valamint a jóval újabb [4] dolgozatban. E módszer ismeretében a KÖMAL-ban kitűzött A. 456-os feladat kapcsán természetes módon vetődött fel a kérdés, hogy nem kezelhető-e egyszerűbben ez a probléma is azáltal, ha a vizsgálandó konfigurációt a térből történő vetítéssel származtatjuk. Kiderült, hogy az ötlet működőképes, azzal a finomítással, hogy előbb az euklideszi teret *projektív tér*ré bővítjük, s azt követően ún. *centrálaxonometriá*t alkalmazunk, amely az euklideszi tér axonometrikus ábrázolásának projektív változata.

Dolgozatunkban először röviden áttekintjük az euklideszi tér axonometrikus ábrázolását, majd vázoljuk az euklideszi tér projektív bővítését és ennek centrálaxonometrikus ábrázolását. Ezek után rátérünk a kérdéses feladat „centrálaxonometrikus megoldására”, amely érzésünk szerint azt is megmutatja, hogy a bizonyítandó állítás „miért igaz”.

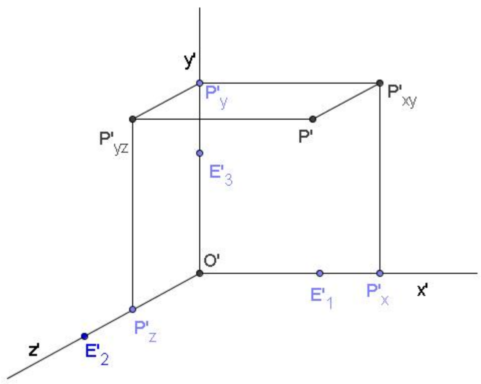
1. Az axonometrikus ábrázolásról

Tekintsünk a háromdimenziós euklideszi térben egy $(O; E_1, E_2, E_3)$ derékszögű koordinátarendszert, ahol O az origó, az $\overleftrightarrow{OE_1}$, $\overleftrightarrow{OE_2}$ és $\overleftrightarrow{OE_3}$ egyenesek rendre az $x-$, az $y-$ és a $z - tengely$, és az E_1, E_2, E_3 pontok, az ún. *egységpontok*, az origótól 1 távolságra vannak. Axonometrikus ábrázolásnál az origó O' és az egységpontok E_1', E_2', E_3' képét egy adott síkban tetszőlegesen rögzítjük, természetesen azzal a megszorítással, hogy a tengelyek képei különböző egyeneseknek adódjanak. Ezután az $\overleftrightarrow{OE_i}$ tengely ($i \in \{1, 2, 3\}$) valamely P_i pontjának P_i' képét azzal definiáljuk, hogy az $\overleftrightarrow{O'E_i'}$ egyenes

$$\frac{d(O, P_i)}{d(E_i, P_i)} = \frac{d(O', P_i')}{d(E_i', P_i')}$$

feltételeknek eleget tevő pontja legyen, ahol d az euklideszi tér szokásos távolságfüggvénye.

A következő lépés a koordinátasíkokra illeszkedő pontok képének értelmezése. Ha P mondjuk az xy-koordinátasík pontja, akkor tekintjük ennek az x-, ill. az y-tengelyre eső P_x, ill. P_y merőleges vetületét, és a leírt módon meghatározzuk ezek P_x', ill. P_y' képét. A P pont P' képpontját a P_x' ponton át az y-tengely



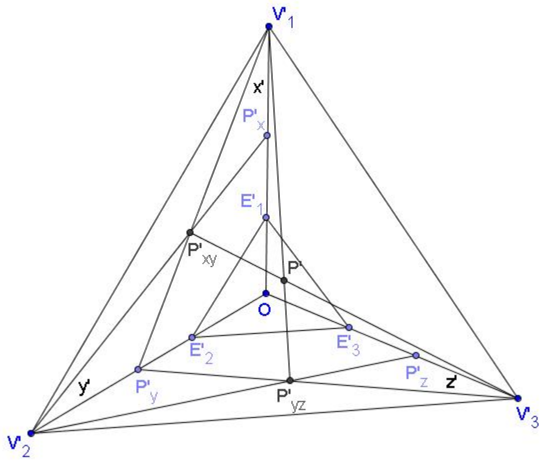
képével és a P'_y ponton át az x tengely képével párhuzamosan húzott egyenesek metszéspontjaként definiálhatjuk.
Végül a tér egy tetszőleges P pontjának P' képét a következőképpen készítjük el. Merőlegesen vetítjük a pontot mondjuk az xy és yz koordinátasíkra; legyenek a vetületek képei P'_{xy} és P'_{yz}. A P'_{xy} ponton át a z-tengely képével, a P'_{yz} ponton át pedig az x-tengely képével húzon párhuzamost, P' ezek metszéspontja. Egyszerűen átgondolható, hogy a P' pont nem függ attól, hogy melyik két koordinátasíkot választottuk ki. Megmutatható, hogy a tér tetszőleges pontját egyértelműen meghatározza a pont így értelmezett *axonometrikus kép*e, valamint valamelyik koordinátasíkra eső merőleges vetületének axonometrikus képe. *Pohlke tétele* szerint egy térbeli alakzat axonometrikus képe hasonló az alakzat valamely síkra vonatkozó párhuzamos vetületéhez. Ebből következik, hogy az axonometria *egyenestartó* abban a tágabb értelemben, hogy egyenes axonometrikus képe egyenes vagy pont. Az axonometriával kapcsolatos részleteket illetően a [2] munkára utalunk.

2. Projektív bővítés és centrálaxonometria

Kiindulva a háromdimenziós euklideszi térből, a tér pontjainak és egyeneseinek halmazát bővítsük további pontokkal - melyeket *végtelen távoli pont*oknak, illetve *egyenes*eknek fogunk nevezni - az alábbi módon. A tér minden egyenesére egy és csak egy végtelen távoli pont illeszkedjen, két egyenes végtelen távoli pontja akkor és csak akkor egyezzen meg, ha a két egyenes párhuzamos. Minden sík végtelen távoli pontjai illeszkedjenek egy egyenesre, amit a sík *végtelen távoli egyenes*ének mondunk. Az ilyen módon kibővített euklideszi teret nevezzük az euklideszi tér *projektív bővítés*ének, vagy röviden, *projektív tér*nek. A projektív tér síkjait *projektív sík*oknak hívjuk.
A projektív tér kölcsönösen egyértelmű (azaz bijektív) és egyenestartó transzformációit *kollineáció*knak nevezzük. Megmutatható, hogy a projektív térben a körök, ellipszisek, parabolák és hiperbolák *projektíven ekvivalensek*, azaz kollineációval bármely kettő átvihető egymásba. Így ezeket együttesen *kúpszeletek*nek vagy *nemelfajuló másodrendű görbék*nek is mondjuk. Kollineációnál tehát tetszőleges kúpszelet képe ismét kúpszelet.
A projektív térben a kúpszeletek egyes fajtáit végtelen távoli pontjaik száma különbözteti meg egymástól. A köröknek és ellipsziseknek nincsen végtelen

távoli pontjuk, a paraboláknak egy végtelen távoli pontja van (amely a parabola tengelyével párhuzamos egyenesek közös végtelen távoli pontja), a hiperboláknak pedig két végtelen távoli pontja van (amelyek a hiperbola aszimptotáival párhuzamos egyenesek végtelen távoli pontjai).
A kúpszeletekről részletesebben a [5] könyvben olvashatunk. A projektív síkokkal kapcsolatban a [8], az ott értelmezett geometriai transzformációkkal kapcsolatban a [7] könyvet ajánljuk. A projektív síkok precíz, axiomatikus, de egyben élvezetes tárgyalását illetően lásd az [1] munkát.

A projektív teret egy projektív síkon az axonometria projektív általánosításának, a *centrálaxonometriá*nak az alkalmazásával fogjuk ábrázolni. A térben ismét egy derékszögű koordinátarendszert tekintve, a síkon megadjuk a koordinátarendszer O origójának, a tengelyek E_1,E_2,E_3 egységpontjainak, és a tengelyek V_1,V_2,V_3 végtelen távoli pontjainak - ismét vesszővel jelölt - képeit. Mivel az $\overleftrightarrow{E_1V_1}$, $\overleftrightarrow{E_2V_2}$ és $\overleftrightarrow{E_3V_3}$ egyenesek mindegyikére illeszkedik az origó, ezért az egyes egyenesek képeire is illeszkedik az origó. Tehát az $E_1'E_2'E_3'$ és $V_1'V_2'V_3'$ háromszögek az *O' pontra nézve perspektívek*. Az ilyen tulajdonságú háromszögek *tengelyre nézve* is *perspektívek* Desargues-tétele alapján (lásd Kiss György KÖMAL-beli dolgozatát [3]), azaz az $\overleftrightarrow{E_1'E_2'}$ és $\overleftrightarrow{V_1'V_2'}$, $\overleftrightarrow{E_1'E_3'}$ és $\overleftrightarrow{V_1'V_3'}$ valamint $\overleftrightarrow{E_2'E_3'}$ és $\overleftrightarrow{V_2'V_3'}$ egyenesek metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek. Azt mondjuk erre tekintettel, hogy $E_1'E_2'E_3'$ és $V_1'V_2'V_3'$ egy *Desargues-féle háromszögpár*. Minden Desargues-féle háromszögpár egyértelműen meghatároz egy centrálaxonometrikus leképezést.



A centrálaxonometriában a kijelölt koordinátarendszer valamely tengelyére illeszkedő P_i $(i \in \{1,2,3\})$ pont $P_i' \in \overleftrightarrow{O'E_i'}$ képét azáltal adjuk meg, hogy előírjük a

$$\frac{d(O,V_i)}{d(E_iV_i)} : \frac{d(O,P_i)}{d(E_iP_i)} = \frac{d(O',V_i')}{d(E_i'V_i')} : \frac{d(O',P_i')}{d(E_i'P_i')}$$

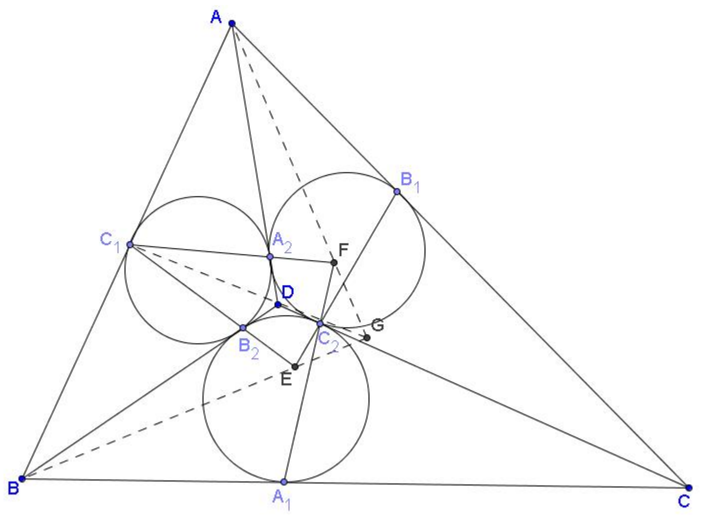
egyenlőség teljesülését. A fenti egyenlőség az ún. *kettősviszony* megőrzését biztosítja; ez a tulajdonság jellemzi a projektív tér kollineációit. Valamely koordinátasík - mondjuk az xy - valamely P pontja képének meghatározásához most

is először tekintjük a pont koordinátatengelyekre eső P_x és P_y merőleges vetületeit, ezek centrálaxonometrikus képeit meghatározva kapjuk a P'_x és P'_y pontokat. A $\overleftrightarrow{P'_xV'_2}$ és $\overleftrightarrow{P'_yV'_1}$ egyenesek metszéspontja adja a P' képpontot. Tetszőleges további P pont képét is az axonometriánál alkalmazott eljárás mintájára definiáljuk. A P pont xy és yz koordinátasíkokra eső merőleges vetületeit ismét P_{xy}-al és P_{yz}-vel jelölve, a fenti módon meghatározzuk a P'_{xy} és P'_{yz} pontokat; a P pont P' *centrálaxonometrikus képe* a $\overleftrightarrow{P'_{xy}V'_3}$ és $\overleftrightarrow{P'_{yz}V'_1}$ egyenesek metszéspontja. Észrevehetjük, hogy most a párhuzamos egyenesek szerepét egymást a végtelen távoli pontokban metsző egyenesek veszik át.
Az axonometriához hasonlóan a tér tetszőleges pontját egyértelműen meghatározza a fentiek alapján szerkesztett centrálaxonometrikus képe és valamely koordinátasíkra eső vetületének centrálaxonometrikus képe. A centrálaxonometria szintén egyenestartó leképezés a korábbi értelemben, tehát egyenes képe egyenes vagy pont. Érdekes eltérés, hogy Pohlke tétele nem általánosítható centrálaxonometriára. A Pohlke-tétel szerepét a *Szabó-Stachel-Vogel tétel* [6] veszi át, eszerint egy alakzat centrálaxonometrikus képe pontosan akkor hasonló az alakzat valamely síkra eső centrális vetületéhez, ha

$$\left(\frac{d(O',E'_1}{d(E'_1V'_1)}\right)^2 : \left(\frac{d(O',E'_2}{d(E'_2V'_2)}\right)^2 : \left(\frac{d(O',E'_3}{d(E'_3V'_3)}\right)^2 = tg(V'_2V'_1V_3\angle) : tg(V'_1V'_2V_3\angle) : tg(V'_1V'_3V_2\angle)$$

teljesül.

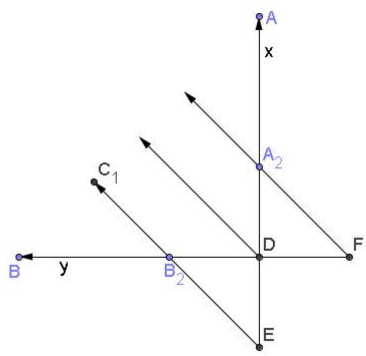
3. Az A. 456. feladat megoldása



Adott az ABC háromszög és belsejében a D pont úgy, hogy az ABD, BCD, és CAD háromszögekbe írt körök páronként érintik egymást. Jelöljük az érintési pontokat a BC, CA, AB, AD, BD, CD szakaszokon rendre A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2-vel. Legyen E az $\overleftrightarrow{B_1C_2}$ és $\overleftrightarrow{B_2C_1}$ egyenesek, F pedig az $\overleftrightarrow{A_1C_2}$ és $\overleftrightarrow{A_2C_1}$ egyenesek metszéspontja. Mutassuk meg, hogy az $\overleftrightarrow{AF}$, $\overleftrightarrow{BE}$ és $\overleftrightarrow{C_1D}$ egyenesek *egy ponton mennek át.*

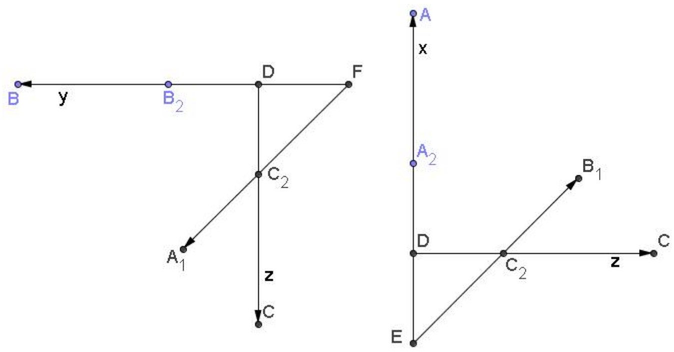
Mivel tetszőleges Desargues-féle háromszögpár meghatároz egy centrálaxonometrikus leképezést, tekinthetjük az adott ABC háromszög csúcsait egy centrálaxonometrikus leképezésben a végtelen távoli pontok képeinek, az $A_2B_2C_2$ háromszög csúcsait pedig az egységpontok képeinek. Ekkor D az origó képe. Legyen $\overleftrightarrow{DA}$ az x tengely, $\overleftrightarrow{DB}$ az y tengely, $\overleftrightarrow{DC}$ pedig a z tengely képe. Ebben az esetben az ABD háromszög beírt köre az xy sík egy parabolájának centrálaxonometrikus képe, ugyanis a beírt kör térbeli őseképe olyan kúpszelet, amely érinti az xy sík végtelen távoli egyenesét. Ez a parabola az x és y tengelyeket egyaránt a tengelyek egységpontjaiban érinti, így tengelye az x és y tengelyek szögfelezője. Ez szimmetria okokból látható, illetve projektív geometriai eszközökkel a Pascal-tétel segítségével igazolható. (Ezen adatokból a tengely meghatározásának általános módszerét illetően lásd pl. [8].) Tehát C_1 az xy síkban az y-tengellyel 135°-os szöget bezáró irányú egyenesek végtelen távoli pontjának képe. Hasonlóan látható, hogy A_1 az yz síkban az y-tengellyel 45°-os szöget bezáró, B_1 az xz síkban a z-tengellyel 45°-os szöget bezáró egyenesek végtelen távoli pontjának képe. Az alábbi ábrákon a térbeli őskép egyes koordinátasíkjait szemléltettük.

Tehát a $\overleftrightarrow{B_1C_2}$ egyenes az xz síkban a z tengely egységpontjára illeszkedő, azzal



45°-os szöget bezáró egyenes képe, a $\overleftrightarrow{B_2C_1}$ egyenes az xy síkban az y tengely egységponjára illeszkedő, azzal 45°-os szöget bezáró egyenes képe. Mindkét egyenes áthalad az x tengely -1 koordinátájú pontján, így E ennek a pontnak a centrálaxonometrikus képe (következésképpen illeszkedik az $\overleftrightarrow{AO}$ egyenesre), mivel a centrálaxonometria egyenestartó leképezés. A $\overleftrightarrow{BE}$ egyenes ezért az x tengely -1 koordinátájú pontján át az y tengellyel húzott párhuzamos egyenes centrálaxonometrikus képe.

Hasonlóan, $\overleftrightarrow{A_1C_2}$ az yz sík z tengelyének egységpontján áthaladó, a z tengellyel 45°-ot bezáró egyenes képe, $\overleftrightarrow{A_2C_1}$ az xy sík x tengelyének egységpontjára illeszkedő, az x tengellyel 45°-ot bezáró egyenes képe. Így e két egyenes F metszéspontja az y tengely -1 koordinátájú pontjának centrálaxonometrikus képe (tehát F illeszkedik a $\overleftrightarrow{BB_2}$ egyenesre). Az $\overleftrightarrow{AF}$ egyenes ekkor az y-tengely -1 koordinátájú pontján keresztül az x tengellyel húzott párhuzamos egyenes képe. A fentiek alapján a $\overleftrightarrow{BE}$ és $\overleftrightarrow{AF}$ egyenesek metszéspontja a $(-1,0,-1)$ koordinátájú pont centrálaxonometrikus képe. A $\overleftrightarrow{C_1D}$ egyenes az xy síkban



a koordinátatengelyek szögfelező egyenesének képe, és mivel a szögfelező egyenesre a $(-1, 0, -1)$ pont valóban illeszkedik, ezzel a centrálaxonometria egyenestartása alapján beláttuk a feladat állítását.

Hivatkozások

[1] H. S. M. Coxeter: *Projektív geometria*, Gondolat, 1986.

[2] Kárteszi Ferenc: *Ábrázoló geometria*, Tankönyvkiadó, 1957.

[3] Kiss György: Desargues tétele, *KÖMAL*, 2007. március

[4] I. Molnár, J. Szabó: Applications of Methods of Descriptive Geometry in Solving Ordinary Geometric Problems, *Teaching Mathematics and Computer Science*, **2**, 2004, 103-115.

[5] Schopp János: *Kúpszeletek*, Középiskolai szakköri füzetek, Tankönyvkiadó, 1967.

[6] J. Szabó, H. Stachel, H. Vogel: Ein Satz über die Zentralaxonometrie, *Sb. Akad Wiess. Wien*, **203**, 1995, 3-11.

[7] Vigassy Lajos: *Geometriai transzformációk*, Középiskolai szakköri füzetek, Tankönyvkiadó, 1963.

[8] Vigassy Lajos: *Projektív geometria*, Középiskolai szakköri füzetek, Tankönyvkiadó, 1970.

[9] Vigassy Lajos: *Síkmértani szerkesztések térmértani megoldással*, Középiskolai szakköri füzetek, Tankönyvkiadó, 1957.