Konvex Geometria

Vincze Csaba

2019. december 16.

Tartalomjegyzék

1. Elemek

A tárgyalás során végig az $\mathbb{R}^n$ valós, euklideszi vektorteret vesszük alapul, ellátva a

$$\langle v, w\rangle := v^1w^1 + \ldots + v^nw^n$$

kanonikus belső szorzattal. A belső szorzat segítségével mérni tudjuk a vektorok

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{(v^1)^2 + \ldots + (v^n)^2}$$

hosszát (norma), a tér pontjainak

$$d(p, q) := \|p - q\| = \sqrt{(p^1 - q^1)^2 + \ldots + (p^n - q^n)^2}$$

távolságát és - figyelembe véve a $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$ ún. Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget - (nemzérus) vektorok

$$\angle(v, w) := \arccos \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}$$

szögét is. Geometriai szövegkörnyezetben a vektortér elemeire a *vektor* és a *pont* kifejezéssel egyaránt utalunk, s azt a kifejezésmódot választjuk, mely az adott kontextusban természetesebbnek tűnik: pontok (és nem vektorok) távolságáról beszélünk tehát, illetve vektorok (és nem pontok) szögéről.

Ennek megfelelően használni fogjuk a $p,\ q, \ldots$, illetve a $v, w, \ldots$ szimbólumokat is a vektortér elemeinek jelölésére.

Legyen r pozitív valós szám. A p pont r sugarú nyílt gömbkörnyezete a

$$B_r(p) := \{q \in \mathbb{R}^n \mid d(p,q) < r\}$$

halmaz. Emlékeztetünk rá, hogy egy halmaz nyílt, ha minden pontja belső pont, azaz minden pontját egy nyílt gömbkörnyezetével együtt tartalmazza. Egy halmaz zárt, ha a komplementere nyílt. Azt mondjuk hogy a halmaz korlátos, ha az origó valamely (véges) r sugarú környezete tartalmazza. A halmaz kompakt, ha korlátos és zárt.

A $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszert lineárisan függetlennek nevezzük, ha a zérusvektor csak triviális lineáris kombinációjuk segítségével állítható elő, azaz

$$\lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_k v_k = \mathbf{0}$$

maga után vonja, hogy $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$. Egy vektorrendszer lineárisan függő, ha nem lineárisan független, azaz a zérusvektor előállítása nem csupa nulla együtthatóval is lehetséges. Geometriailag a vektorrendszer függősége azt jelenti, hogy megadható egy olyan nem triviális (azaz nem egypontú) zárt töröttvonal, melynek oldalai párhuzamosak a vektorrendszer tagjaival – ez a vektorösszeadás műveletének az összefűzési eljárással való szemléltetése alapján nyilvánvaló. A maximális tagszámú lineárisan független rendszereket bázisnak nevezzük. Ezeknek a rendszereknek közös tagszáma pedig a tér dimenziója. Emlékeztetünk rá, hogy a koordinátatér egy részhalmaza pontosan akkor lineáris altér, ha zárt a lineáris kombináció képzésére nézve.

2. Affin és konvex halmazok

2.1. Definíció. *A $v_1, \ldots, v_k$ vektorok $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$ lineáris kombinációját* affin kombinációnak *nevezzük, ha $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$. A vektorok* konvex kombinációján *olyan affin kombinációt értünk, melynek együtthatói nemnegatívak.*

A tér p és q pontjait összekötő egyenes paraméteres előállítását alapul véve,

$$l(p,q) = \{p + \lambda(q-p) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(1-\lambda)p + \lambda q \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

azaz két pont összes affin kombinációinak halmazáról van szó. Két pont összes konvex kombinációinak halmaza pedig a pontokat összekötő szakasz:

$$s(p, q = \{(1-\lambda)p + \lambda q \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

2.2. Definíció. *Egy legalább kételemű halmazt* affin halmaznak *nevezünk, ha bármely két pontjával együtt a pontokat összekötő egyenest is tartalmazza; ha pedig bármely két pontjával együtt a pontokat összekötő szakaszt is tartalmazza, akkor a halmaz* konvex.

2.1. Megállapodás. A legfeljebb egy elemet tartalmazó halmazokat automatikusan affin, illetve konvex halmazoknak tekintjük.

2.1. Állítás. *Affin, illetve konvex halmazok metszete affin, illetve konvex halmaz.*

Bizonyítás. Ha a metszet üres, vagy egyetlen elemet tartalmaz (singleton), akkor nincs mit bizonyítanunk. Egyébként a metszet bármely két pontja eleme a metszetet alkotó halmazok mindegyikének. Mivel affin, illetve konvex halmazokról van szó, ezért a pontokat összekötő egyenes, illetve szakasz is része valamennyi halmaznak, ami azt jelenti, hogy része a metszetüknek is. ■

2.3. Definíció. *Egy halmaz* affin*, illetve* konvex burkolóján *a halmazt tartalmazó összes affin, illetve konvex halmaz metszetét értjük.*

2.2. Állítás. *Egy halmaz pontosan akkor affin, ha zárt az affin kombináció képzésére nézve.*

Bizonyítás. Üres, vagy egyetlen elemet tartalmazó halmazokra az állítás triviális. Egyébként, ha egy halmaz zárt az affin kombináció képzésére nézve, akkor – speciálisan – bármely két pontjának segítségével képzett összes affin kombinációt, azaz a pontokat összekötő egyenest is tartalmazza.

A megfordítás igazolása céljából tekintsünk egy (legalább két elemű) affin halmazt. Az affin kombinációban részt vevő elemek száma szerinti teljes indukcióval meg fogjuk mutatni, hogy a halmaz zárt az affin kombináció képzésére nézve. A $k = 2$ eset az affin halmaz definíciója. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $k-1$ darab elem esetén és tekintsük a $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k$ elemek

$$v := \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$$

affin kombinációját: $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$. Mivel az együtthatók között kell, hogy legyen 1-től különböző, ezért feltehető pl. hogy $\lambda_k \neq 1$. Ebben az esetben

$$v = (1-\lambda_k)\Big(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_k} v_1 + \ldots + \frac{\lambda_{k-1}}{1-\lambda_k} v_{k-1}\Big) + \lambda_k v_k,$$

ahol az első tag vektori része az indukciós feltevés miatt eleme a halmaznak, a második taggal együtt pedig a halmaz két pontjának affin kombinációját adja, mely a $k = 2$ esetre tekintettel, eleme a halmaznak. ■

2.1. Következmény. *Az affin burkoló a halmaz elemeiből képzett összes affin kombinációk halmaza.*

Bizonyítás. Az iménti állítás alapján a halmaz elemeiből képzett összes affin kombináció eleme az affin burkolónak. Elegendő tehát azt megmutatni, hogy az összes affin kombinációk A halmaza maga is affin. Legyen $p = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$ és $q = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_l w_l$ két tetszőleges A - beli elem, azaz lineáris kombinációi a halmaz elemeinek úgy, hogy $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$ és $\mu_1 + \ldots + \mu_l = 1$. Ha z a pontokra illeszkedő egyenes egy tetszőleges pontja, akkor $z = (1-\lambda)p + \lambda q$, amit részletesen kiírva

$$z = (1-\lambda)\lambda_1 v_1 + \ldots + (1-\lambda)\lambda_k v_k + \lambda\mu_1 w_1 + \ldots + \lambda\mu_l w_l$$

következik. Mivel az együtthatók összege 1, ezért a jobb oldalon a $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_l \in A$ elemek affin kombinációja áll. Ez azt jelenti, hogy z eleme az A halmaznak, s ennélfogva A tartalmazza a pontjaira illeszkedő egyeneseket is. ■

2.3. Állítás. *Egy halmaz pontosan akkor konvex, ha zárt a konvex kombináció képzésére nézve.*

Bizonyítás. Üres, vagy egyetlen elemet tartalmazó halmazokra az állítás triviális. Egyébként, ha egy halmaz zárt a konvex kombináció képzésére nézve, akkor – speciálisan – bármely két pontjának segítségével képzett összes konvex kombinációt, azaz a pontokat összekötő szakaszt is tartalmazza.

A megfordítás igazolása céljából tekintsünk egy (legalább két elemű) konvex halmazt. A konvex kombinációban részt vevő elemek száma szerinti teljes indukcióval meg fogjuk mutatni, hogy a halmaz zárt a konvex kombináció képzésére nézve. A $k = 2$ eset a konvex halmaz definíciója. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $k - 1$ darab elem esetén és tekintsük a $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k$ elemek

$$v := \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$$

konvex kombinációját: $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$ és valamennyi együttható nemnegatív. Mivel az együtthatók között kell, hogy legyen 1-től különböző, ezért feltehető pl. hogy $\lambda_k \neq 1$. Ebben az esetben

$$v = (1 - \lambda_k)\Big(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_k} v_1 + \ldots + \frac{\lambda_{k-1}}{1 - \lambda_k} v_{k-1}\Big) + \lambda_k v_k,$$

ahol az első tag vektori része az indukciós feltevés miatt eleme a halmaznak, a második taggal együtt pedig a halmaz két pontjának konvex kombinációját adja, mely a $k = 2$ esetre tekintettel, eleme a halmaznak. ∎

2.2. Következmény. *A konvex burkoló a halmaz elemeiből képzett konvex kombinációk halmaza.*

Bizonyítás. Az affin burkolóra vonatkozó állítás bizonyításának mintájára, rutin gyakorló feladat. ∎

2.1. Tétel. (Az affin halmazok struktúratétele). *A nemüres affin halmazok lineáris alterek eltoltjai, azaz előállíthatók $p + H$ alakban, ahol p a halmaz tetszőleges pontja, H pedig egyértelműen meghatározott lineáris altér.*

Bizonyítás. Először is megmutatjuk, hogy a lineáris alterek eltoltjai affin halmazok; legyen

$$w_1 := p + v_1, \ldots, w_k := p + v_k$$

és tekintsük a $w := \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k$ affin kombinációt. Mivel az együtthatók összege 1, ezért $w = p + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = p + v$ alakú, ahol v a lineáris altér elemeinek lineáris kombinációja, s így maga is eleme a H halmaznak. A lineáris alterek eltoltjai tehát zártak az affin kombináció képzésére nézve és ennélfogva affin halmazok.

Megfordítva, tegyük fel, hogy A nemüres affin halmaz és tekintsünk egy $p \in A$ pontot; belátjuk, hogy a $H := -p + A$ halmaz zárt a lineáris kombináció képzésére nézve és ennélfogva lineáris altér. Legyen $v_1 := -p + w_1, \ldots, v_k := -p + w_k$ és tekintsük a $v := \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$ lineáris kombinációt:

$$\begin{aligned} v &= -(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k)p + \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k = \\ &= -p + \Big(1 - (\lambda_1 + \ldots + \lambda_k)\Big)p + \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k = -p + w, \end{aligned}$$

ahol w az affin halmaz elemeinek affin kombinációja, s így maga is eleme az A halmaznak. A bizonyítás teljessé válik, ha megmutatjuk, hogy ez a lineáris altér egyértelműen meghatározott. Tételezzük fel, hogy $p + H = q + L$, valamely p és q pont, illetve H és L lineáris altér esetén. Eltolva a p vektor ellentettjével $H = q - p + L$, következik. Mivel a lineáris alterek illeszkednek az origóra, ezért

$$\mathbf{0} = p - q + l \quad \Rightarrow \quad l = q - p$$

írható az L lineáris altér valamely l eleme esetén. Ez azt jelenti, hogy az eltolóvektor eleme az L-nek. Mivel az összeadás speciális lineáris kombináció, az ilyen eltolás a lineáris alteret önmagába viszi át. Következik tehát, hogy $H = L$. ∎

2.4. Definíció. *Egy nemüres affin halmaz $p + H$ előállításában szereplő egyértelműen meghatározott H lineáris alteret az affin halmaz* irányterének *nevezzük.*

2.5. Definíció. *Irányterének dimenzióját az affin halmaz dimenziójának nevezzük; egy* halmaz dimenziója *pedig megegyezik affin burkolójának a dimenziójával. Speciálisan* $\dim \emptyset = -1$.

3. Carathéodory tétele

Az előző fejezetben láttuk, hogy az affin, illetve a konvex burkolót a halmaz elemeinek affin, illetve konvex kombinációi előállítják. Kérdéses marad azonban, hogy ténylegesen szükség van-e az összes ilyen kombinációra, mit is jelent az, ha egy és ugyanaz az elem két különböző affin, illetve konvex kombináció révén is előáll. Tételezzük fel, hogy

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_l v_l = \lambda_{l+1} v_{l+1} + \ldots + \lambda_k v_k,$$

ahol az egyenlet mindkét oldalán ugyanolyan típusú, például affin kombináció szerepel:

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_l = 1 \quad \text{és} \quad \lambda_{l+1} + \ldots + \lambda_k = 1.$$

Egy oldalra rendezve

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_l v_l + (-\lambda_{l+1}) v_{l+1} + \ldots + (-\lambda_k) v_k = \mathbf{0},$$

ami azt jelenti, hogy a $v_1, \ldots, v_l, v_{l+1}, \ldots, v_k$ vektorrendszer lineárisan függő, ráadásul a zérusvektort előállító lineáris kombinációban szereplő együtthatók összege is zérus.

3.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a vektorrendszer* affin függő*, ha a zérusvektor előáll a nemtriviális*

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = \mathbf{0}$$

lineáris kombináció segítségével és $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 0$. A vektorrendszer affin független*, ha nem affin függő.*

A lineáris függőséggel ekvivalens vektoregyenlet mellett tehát az együtthatók összege is zérus kell legyen. Utóbbit figyelembe vehetjük a

$$\lambda_1(v_1, 1) + \ldots + \lambda_k(v_k, 1) = \mathbf{0}$$

vektoregyenlettel, ahol a jobb oldalon már az $\mathbb{R}^{n+1}$ tér zérusvektora áll. A v_1, ..., $v_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer affin függősége ekvivalens a $(v_1, 1)$, ..., $(v_k, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ rendszer lineáris függőségével.

3.1. Feladat. Igazolja, hogy a $v, v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszer pontosan akkor affin függő, ha a $v_1 - v, \ldots, v_k - v$ vektorok lineárisan függők.

Útmutatás. Tegyük fel, hogy

$$\lambda v + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = \mathbf{0}$$

és $\lambda + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 0$ teljesül nemtriviálisan. Átrendezve az együtthatók között fennálló összefüggést $\lambda = -(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k)$ következik és ennélfogva

$$\lambda_1(v_1 - v) + \ldots + \lambda_k(v_k - v) = \mathbf{0}.$$

A lineáris kombináció nemtriviális, hiszen ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$, akkor $\lambda = -(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k) = 0$, ami ellentmond a vektorrendszer affin függőségének. A megfordítást igazolandó tegyük fel, hogy

$$\lambda_1(v_1 - v) + \ldots + \lambda_k(v_k - v) = \mathbf{0}$$

teljesül nemtriviálisan. Innen

$$\lambda v + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = \mathbf{0},$$

ahol definíció szerint $\lambda = -(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k)$.

3.1. Megjegyzés. Az affin függőség geometriai szempontból azt jelenti, hogy a vektorrendszer egyik tagját kezdőpontnak tekintve, a többibe mutató helyvektorok lineárisan függő rendszert alkotnak, azaz van olyan nem triviális zárt töröttvonal, melynek oldalai párhuzamosak a helyvektorokkal (lasszó).

3.1. Következmény. *Az n-dimenziós koordinátatér bármely $n+2$ tagú vektorrendszere affin függő.*

3.1. Tétel. (Carathéodory, 1907). *A konvex burkoló a halmaz affin független elemeiből képzett konvex kombinációk halmaza.*

Bizonyítás. Legyen $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$ a halmaz elemeiből képzett konvex kombináció és tegyük fel, hogy a $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszer affin értelemben függő. Feladatunk ezek után az, hogy a konvex kombinációban szereplő tagok számát redukáljuk. A szemléletesség kedvéért tételezzük fel, hogy $k = 3$ és tekintsük a háromdimenziós koordinátatérben a

$$\triangle := \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1,\ x\ \geq\ 0,\ y\ \geq\ 0,\ z\ \geq\ 0\}$$

háromszöglemezt. Vegyük észre, hogy a konvex kombináció együtthatóiból képzett $\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ pont eleme a háromszöglemeznek. Másfelől

$$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3 = \mathbf{0}$$

teljesül nemtriviálisan úgy, hogy $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$. Ez azt jelenti, hogy az együtthatókból képzett $\mu := (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ (nemzérus) vektor párhuzamos a háromszöglemez síkjával. Létezik tehát olyan t nemnegatív skalár, hogy a $\nu := \lambda + t\mu$ pont eleme a háromszöglemez határának, azaz valamelyik koordinátája zérus. A határozottság kedvéért tegyük fel, hogy $\nu_3 = 0$. Ekkor a

$$\begin{aligned} \nu_1 v_1 + \nu_2 v_2 + \nu_3 v_3 &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + t(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3) = \\ &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = v \end{aligned}$$

egyenlet bal oldalán olyan konvex kombináció szerepel, melynek utolsó tagja zérus – a kombinációban szereplő vektorok száma mindaddig csökkenthető, amíg a vektorrendszer affin értelemben függetlenné nem válik. ■

3.2. Feladat. A Carathéodory-tétel bizonyítása során látottak mintájára igazolja, hogy az affin burkoló a halmaz affin független elemeiből képzett affin kombinációk halmaza.

3.2. Következmény. *Egy síkbeli ponthalmaz konvex burkolója olyan – esetleg elfajuló – háromszöglemezek uniójaként állítható elő, melyek csúcsai a halmazból valók.*

3.2. Tétel. *Kompakt halmaz konvex burka kompakt.*

Bizonyítás. Legyenek $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ tetszőleges valós számok és tekintsük az n - dimenziós koordinátatér $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$ vektorait. Definiáljuk a ϕ leképezést a

$$\phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) := \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} v_{n+1}$$

képlet segítségével és vegyük észre, hogy Carathéodory tétele szerint bármely $D \subset \mathbb{R}^n$ halmaz konvex burka előállítható a $K \times D$ halmaz ϕ általi, azaz folytonos képeként, ahol

$$K := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \mid \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \text{ és } \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n, n+1\}.$$

Mivel K korlátos és zárt, ezért kompakt. Ha a D halmaz maga is kompakt, akkor K - val képzett Descartes-szorzata kompakt halmaz. A konvex burok tehát – egy kompakt halmaz folytonos műveletekkel előállított képeként – kompakt. ■

3.1. Megállapodás. Egy D halmaz affin, illetve konvex burkolójának jelölésére $\operatorname{aff} D$, illetve $\operatorname{conv} D$ szimbólumokat fogunk használni.

4. Helly tétele

Helly tétele egy kombinatórikus feltétel segítségével garantálja, hogy konvex halmazokból álló halmazcsalád tagjainak legyen közös eleme.

4.1. Lemma. (J. Radon). *Legyen $D := \{v_1, \dots, v_k\}$ az n - dimenziós koordinátatér vektorainak egy véges halmaza. Ha $k \geq n+2$, akkor D előállítható nemüres, diszjunkt D_1 és D_2 részhalmazainak uniójaként úgy, hogy $\operatorname{conv} D_1 \cap \operatorname{conv} D_2 \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Mivel $k \geq n+2$, ezért D elemei affin függő rendszert alkotnak, azaz

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \mathbf{0}$$

írható és $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0$, ahol az együtthatók egyszerre nem tünhetnek el. Van tehát legalább két olyan együttható, melynek előjele különbözik. A határozottság kedvéért tegyük fel, hogy $\lambda_1 \geq 0$, ..., $\lambda_l \geq 0$, illetve $\lambda_{l+1} < 0$, ..., $\lambda_k < 0$ és legyen

$$\lambda := \lambda_1 + \dots + \lambda_l = -(\lambda_{l+1} + \dots \lambda_k) > 0.$$

illetve

$$v := \frac{1}{\lambda}(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k) = -\frac{1}{\lambda}(\lambda_{l+1} v_{l+1} + \dots \lambda_k v_k).$$

A konstrukció alapján nyilvánvaló, hogy a v vektor mind a $D_1 := \{v_1, \dots, v_l\}$, mind pedig az $D_2 := \{v_{l+1}, \dots, v_k\}$ halmaz konvex burkának eleme. ■

4.1. Tétel. (E. Helly, 1913). *Legyen $\{B_1, \dots, B_k\}$ az n - dimenziós koordinátatér konvex halmazainak egy véges családja. Ha $k \geq n+1$ és a halmazcsalád bármely $n+1$ elemének létezik közös pontja, akkor az összes halmaznak létezik közös pontja.*

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük el. A $k = n + 1$ eset triviális, ezért tegyük fel, hogy Helly tétele igaz $k \geq n + 2$ konvex halmaz esetén és tekintsük a feltételeket kielégítő $\{B_1, \dots, B_k, B_{k+1}\}$ halmazcsaládot. Töröljük például az első halmazt és alkalmazzuk az indukciós feltevést a k - tagú $\{B_2, \dots, B_k, B_{k+1}\}$ halmazcsaládra. Ez lehetséges, hiszen ha a részcsaládból nem lenne bármely $n + 1$ tagnak közös eleme, akkor nem lenne az eredeti halmazcsalád bármely $n + 1$ tagjának sem. Kapjuk tehát, hogy létezik a

$$v_1 = \hat{B}_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k+1}$$

közös elem és ugyanez áll a második, a harmadik stb. halmaz törlése esetén:

$$v_2 = B_1 \cap \hat{B}_2 \cap B_3 \cap \dots \cap B_{k+1}, \dots, v_{k+1} = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap \hat{B}_{k+1},$$

ahol a $\hat{}$ - operátor az alatta szereplő elem törlését jelenti a metszet tagjai közül. Mivel $k+1 \geq n+2$, ezért a Radon - lemma szerint

$$\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\} = D_1 \cup D_2$$

írható, ahol a jobb oldalon álló halmazok konvex burkolójának a metszete nem az üres halmaz. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy $D_1 = \{v_1, \dots, v_l\}$ és $D_2 = \{v_{l+1}, \dots, v_{k+1}\}$; legyen továbbá v a konvex burkolók közös eleme. Kapjuk tehát, hogy

$$v \in \operatorname{conv} D_1 = \operatorname{conv}\{v_1, \dots, v_l\} \subset B_{l+1} \cap \dots \cap B_{k+1},$$

illetve

$$v \in \operatorname{conv} D_2 = \operatorname{conv}\{v_{l+1}, \dots, v_{k+1}\} \subset B_1 \cap \dots \cap B_l.$$

Ennélfogva v eleme a $B_1, \dots, B_k, B_{k+1}$ halmazok metszetének is. ■

4.1. Megjegyzés. Helly tétele nem véges halmazcsaládokra azon az áron általánosítható, hogy a konvexitás mellett a zártságot és legalább az egyik halmaz kompaktságát is előírjuk.

4.1. Feladat. Igazolja, hogy ha a koordinátasík egy véges ponthalmazának elemei közül bármely három lefedhető egy r sugarú körlappal, akkor az összes pont is lefedhető egy r sugarú körlappal.

Útmutatás. Mivel bármely három pont lefedhető egy r sugarú körrel, ezért a szóban forgó kör középpontja a pontok köré írt r sugarú körlapok közös eleme. Ha a ponthalmaz minden pontja köré r sugarú kört írunk és figyelembe vesszük, hogy a koordinátasík kétdimenziós, akkor Helly tétele szerint az összes körlapnak kell, hogy legyen közös pontja. A közös pont köré írt r sugarú körlap viszont a pontok mindegyikét tartalmazza.

4.2. Feladat. Igazolja Jung tételét: a koordinátasík bármely d átmérőjű véges ponthalmaza lefedhető egy $d/\sqrt{3}$ sugarú körlappal.

Útmutatás. Az előző feladat eredménye szerint elegendő azt igazolni, hogy a ponthalmaz bármely három pontja lefedhető $d/\sqrt{3}$ sugarú körrel. Legyen tehát A, B és C a ponthalmaz három tetszőleges pontja. Ha ezek a pontok kollineárisak, akkor az észrevétel nyilvánvaló, hiszen az általuk meghatározott szakasz felezőpontja, mint középpont köré kört írva, a pontokat már egy $d/2$ sugarú körlappal is lefedhetjük. Ugyanez áll akkor is, ha a pontok derék - vagy tompaszögű háromszöget határoznak meg – a leghosszabb oldal felezőpontja köré írt $d/2$ sugarú kör megfelel. Tekintsük végül a hegyesszögű ABC háromszög legnagyobb szögét. Ha például a γ szögről van szó, akkor $60^\circ \leq \gamma < 90^\circ$ és a körülírt kör sugarára vonatkozó ismert képlet szerint

$$2R = \frac{d(A,B)}{\sin\gamma} \leq \frac{d}{\sin 60^\circ} \quad \Rightarrow \quad R \leq \frac{d}{\sqrt{3}},$$

hiszen a szinuszfüggvény az első síknegyedben szigorúan monoton nő.

5. Támaszhipersíkok

Az affin halmazok struktúratétele szerint minden (nemüres) affin halmaz előáll $p+H$ alakban, ahol H egyértelműen maghatározott lineáris altér (az affin halmaz iránytere). Erre tekintettel az affin halmaz kifejezés helyett használatos az affin altér, illetve lineáris sokaság elnevezés is. Ha a dimenzió $n-1$, akkor a $p+H$ alakú affin halmazok a tér ún. *hipersík*jai. Kitüntetett szerepüket annak köszönhetik, hogy hipersíkok esetén az iránytér ortogonális komplementerét egyetlen (nemzérus) $\mathbf{n}$ vektor generálja, mely fölött nemzérus skalárszorzó erejéig szabadon rendelkezünk. Nyilvánvaló, hogy a tér egy q pontja akkor és csak akkor eleme a hipersíknak, ha a $q-p$ különbségvektor merőleges az $\mathbf{n}$ vektorra, azaz $\langle q-p,\ \mathbf{n}\rangle = 0$. Két további eset lehetséges a $\langle q-p,\ \mathbf{n}\rangle > 0$, illetve $\langle q-p,\ \mathbf{n}\rangle < 0$ relációknak megfelelően. A tér összes további pontja tehát ezekkel a relációkkal meghatározott egyik, illetve másik halmazban van. Könnyű igazolni, hogy nemüres, diszjunkt konvex halmazokról van szó, melyet a hipersík által meghatározott nyílt féltereknek nevezünk. A hipersíkkal vett uniójukat pedig zárt féltereknek mondjuk. Ha az $\mathbf{n}$ vektor helyett a megengedett nemzérus skalárszorost szerepeltetjük, akkor a definiáló relációk ugyan felcserélődhetnek, de a félterek ugyanazok maradnak. A hipersík oldalain az által meghatározott féltereket értjük.

5.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a D, $E \subset \mathbb{R}^n$ halmazok szeparálhatók, ha van olyan hipersík, melynek különböző oldalaira esnek, illetve élesen szeparálhatók, ha a hipersík nyílt oldalairól van szó.*

5.1. Tétel. *Kompakt D, $E \subset \mathbb{R}^n$ részhalmazok pontosan akkor szeparálhatók élesen, ha konvex burkolóik metszete üres.*

Bizonyítás. Ha élesen szeparálhatók, akkor konvex burkolóik is valamely hipersík különböző nyílt oldalaira esnek, azaz diszjunktak. Megfordítva, ha a konvex burkolók metszete üres, akkor – figyelembe véve, hogy a konvex burkolók is kompakt halmazok – tekintsük azt a $u \in D$ és $v \in E$ pontpárt, melyre a burkolók közötti távolság ténylegesen fellép, azaz

$$d(u,v) = d(\operatorname{conv} D, \operatorname{conv} E) := \min\{d(w,z) \mid w \in \operatorname{conv} D,\ z \in \operatorname{conv} E\}.$$

Az $s(u,v)$ szakasz végpontjaiban emelt merőleges hipersíkok szeparálják a szóban forgó halmazok konvex burkolóit, tehát magukat a halmazokat is: a $\operatorname{conv} D$ halmaznak nincs pontja az u - ban emelt merőleges hipersík v - t tartalmazó oldalán, ellenkező esetben ugyanis ezt a pontot u - val összekötve belemetszenénk az $s(u,v)$ szakaszra emelt Thálesz gömbbe, ami azt jelenti, hogy $\operatorname{conv} D$ - nek van u - nál közelebbi pontja v - hez. Hasonlóan kapjuk, hogy a $\operatorname{conv} E$ halmaznak nincs pontja az v - ben emelt merőleges hipersík u - t tartalmazó oldalán. Mivel a szóban forgó hipersíkok párhuzamosak, ezért szeparálják a konvex burkolókat, az $s(u,v)$ szakasz felező merőleges hipersíkja pedig már élesen szeparál. ∎

5.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy hipersík határolja a D halmazt, ha D a hipersík egyik oldalára esik. A hipersík támasztja D - t a halmaz p pontjában, ha határolja és illeszkedik is a p pontra.*

5.2. Tétel. (A támaszhipersíkok egzisztenciatétele) *Ha $K \subset \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz, akkor bármely határpontjára illeszkedik legalább egy támaszhipersík.*

Bizonyítás. Ha $\dim K < n$, akkor bármely K - ra illeszkedő hipersík a kívánt tulajdonságú. Legyen tehát $\dim K = n$ és – szükség esetén eltolva a halmazt – tételezzük fel, hogy a kiválasztott határpont az origó.

1. lépés. Az $n = 2$ esetben vetítsük K belsejét az origóból az egységsugarú körvonalra. A vetítés eredménye egy összefüggő ív, melynek mértéke π - nél nem nagyobb, hiszen ha átellenes pontokat tartalmazna, akkor a konvexitás miatt az origó a K halmaz belsejében lenne, ami ellentmond annak, hogy K határpontja. Létezik tehát olyan átmérőegyenes, melynek a szóban forgó ív – és ezáltal a K halmaz belseje – az egyik oldalára esik. Lezárással pedig maga a K halmaz is ugyanebben a (zárt) félsíkban van.
2. lépés Az $n = 3$ esetben vegyük K egy tetszőleges p határpontját és tekintsünk egy p - re illeszkedő kétdimenziós K_2 síkmetszetet. Legyen l az első lépésben konstruált egyenes: K_2 támaszegyenese a p pontban. Vetítsük merőlegesen K - t egy az l egyenesre merőleges síkra is és legyen m a vetület támaszegyenese a vetületi pontban. Az l és az m egyenesek által kifeszített sík K - nak p - beli támaszsíkja.
3. lépés. A magasabb dimenziós esetekben hasonló indukciós eljárással konstruálhatunk támasz-hipersíkokat. ∎

5.3. Tétel. (Az egzisztenciatétel megfordítása, avagy a konvexitás „külső" jellemzése.) *Ha $K \subset \mathbb{R}^n$ zárt n - dimenziós halmaz és minden határpontjára illeszkedik legalább egy támaszhipersík, akkor K konvex.*

Bizonyítás. A $K = \mathbb{R}^n$ eset triviális (a határpontok halmaza üres). Tételezzük fel tehát, hogy létezik $v \in \mathbb{R}^n$ pont a térben, ami nem eleme a K halmaznak. Ha w a K belsejében van, akkor tekintsünk egy p határpontot az $s(v, w)$ szakaszon. A feltétel szerint létező $p + H$ támaszhipersík élesen szeparálja v - t a w belső ponttól, s ennélfogva szeparálja v - t a K halmaztól. Kapjuk tehát, hogy ha $v \notin K$, akkor van olyan hipersík, mely a v - t szeparálja K - tól. Jelölje Ω az összes K - t tartalmazó zárt féltér metszetét. Nyilvánvaló, hogy $K \subset \Omega$, míg a fordított irányú tartalmazás abból következik, hogy előző megállapításaink szerint K komplementerének minden pontja esetén van olyan K - t tartalmazó zárt féltér, melybe v nem esik bele. Ez azt jelenti, hogy K komplementere része Ω komplementerének, vagyis $\Omega \subset K$ is teljesül. A kölcsönös tartalmazás a halmazok egyenlőségét jelenti, Ω pedig konvex halmazok metszeteként konvex. ∎

5.1. Következmény. *Egy n - dimenziós zárt $K \subset \mathbb{R}^n$ halmaz pontosan akkor konvex, ha minden határpontjában létezik támaszhipersíkja.*

6. Konvex politópok

6.1. Definíció. *Véges sok $\mathbb{R}^n$ - beli pont konvex burkát* konvex politóp*nak nevezzük. Az euklideszi sík kétdimenziós politópjai az ún.* konvex poligonok*, vagy* konvex sokszöglemezek*, míg az euklideszi tér háromdimenziós konvex politópjai a* konvex poliéderek.

6.2. Definíció. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex halmaz; a $p \in K$ pontot a K halmaz* extremális pont*jának nevezzük, ha a p pontban "kilyukasztott" $K \setminus \{p\}$ halmaz konvex.*

6.1. Állítás. *Egy konvex politópnak véges sok extremális pontja van; ezek a politóp* csúcsai.

Bizonyítás. Legyen $K := conv\ \{q_1, \ldots, q_m\}$ és tegyük fel, hogy van a K halmaznak a $q_1, \ldots, q_m$ pontoktól különböző extremális p pontja. Ekkor valamennyi szóban forgó pont eleme a $K' := K \setminus \{p\}$ halmaznak, mely a feltevés szerint konvex. Ez azt jelenti, hogy

$$K = conv\ \{q_1, \ldots, q_m\} \subset K' = K \setminus \{p\}.$$

Az ellentmondás miatt egy konvex politóp extremális pontjai csak abból a véges ponthalmazból kerülhetnek ki, melynek konvex burka - így számuk is csak véges sok lehet. ■

6.1. Tétel. (Krein-Milman, 1940) *Bármely konvex kompakt K halmaz az extremális pontjainak konvex burka, azaz*

$$K := conv\ ext\ K,$$

ahol $ext\ K$ az extremális pontok halmaza, vagy ekvivalens módon - K profilja.

Bizonyítás. Legyen $K \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges konvex, kompakt halmaz. A conv ext $K \subset K$ tartalmazás nyilvánvaló, ezért az állítás belátásához elegendő megmutatni, hogy bármely $q \in K$ pont előáll K extremális pontjainak konvex kombinációjaként. Ehhez a tér dimenziója, azaz n szerinti teljes indukciót alkalmazunk. Legyen először $n = 1$. Ekkor K egy zárt, valós intervallum. Az extremális pontok az intervallum végpontjai, melyek konvex kombinációjaként természetesen minden K - beli pont előállítható. Most tegyük fel, hogy $k < n$ esetén teljesül az állítás. Tekintsünk egy tetszőleges $q \in K$ pontot. Ha q extremális pont, akkor készen vagyunk. Egyébként létezik $v_1, v_2 \in K$ úgy, hogy $q \in s(v_1, v_2)$ de $q \neq v_i$ $(i = 1, 2)$. A kompaktságra tekintettel hosszabbítsuk meg a szakaszt a K halmaz határáig, azaz legyen $s(w_1, w_2)$ olyan K - beli szakasz, melynek mindkét végpontja határpont és q - t a (relatív) belsejében tartalmazza. Az egzisztencia-tétel szerint felvehetők az $A_1 := w_1 + H_1$ és $A_2 := w_2 + H_2$ támaszhipersíkok a szakasz végpontjaiban. Mivel a hipersíkok konvex, zárt halmazok, K pedig konvex, kompakt halmaz, így $A_i \cap K$ is konvex és kompakt, továbbá dim $A_i \cap K \leq n - 1$ $(i = 1, 2)$. Az indukciós feltevés miatt w_i előáll $A_i \cap K$ extremális pontjainak konvex kombinációjaként $(i = 1, 2)$. Az állítás bizonyításához most már csupán azt kell megmutatni, hogy $A_i \cap K$ extremális pontjai K-nak is extremális pontjai $(i = 1, 2)$. Legyen $i = 1$ és z tetszőleges extrémális pontja az $A_1 \cap K$ - nak. Egy a z - t (relatív) belsejében tartalmazó K - beli szakasz nem futhat a hipersíkban, hiszen z az $A_1 \cap K$ extrémális pontja, de nem is döfheti, hiszen A_1 támaszhipersík, melynek K az egyik oldalára esik. Ilyen szakasz tehát nincs. Az okoskodás hasonló az $i = 2$ esetben is. ■

6.1. Következmény. *Minden konvex politóp a csúcsai konvex burka.*

6.2. Tétel. *Véges sok zárt féltér metszete konvex politóp, feltéve, hogy a metszet nemüres és kompakt.*

Bizonyítás. Jelölje $F_1, \ldots, F_m$ a szóban forgó zárt féltereket és bármely i index esetén legyen A_i a félteret határoló hipersík. A tér dimenziója szerinti teljes indukcióval belátjuk, hogy a $K := \cap_{i=1}^m F_i$ halmaznak csak véges sok extremális pontja van. Az $n = 1$ speciális esetben az állítás nyílvánvaló, hiszen a számegyenes konvex kompakt halmazai a zárt intervallumok, azaz politópok. Tegyük fel, hogy az $(n - 1)$ - dimenziós koordinátatérben igaz az állítás! Ha $K \subset \mathbb{R}^n$ és $w \in ext\ K$, akkor természetesen a w pont a K halmaz határpontja, ezért valamely i index mellett $w \in A_i$ teljesül, ami azt jelenti, hogy

$$ext\ K \subset ext\ (K \cap A_1) \cup \ldots \cup ext\ (K \cap A_m),$$

ahonnan - az indukciós feltevés szerint - az következik, hogy az extremális pontok halmaza véges. Mivel K konvex kompakt halmaz, ezért a Krein-Milman tétel szerint (véges sok) extremális pontjának a konvex burka - azaz konvex politóp. ■

6.3. Definíció. *Egy $L \subset \mathbb{R}^n$ nemüres halmaz polárisán a*

$$L^* := \{p \in \mathbb{R}^n \mid \forall\ q \in L\ :\ \langle p, q \rangle \leq 1\}$$

halmazt értjük.

6.1. Feladat. Igazolja, hogy a poláris halmaz képzése rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(i) egy nemüres halmaz polárisa az origót tartalmazó zárt konvex halmaz,

(ii) $(L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*$,

(iii) $L_1 \subset L_2 \;\Rightarrow\; L_2^* \subset L_1^*$,

(iv) $\forall\, \lambda > 0 : (\lambda L)^* = \frac{1}{\lambda} L^*$.

(v) Ha K zárt konvex halmaz és tartalmazza az origót, akkor $(K^*)^* = K$.

Útmutatás. Az egyetlen, ami a poláris halmaz értelmezése alapján nem nyilvánvaló, az a $(K^*)^* = K$ dualitás. Az áttekinthetőség kedvéért, legyen $L := K^*$. Ha $q \in K$, akkor bármely $p \in L$ esetén

$$\langle p, q\rangle \leq 1 \;\Rightarrow\; \langle q, p\rangle \quad (p \in L)$$

ami – definíció szerint – azt jelenti, hogy $q \in L^* = (K^*)^*$, azaz $K \subset (K^*)^*$. A fordított irányú tartalmazást igazolandó, tegyük fel, hogy $q \notin K$ és tekintsünk egy a K - t a q ponttól élesen szeparáló hipersíkot, melynek egyenlete

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = 1.$$

Itt $\mathbf{n} := (A_1, \ldots, A_n)$ a hipersík normálisa és a fenti koordinátás egyenlet a tömörebb $\langle \mathbf{n}, x\rangle = 1$ alakba írható. Mivel az origó eleme a K - nak, ezért K az $\langle \mathbf{n}, x\rangle < 1$ egyenlőtlenséggel adott nyílt félsíkban van, ahonnan $\mathbf{n} \in L$ következik. Másrészt azonban $\langle \mathbf{n}, q\rangle > 1$, ami azt jelenti, hogy $q \notin L^* = (K^*)^*$. Kapjuk tehát, hogy K komplementere része a $(K^*)^*$ komplementerének, s ennélfogva $(K^*)^* \subset K$, ami bizonyítandó volt.

6.3. Tétel. *Az n - dimenziós euklideszi tér minden n - dimenziós politópja véges sok zárt féltér metszete.*

Bizonyítás. Legyen $K := \mathrm{conv}\,\{q_1, \ldots, q_m\}$; mivel eltolással mindig elérhető, az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy az origó eleme az n - dimenziós K halmaz belsejének. Tekintsük a K^* poláris halmazt. Az első lépésben belátjuk, hogy $K^* = \cap_{i=1}^m F_i$, ahol bármely i index esetén

$$F_i := \{p \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, q_i\rangle \leq 1\}.$$

Definíció alapján nyilvánvaló, hogy $K^* \subset \cap_{i=1}^m F_i$. Másfelől a $\langle p, q_1\rangle \leq 1$, …, $\langle p, q_m\rangle \leq 1$ egyenlőtlenség - sorozat bármely $q = \lambda_1 q_1 + \ldots + \lambda_m q_m \in K$ esetén az

$$\langle p, q\rangle = \lambda_1\langle p, q_1\rangle + \ldots + \lambda_m\langle p, q_m\rangle \leq \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$$

egyenlőtlenséghez vezet, ami igazolja a fordított irányú tartalmazást, azaz a poláris halmaz véges sok zárt féltér metszete. A második lépésben belátjuk, hogy a poláris halmaz kompakt. Mivel zárt, ezért elegendő igazolni, hogy korlátos is. Feltevésünk szerint az origó a K halmaz belsejében van, így felvehető egy $0 < r$ - sugarú nyílt gömbkörnyezete K - ban. K^* bármely p elemének a környezet tagjaival vett skaláris szorzata kisebb, vagy egyenlő, mint egy, s ennélfogva $\langle p, p_0\rangle \leq 1$, ahol

$$p_0 := \frac{r}{||p||} p.$$

Kapjuk tehát, hogy $||p|| \leq 1/r$, ami a 6.2 Tétel értelmében azt jelenti, hogy a poláris halmaz konvex politóp:

$$K^* = \text{conv }\{q_1^*, \ldots, q_l^*\}.$$

Ismételve a gondolatmenetet az $L := K^*$ halmazra, $L^* = \cap_{i=1}^m F_i^*$, ahol bármely i index esetén

$$F_i^* := \{p^* \in \mathbb{R}^n \mid \langle p^*, q_i^* \rangle \leq 1\}.$$

Az (v) tulajdonásg alapján pedig $K = L^* = (K^*)^*$, azaz K előáll véges sok zárt féltér metszeteként. ∎

6.4. Tétel. (A konvex politópok struktúratétele) *Legyen $P \subset \mathbb{R}^n$ egy n - dimenziós konvex politóp és tekintsük zárt félterek metszeteként való minimális előállítását, azaz tegyük fel, hogy a metszetből egyetlen féltér sem hagyható el. Ekkor az előállításban szereplő félterek sorrendtől eltekintve egyértelműen meghatározottak és a félterek határának P - vel vett metszetei $(n-1)$ - dimenziós konvex politópok, melyeket P* lapjainak *nevezünk.*

6.1. Megjegyzés. Induktív módon értelmezhetjük a k - dimenziós lapok fogalmát, ahol $k = 1$, 2, ..., $n-1$. Speciálisan egy kétdimenziós konvex politóp lapjait *oldalaknak*, egy háromdimenziós konvex politóp lapjának a lapjait (azaz az 1 - dimenziós lapokat) pedig *éleknek* nevezzük.

7. Euler poliédertétele, szabályos testek

7.1. Tétel. (Euler poliédertétele) *Ha c, e, illetve l jelöli egy konvex poliéder csúcsainak, éleinek, illetve lapjainak számát, akkor $c - e + l = 2$.*

Bizonyítás. A poliéder bármely lapsíkja a teret két nyílt féltérre bontja, melyek egyikében nincs poliéderpont – ezt a továbbiakban negatív féltérnek nevezzük, míg a másikat pozitívnak. Válasszuk ki a poliéder egy lapját és az általa meghatározott negatív féltérben pedig egy p pontot úgy, hogy a többi lap által meghatározott potitív féltérbe essék. Centrálisan levetítve a poliédert a kiválasztott lapsíkra egy véges összefüggő gráfot kapunk, melynek c csúcsa, e éle van és a poliéder lapjainak vetületei (a kiválasztott lapot nem számítva) közös belső pont nélküli sokszöglemezek. Ezek száma $l-1$, amihez hozzászámítjuk még a kiválasztott lap komplementerét is az adott síkban. Ha a gráfban van kör, akkor egy élt törölve a redukált gráf még mindig összefüggő marad (a kör komplementer „ívén" közlekedhetünk a törölt él végpontjai között), csúcsai is megmaradtak, a sokszöglemezek száma viszont, az élek számával egyetemben eggyel csökkent. Ez azt jelenti, hogy a különbségük nem változott, s így nem változott a $c - e + l = c + (l - e)$ értéke sem. Feltehető tehát, hogy a gráf körmentes. Ez azt jelenti, hogy van legalább egy olyan csúcs, melynek a fokszáma 1 (ha bármely csúcs fokszáma legalább kettő, akkor a gráfban található leghosszabb út szükségképpen kör). Töröljük most az egy fokszámú csúcsot a hozzátartozó éllel együtt. A redukált gráf még mindíg körmentes és összefüggő marad (hiszen egy fokszámú csúcsba csak egyféleképpen juthatok el), a sokszöglemezek száma nem változott, míg a csúcsok száma, az élek számával egyetemben eggyel csökkent. Ez azt jelenti, hogy a különbségük nem változott, s így nem változott a $c - e + l$ értéke sem. Feltehető tehát, hogy a gráf már csak csúcsokat tartalmaz, öszszefüggősége miatt pedig pontosan egyet. A $c - e + l$ értéke ezek után könnyen kiszámítható a $c = 1$ (a megmaradó csúcs), $e = 0$ és $l = 1$ (a kiválasztott lapsík) helyettesítéssel: $c - e + l = 2$. ∎

7.1. Definíció. *Egy konvex poliéder adott csúcsához tartozó* defektus *a teljesszögnek és a csúcshoz tartozó élszögek összegének a különbsége.*

7.2. Tétel. (R. Descartes) *Egy konvex poliéder csúcsaihoz tartozó defektusok összege* 4π.

Bizonyítás. Mivel egy d csúccsal rendelkező konvex sokszöglemez belső szögeinek összege $(d-2)\pi$, az összes élszög összegét a

$$\sum_d (n-2)\pi f(d)$$

formula adja, ahol $f(d)$ jelöli a poliéder lapjai közül a konvex d - szöglemezek számát. Másfelől a defektusok összege

$$2\pi c - \sum_d (d-2)\pi f(d) = \pi\Big(2c - \sum_d df(d) + 2\sum_d f(d)\Big),$$

ahol

$$\sum_d df(d) = 2e \quad \text{és} \quad \sum_d f(d) = l.$$

Kapjuk tehát, hogy a defektusok összege $2\pi(c-e+l) = 4\pi$ a poliédertétel szerint. ∎

7.3. Tétel. (Cauchy - féle merevségi tétel) *Ha két konvex poliéder csúcsai él - és laptartó bijekcióval egymásba vihetők úgy, hogy az egymásnak megfelelő lapok egybevágók, akkor a két poliéder is egybevágó.*

Bizonyítás. A tétel bizonyítását illetően a szakirodalomra utalunk: [1], [2] és [3]. ∎

7.2. Definíció. *Egy konvex sokszöget akkor nevezünk* szabályos *sokszögnek, ha oldalai és szögei egybevágóak. A* szabályos poliéder *lapjai egybevágó szabályos sokszögek és minden csúcsban ugyanannyi él fut össze: az* (m,n) *párt a poliéder* szimbólumának *nevezzük, ha lapjai szabályos* m *- szögek, míg egy csúcsba* n *él fut össze.*

7.4. Tétel. *Egy szabályos poliéder szimbóluma* $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(4,3)$, *vagy* $(5,3)$.

Bizonyítás. Mivel minden szögdefektus egyenlő és Descartes tétele szerint az összeg pozitív, ezért minden szögdefektus pozitív: $2\pi - n\alpha(m) > 0$, ahol

$$\alpha(m) = \frac{m-2}{m}\pi$$

a szabályos m - szög egybevágó szögeinek közös mértéke. Innen

$$2 > n\frac{m-2}{m} = n\left(1-\frac{2}{m}\right) \geq n\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{n}{3},$$

hiszen m értéke legalább három. Mivel n kisebb, mint 6, ezért lehetséges értékei (nyilvánvaló geometriai okokból) 3, 4, vagy 5. Ha $n=3$, akkor $m<6$, így lehetséges értékei 3, 4, vagy 5. Az $n=4$ esetben $m<4$, így lehetséges értéke 3, míg ha $n=5$, akkor $m<10/3$, következésképpen $m=3$. ∎

szabályos (konvex) poliéder	szimbólum	csúcsok	élek	lapok
tetraéder	$(3,3)$	4	6	4
hexaéder (kocka)	$(4,3)$	8	12	6
Oktaéder	$(3,4)$	6	12	8
Ikozaéder	$(3,5)$	12	30	20
Dodekaéder	$(5,3)$	20	30	12

Hivatkozások

[1] M. Aigner, G. M. Ziegler, Bizonyítások a könyvből, Typotex Kft., 2004

[2] R. Hartshorne, Euclid and Beyond, Springer, 2000.

[3] Cs. Vincze, Convex Geometry, University of Debrecen, 2013, TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0025.