Debreceni Egyetem, Természettudományi és Technológiai Kar,
Matematikai Intézet

A Debreceni Akadémiai Bizottság Matematikai Munkabizottsága

A Magyar Tudomány Ünnepe

Messze látó tudomány: felelős válaszok a jövőnek

Fiatal Kutatók Délutánja

A Debreceni Akadémai Bizottság Székháza,
Debrecen, 2014. november 20.

A Magyar Tudomány Ünnepéről a Magyar Tudományos Akadémia már 1997 óta megemlékezik, hivatalosan azonban 2003 óta ünnepeljük minden év november 3-án, azon a napon, melyen 1825-ben Széchenyi István birtokainak egy évi jövedelmét felajánlotta a Magyar Tudós Társaság megalapítására, és ezzel lehetővé tette a Magyar Tudományos Akadémia megalapítását.

A hivatalos indoklás szerint az *Országgyűlés a tudomány társadalomban betöltött szerepét kiemelkedően fontosnak, a tudomány művelése és fejlesztése érdekében végzett tevékenységet elismerésre és kiemelkedő támogatásra méltónak tartja* ezért e napot a 2003. évi XCIII. törvény a magyar tudomány ünnepévé nyilvánította.

A Magyar Tudomány Ünnepén Magyarország számos városában, sőt a határokon túl is, többhetes rendezvénysorozaton vehetnek részt az érdeklődők. A különböző előadások, kiállítások, bemutatók, filmvetítések, tudományos fórumok egy-egy vezérgondolat jegyében zajlanak. A Magyar Tudomány Ünnepe 2014. évi rendezvénysorozata november 3-30. között, országosan kerül megrendezésre. Az Akadémia Elnökségének döntése értelmében a 2014. évi Magyar Tudomány Ünnepe témájának főcíme: *Messze látó tudomány: felelős válaszok a jövőnek.*

Program

A rendezvény keretein belül a Debreceni Egyetem Természettudományi és Technológiai Karának Matematikai Intézete mutatkozik be fiatal kutatóinak előadásaival. Az előadók a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskoláját képviselik és szűkebb szakterületük szerint az Algebra és Számelmélet, az Analízis és a Geometria Tanszék doktorandusz hallgatói, leendő és jelenlegi oktatói. Az érintett egységek vezetőinek és az elhangzó előadásoknak a segítségével, az érdeklődők a legközvetlenebb módon nyerhetnek betekintést az Intézetben folyó kutatómunka aktuális trendjeibe, az Intézet és a Doktori Iskola hagyományaiba és hagyományteremtő törekvéseibe.

16^{30}–16^{35} Megnyitó

16^{35}–17^{25} Az Algebra és Számelmélet Tanszék fiatal kutatóinak bemutatkozása

Hannusch Carolin: *Algebrai kódok moduláris csoportalgebrák felett*
Rábai Zsolt: *Effektív módszerek a diofantikus egyenletek elméletében*
Varga Nóra: *Kombinatorikus számok és diofantikus egyenletek*

17^{30}–18^{20} Az Analízis Tanszék fiatal kutatóinak bemutatkozása

Kiss Tibor: *Szaturált műveletcsaládok és az általánosított csepp-tétel*
Popovics Bella: *Müntz-típusú approximációs tételek*
Székelyné Radácsi Éva: *Csebisev-rendszerek és lineáris kombinációik*

18^{25}–19^{15} A Geometria Tanszék fiatal kutatóinak bemutatkozása

Kertész Dávid: *Einstein-Finsler sokaságok*
Nagy Ábris: *Általánosított kúpszeletek és alkalmazásaik*

Az előadások kivonatai

Az Algebra és Számelmélet Tanszék fiatal kutatóinak bemutatkozása

Fiatal kollégáink (frissen végzett vagy végzés előtt álló PhD hallgatók) előadásai a tanszék kutatási profilját mutatják be. Az évtizedek óta rendkívül sikeres számelméleti iskolát képviseli Rábai Zsolt és Varga Nóra. Előadásaik a legjellemzőbb témakörhöz, a diofantikus egyenletek problémáihoz kapcsolódnak. A számelmélet mellett az algebra is jellemző kutatási területe a tanszéknek. Hannusch Carolin előadása ezt a kutatási területet képviseli. A tanszék legújabb kutatási területe pedig a kombinatorika.

(Gaál István, tanszékvezető, egyetemi tanár)

Hannusch Carolin

(Algebra és Számelmélet Tanszék)

Algebrai kódok moduláris csoportalgebrák felett

Legyen p prím és G csoport. Ekkor az $\mathbb{F}_p[G]$ moduláris csoportalgebra a $\sum a_i g_j$ formális összegekből áll, ahol $a_i \in \mathbb{F}_p$ és $g_j \in G$. Az $\mathbb{F}_p[G]$ ideáljait kódoknak nevezzük. Az $\mathbb{F}_p[G]$ maximális balideáljainak metszetét a csoportalgebra Jacobson-radikáljának nevezzük. A Reed-Muller kódok, melyek egy fontos kódosztályt alkotnak, épp ilyen radikál hatványaiként definiálhatók. Ehhez a témakörhöz kapcsolódik a Drensky-Lakatos probléma (1989): Létezik-e minden m és $d \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil$ szám esetén olyan 2^m-rendű G csoport, hogy a $J(\mathbb{F}_p[G])$ radikál valamely hatványa egy önduális $(2^m, 2^{m-1}, 2^d)$-paraméterű kód? A válasz erre a kérdésre: Igen (Hannusch, C., Lakatos, P., Construction of self-dual radical 2-codes of given distance, Discrete Mathematics, Algorithms and Applications 4 (2012), 1250052). Egy kódot láthatónak nevezünk, ha létezik olyan bázisa, melynek minimális távolsága megegyezik a kód minimális távolságával. Új kódosztályokat találtunk, melyek láthatóak (Hannusch, C., Lakatos, P., Visible codes in the radical of modular group algebras, megjelenés alatt).

Rábai Zsolt
(Algebra és Számelmélet Tanszék)

Effektív módszerek a diofantikus egyenletek elméletében

Diofantikus egyenleten olyan egész együtthatós, két- vagy többismeretlenes algebrai egyenletet értünk, melynek megoldásait az egész számok halmazán keressük. Matiyasevich 1970-ben bebizonyította, hogy nincs olyan általános eljárás, amely segítségével véges sok lépésben eldönthető egy tetszőleges egyenletről, hogy véges sok lépésben megoldható-e. Ezt követően a téma kutatóinak figyelme olyan eljárások felé fordult, amelyekkel diofantikus egyenletek minél szélesebb családjait kezelhetjük.
Mind Phd-tanulmányaim, mind eddigi kutatásaim középpontjában a diofantikus egyenletekkel kapcsolatos effektív eljárások voltak. Más szóval olyan eljárások, melyek alkalmasak (legalább elméletileg) diofantikus egyenletek megoldásainak meghatározására.
Előadásomban saját kutatási eredményeimen keresztül szeretnék bemutatni néhány ilyen eljárást.

Varga Nóra
(Algebra és Számelmélet Tanszék)

Kombinatorikus számok és diofantikus egyenletek

PhD kutatásom legfőbb témája a figurális számok egyenlő értékeinek vizsgálata volt. Jelölje $f_{k,m}(X)$ az X-edik figurális számot k,m paraméterekkel. Ekkor a vizsgált egyenlet az $f_{k,m}(x) = f_{l,n}(y)$, ahol az x, y egész megoldásokat keressük. Az eddigi kutatások közül a $(k, l) = (3, 2)$ és az ennél általánosabb, $l = 2$ esetből készültek cikkek.

Vizsgáltuk az $f_{3,m}(x-2)+f_{2,m}(x-1)+x+1 = f_{2,n}(y)$ egyenletet, amelyben szintén a figurális számok tűnnek fel és Mordell egy klasszikus egyenletének az általánosítása.

Vizsgálataim másik iránya az Erdős–Selfridge probléma egy speciális esete volt, amely során azt bizonyítottuk, hogy mikor lehet teljes hatvány két polinom hányadosa.

Az Analízis Tanszék fiatal kutatóinak bemutatkozása

A tanszék legrégebbi, napjainkban is meghatározó kutatási területe a függvényegyenletek és -egyenlőtlenségek elmélete. A 80-as évektől kezdődően azonban a kutatási spektrum jelentősen bővült. Jelenleg, az említett témakörök mellett kiterjedt kutatások folynak a matematikai analízis olyan fontos területein is, mint a lineáris és nemlineáris funkcionálanalízis, konvex és nemsima analízis, harmonikus analízis, valamint a parciális differenciálegyenletek elmélete. Ez alkalommal tanszékünk három PhD hallgatója mutatkozik be. Kiss Tibor a konvex, illetve nemsima analízis egy fontos állításának az úgynevezett csepp-tételnek a lehetséges általánosításáról fog beszélni. Az említett tétel egy olyan általánosításáról lesz szó, ami lineáris terek helyett tetszőleges halmazokat, konvex kombinációk helyett pedig általánosabb, absztrakt műveleteket használ. Popovics Anna Bella egy, Herman Müntz nevéhez fűződő approximácimációelméleti tétel bizonyítását, illetve az említett állítás lehetséges általánosításait mutatja be. Székelyné Radácsi Éva pedig a Csebisev-rendszerek és lineáris kombinációik című előadásában egy, Bessenyei Mihály és Páles Zsolt által elért eredményt általánosít. Előadásában megmutatja, hogy minden $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ n-dimenziós Csebisev-rendszer esetén létezik egy nullától különböző $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor úgy, hogy $a_1\omega_1(x) + \cdots + a_n\omega_n(x) \geq 0$ minden $x \in I^\circ$ esetén, továbbá egyenlőség legfeljebb $\frac{n-1}{2}$ pontban állhat fent I belsejében.

(Páles Zsolt, tanszékvezető, egyetemi tanár)

Kiss Tibor

(Analízis Tanszék)

Szaturált műveletcsaládok és az általánosított csepp-tétel

Ha X lineáris tér, valamint $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq X$ konvex halmazok, akkor összegyűjtve az összes olyan konvex kombinációt, melyben a kombináló együtthatók rendre a megfelelő halmazból kerülnek ki, azaz tekintve a

$$\{t_1a_1 + \cdots + t_na_n \mid a_j \in A_j,\ 0 \leq t_j,\ t_1 + \cdots + t_n = 1\}$$

halmazt, a megadott $A_1, A_2, \dots, A_n$ halmazok konvex burkához jutunk. Ha speciálisan $n = 2$, továbbá az egyik halmaz egyelemű, akkor a standard csepp-tétel állítását kapjuk, nevezetesen

$$\operatorname{conv}(A \cup \{x\}) = \{tx + (1-t)a \mid a \in A, t \in [0,1]\},$$

ahol $A \subseteq X$ konvex, $x \in X$ pedig tetszőlegesen rögzített.

Az előadásomban ez utóbbi tétel egy lehetséges általánosításáról szeretnék beszélni, amely lineáris terek helyett tetszőleges halmazokat, konvex kombinációk helyett pedig általánosabb, absztrakt műveleteket használ. Ebben a konstrukcióban nagy szerepet játszanak a szaturált műveletcsaládok.

Irodalomjegyzék

1. Páles Zs., *Geometric versions of Rodé's theorem*, Rad. Mat. **8** (1992/98), no. 2, 217–229.
2. H. König, *On the abstract Hahn–Banach theorem due to Rodé*, Aequationes Math. **34** (1987), no. 1, 89–95.
3. Kiss T., *Elválasztási tételek általánosított konvex függvényekre*, Diplomamunka (2014)

Popovics Anna Bella

(Analízis Tanszék)

Müntz-típusú approximációs tételek

A matematikai analízis egyik jelentős eredménye a Karl Weierstrass nevéhez fűződő approximációs tétel, mely szerint az $1, x, x^2, \ldots$ monomok lineáris kombinációinak halmaza sűrű a valós számok egy zárt intervallumán értelmezett folytonos függvények terében. Herman Müntz 1914-ben adott választ arra, hogy milyen szükséges és elégséges feltétel adható a $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ pozitív tagú, ∞-hez tartó sorozatra, mellyel az $1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \ldots$ lineáris kombinációinak halmaza sűrű a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények terében. Az előadás célja a Müntz-tétel ismertetése, illetve néhány lehetséges általánosítás bemutatása.

Székelyné Radácsi Éva
(Analízis Tanszék)

Csebisev-rendszerek és lineáris kombinációik

Legyen I nyílt intervallum, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Azt mondjuk, hogy $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ pozitív n-dimenziós Csebisev-rendszer, ha minden $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ I-beli elemcsalád esetén

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x_1) & \omega_1(x_2) & \ldots & \omega_1(x_n) \\ \omega_2(x_1) & \omega_2(x_2) & \ldots & \omega_2(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_n(x_1) & \omega_n(x_2) & \ldots & \omega_n(x_n) \end{vmatrix} > 0.$$

2003-ban M. Bessenyei and Zs. Páles [1] bebizonyította, hogy ha (ω_1, ω_2) egy 2-dimenziós Csebisev-rendszer, akkkor léteznek a_1, a_2 valós számok úgy, hogy $a_1\omega_1(x) + a_2\omega_2(x) > 0$ minden $x \in I^\circ$ esetén. Ezen eredmény lehetővé tette az (ω_1, ω_2)-konvex függvények karakterizálását.

Célunk általánosítani a fenti eredményt és megmutatni, hogy minden $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ n-dimenziós Csebisev-rendszer esetén létezik egy nullától különböző $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor úgy, hogy $a_1\omega_1(x) + \cdots + a_n\omega_n(x) \geq 0$ minden $x \in I^\circ$ esetén, továbbá egyenlőség legfeljebb $\frac{n-1}{2}$ pontban állhat fenn I belsejében. Nyitott probléma marad, hogy az $\frac{n-1}{2}$ korlátot ki tudjuk-e 0-val cserélni.

Irodalomjegyzék

1. M. Bessenyei, Zs. Páles, *Hadamard-type inequalities for generalized convex functions*, Math. Inequal. Appl. **6** (2003), 379–392.

A Geometria Tanszék fiatal kutatóinak bemutatkozása

A debreceni Geometria Tanszék főbb kutatásai a Varga Ottó akadémikus által több mint 70 éve alapított Finsler geometriai iskola nyomdokain haladnak, melyet Rapcsák András, Tamássy Lajos és tanítványaik eredményei fémjeleznek. Mindkét előadó a tanítványok tanítványa, Varga Ottó déd-, illetve ükunokája. Mint látni fogjuk, témaválasztásukban és megközelítési módszereikben ötvöződik az értékek megőrzésének, továbbvitelének gondolata, s egyúttal az útkeresés, a merőben új módszerek és azok alkalmazásának igénye. Kertész Dávid előadása olyan területet érint, amely a Riemann geometria klasszikusának mondható – ez az Einstein-Riemann sokaságok analízise – azonban a tágabb tértípusban, a Finsler térben való megfogalmazása és elemzése egészen friss, újkeletű. Nagy Ábris előadása rámutat arra, hogy mély problémák megoldását nyújtó módszerekhez olykor egyszerű geometriai alakzatok és összefüggések általánosításával lehet eljutni.

(Kozma László, tanszékvezető, egyetemi docens)

Kertész Dávid

(Geometriai Tanszék)

Einstein–Finsler sokaságok

Hagyományosan *Einstein–sokaság*oknak azokat a Riemann–sokaságokat nevezik, amelyek Ricci-féle görbületi tenzora arányos a metrikus tenzorral:

$$(*) \qquad \mathrm{Ric} = \lambda g.$$

Az Einstein–sokaságok vizsgálata geometriai és fizikai irányból is motivált. A kétdimenziós esetben az Einstein-sokaságok éppen a jól ismert konstans görbületű modell-terekre, a gömbre, a Euklideszi síkra és a hiperbolikus síkra redukálódnak. Így a magasabb dimenziós Einstein-sokaságok a kétdimenziós modell-terek általánosításainak tekinthetők [1]. Az Einstein-sokaságok legfontosabb alkalmazásai természetesen a modern gravitációelmélet és téridőfizika.

Az utóbbi évtizedben számos kutató próbált a Riemann-sokaságok általánosítását jelentő *Finsler-sokaságok*nak is hasonló fizikai alkalmazását találni, lásd például [3, 2]. Így előtérbe került a (∗)-gal analóg feltételnek eleget tevő Finsler-sokaságok – az úgynevezett Einstein–Finsler sokaságok – vizsgálata is. Ezek egy lehetséges iránya érdekes konkrét példák keresése a már jól ismert speciális Finsler-sokaságok körében. Az előadásban megmutatjuk, hogy ha egy Einstein–Finsler sokaság speciálisan Berwald-sokaság is, akkor az vagy Riemann-sokaságra redukálódik, vagy a Ricci-görbülete eltűnik, azaz (∗) bal oldala zérus.

Irodalomjegyzék

1. A. L. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 1987.
2. M. A. Javaloyes and M. Sánchez, *Finsler metrics and relativistic spacetimes*, arXiv preprint arXiv:1311.4770, (2013).
3. S. I. Vacaru, *Principles of Einstein–Finsler gravity and perspectives in modern cosmology*, International Journal of Modern Physics D, **21** (2012).

Nagy Ábris

(Geometriai Tanszék)

Általánosított kúpszeletek és alkalmazásaik

Általánosított kúpszeleten az euklideszi koordinátatér azon pontjainak halmazát értjük, amelyeknek egy rögzített K halmaztól mért átlagos távolsága állandó. A koordinátatér egy p pontját rögzítve az átlagos távolságot úgy határozzuk meg, hogy a K felett integráljuk p-nek a K pontjaitól mért távolságát. Az integrálás mértékének és a távolságfüggvény megfelelő választásával az általánosított kúpszeletek két eltérő alkalmazásához jutunk. Elsőként a K halmazt $\mathbb{R}^n$ részsokaságának tekintve és az indukált Riemann-féle térfogati forma szerint integrálva az euklideszi távolságfüggvényt rögzítjük. Az így definiált általánosított kúpszeletek segítségével olyan konvex testeket adhatunk meg, amelyek invariánsak az ortogonális csoport egy rögzített G részcsoportjának, de nem a teljes ortogonális csoport elemeivel szemben. Egy ilyen test által származtatott Minkowski-funkcionál nem származik belső szorzatból, ugyanakkor erre nézve G minden eleme lineáris izometria. A Minkowski geometria tehát az Euklideszi geometria alternatívája a G csoport számára.

Egy merőben más alkalmazáshoz jutunk azonban, ha az euklideszi távolság helyett az 1-normából származó távolságot tekintjük és a Lebesguemérték szerint végezzük az integrálást. Az így kapott általánosított kúpszeletfüggvény és a K halmaz koordináta-röntgenfüggvényei kölcsönösen meghatározzák egymást. Bizonyos feltételek mellett az is igaz, hogy ha az L_n halmazsorozat elemeihez tartozó általánosított kúpszeletfüggvények konvergálnak a K halmazhoz tartozó általánosított kúpszeletfüggvényhez, akkor $L_n \to K$ a Hausdorff-távolságra nézve, amennyiben K egyértelműen meghatározott a koordináta-röntgenfüggvényei által. Ezen lokalizációs tétel segítségével egy geometriai algoritmus adható a K halmaz rekonstruálására, amennyiben csak a koordináta-röntgenfüggvényeit ismerjük. Az algoritmus fő lépése pedig lényegében visszavezethető egy $0-1$ változós lineáris programozási feladat megoldására.