OMEGA-KATEGORIKUS STRUKTÚRÁK ÉS ALGEBRAI INVARIÁNSAIK

PONGRÁCZ ANDRÁS

Abstract. Az ω-kategorikus struktúrák elméletében nagyon hasznos eszköz azok algebrai invariánsainak - pl. automorfizmuscsoport vagy polimorfizmusklón - vizsgálata. Maga az ω-kategoricitás is leolvasható az automorfizmuscsoportból. Ebben a cikkben összefoglalunk néhány, az ω-kategorikus struktúrák reduktjaival, algebrai invariánsaival és azok közötti homomorfizmusokkal kapcsolatos fontos eredményt, illetve ezek alkalmazásait elméleti számítástudományban.

1. Bevezetés

1.1. **Rövid áttekintés.** A legfontosabb definíciók tisztázása után néhány olyan, egymással szorosan öszefüggő kérdéskört tárgyalunk ω-kategorikus struktúrákkal kapcsolatban, amikben ma is aktív kutatás folyik. A 2. fejezetben bevezetjük a redukt fogalmát, és áttekintjük a legfrissebb eredményeket, amik ω-kategorikus struktúrák reduktjait írják le valamilyen módon. A téma alapkérdése az a modellelméleti probléma, hogy milyen struktúrákat tudunk egy adott struktúrából elsőrendű formulák segítségével definiálni. A 3. fejezetben bemutatjuk, hogy az egyes algebrai invariánsok milyen információt tárolnak el a struktúráról. Bevezetünk egy természetes topológiát az automorfizmuscsoporton, az endomorfizmusmonoidon és a polimorfizmusklónon, majd megvizsgáljuk, hogy a csoport (monoid, klón) algebrai struktúrája mikor határozza meg egyértelműen a topologikus struktúrát. A 4. fejezetben kitérünk az eredmények alkalmazására elméleti számítástudományban, azon belül a "Constraint Satisfaction Problems" (CSP) témakörben. Az itt bemutatott módszer lehetőséget ad arra, hogy tagsági problémák széles osztályára igazoljuk a dichotómiasejtést, vagyis azt, hogy az adott osztályban minden problémára igaz, hogy vagy létezik egy azt polinomidőben megoldó algoritmus, vagy NP-teljes.

A szerzőt az EPSRC támogatta az Infinite-domain Constraint Satisfaction Problems, grant no. EP/L005654/1 projekt keretében.

Végül az 5. fejezetben röviden bemutatjuk az ω-kategorikus struktúrák automorfizmuscsoportjainak folyamairól szóló legfrissebb eredményeket. Ez a téma napjainkban igen népszerű, mert kapcsolatot teremtett a modellelmélet, a végtelen permutációcsoportok és a dinamikai rendszerek elmélete között. A fejezeteket nyitott problémákkal zárjuk.

1.2. **ω-kategorikus struktúrák.** A véges struktúrákat izomorfizmus erejéig egyértelműen leírja az elsőrendű elméletük, vagyis azon elsőrendű formulák halmaza, melyek igazak a struktúrában. Már Cantor is tudta, hogy a megszámlálható struktúrák körében a racionális számok $(\mathbb{Q}, <)$ teljes rendezésére ez szintén igaz, sőt elegendő egyetlen axiómát felírni, ami azt mondja ki, hogy a kétváltozós reláció egy teljes rendezés, ami végpontnélküli és sűrű. Ha egy megszámlálható Δ struktúrára fennáll, hogy $\Delta \cong \Gamma$ minden olyan megszámlálható Γ struktúrára, amiben ugyanazok az elsőrendű formulák igazak, mint Δ-ban, akkor Δ egy *ω-kategorikus* struktúra. Eszerint a véges struktúrák és $(\mathbb{Q}, <)$ egyaránt ω-kategorikusak.

Utóbbi állítás egy egyszerű, az irodalomban "back-and-forth" (vagyis "oda-vissza") algoritmusnak nevezett módszerrel látható be. Ennek lényege, hogy rögzítünk egy-egy sorozatot, amelyek felsorolják $\mathbb{Q}$ és az adott végpontnélküli sűrű rendezés, Γ elemeit, majd az izomorfizmust szisztematikusan építjük fel $(\mathbb{Q}, <)$ és Γ között. Egy általános lépésben felváltva definiálunk képet $(\mathbb{Q}, <)$ soron következő elemének, illetve ősképet Γ soron következő elemének (feltéve, hogy még nincs neki). Vagyis a páratlan sorszámú lépésekben egy Γ-beli elemet rendelünk $(\mathbb{Q}, <)$ legkisebb indexű eleméhez, aminek még nincs képe, a páros sorszámú lépésekben pedig keresünk egy alkalmas elemet a $(\mathbb{Q}, <)$ struktúrában, amihez Γ legkisebb indexű kimaradt elemét rendelve továbbra is izomorfizmust kapunk. Azt, hogy egy adott köztes állapotból ez az algoritmus minden esetben folytatható, éppen az garantálja, hogy mindkét teljes rendezés végpontnélküli és sűrű. Ezt részletesen abban az esetben indokoljuk, amikor $(\mathbb{Q}, <)$ soron következő elemének definiálunk képet, a másik eset teljesen hasonlóan működik. Legyen az adott köztes állapotban a már felépített izomorfizmus $a_1 \mapsto b_1, \ldots, a_k \mapsto b_k$, és tegyük fel, hogy az $u \in (\mathbb{Q}, <)$ elemnek kell képet találnunk Γ-ban. Ha $u < a_1$, akkor bármilyen $v < b_1$ megfelelő: ilyen v létezik, hiszen Γ-nak nincs legkisebb eleme. Hasonlóan járunk el, ha $u > a_k$. Végül ha $a_i < u < a_{i+1}$, akkor tetszőleges v megfelel u képének, amire $b_i < v < b_{i+1}$: ilyen elem azért létezik, mert Γ sűrű. Mivel $\mathbb{Q}$ minden eleme sorra kerül egyszer ősképként, és Γ minden eleme sorra kerül egyszer képként, így végtelen sok lépésben az algoritmus valóban izomorfizmust ad meg $(\mathbb{Q}, <)$ és Γ között.

Általában természetesen nem várhatjuk, hogy egy végtelen ω-kategorikus struktúrát egyetlen axióma írjon le izomorfizmus erejéig, ehhez tipikusan végtelen sok elsőrendű formulára van szükség a struktúra elméletéből.

Ryll-Nardzewski, Engeler és Svenonius egymástól függetlenül karakterizálta az ω-kategorikus struktúrákat. A három szerző több ekvivalens karakterizációt is adott, mi részletesen csak Ryll-Nardzewski eredményét tárgyaljuk. Egy Δ struktúra automorfizmuscsoportja természetes módon hat Δ minden hatványán: az $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ permutációt - mint függvényt - koordinátánként alkalmazhatjuk Δ^n elemeire, vagyis $\alpha(a_1, \ldots, a_n) = (\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n))$. Ryll-Nardzewski tétele szerint egy megszámlálható Δ struktúra pontosan akkor ω-kategorikus, ha $\mathrm{Aut}(\Delta)$ *oligomorf*, vagyis minden így kapott csoporthatásnak csak véges sok orbitja van. Ez alapján nagyon könnyű új bizonyítást adni arra, hogy $(\mathbb{Q}, <)$ ω-kategorikus. Nyilvánvaló ugyanis, hogy egy $(t_1, \ldots, t_n) \in (\mathbb{Q}, <)^n$ n-es orbitjában pontosan azok az $(s_1, \ldots, s_n) \in (\mathbb{Q}, <)^n$ n-esek vannak, amikre a $t_i \mapsto s_i$ függvény rendezéstartó. (Minden ilyen hozzárendelés kiterjeszthető $(\mathbb{Q}, <)$-re egy szigorúan monoton növő, szakaszonként lineáris függvénnyé, ami $(\mathbb{Q}, <)$-nek automorfizmusa.) Vagyis egy $(t_1, \ldots, t_n) \in (\mathbb{Q}, <)^n$ orbitját egyértelműen meghatározza az, hogy a $t_1, \ldots, t_n$ elemek hogyan vannak rendezve. Mivel n elemet csak véges sok módon lehet rendezni, így $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ oligomorf, vagyis $(\mathbb{Q}, <)$ ω-kategorikus. Ez a gondolatmenet vezet el a homogén struktúra definíciójához.

1.3. **Homogén struktúrák.** Amint arra az előző levezetésben utaltunk, egy $(t_1, \ldots, t_n) \in (\mathbb{Q}, <)^n$ orbitját egyértelműen meghatározza, hogy a benne szereplő elempárokra a $<, >$ és $=$ relációk közül melyik áll fenn. Vagyis ha két n-es lokálisan "ugyanúgy néz ki", akkor nem lehet köztük semmilyen módon különbséget tenni a struktúrán belül. Ilyen esetben azt mondjuk, hogy a struktúra *homogén*. Precízen, egy megszámlálható Δ struktúra homogén, ha tetszőleges A, B végesen generált részstruktúrákra és $\varphi : A \to B$ izomorfizmusra létezik a struktúrának egy $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ automorfizmusa, amire $\alpha \restriction_A = \varphi$. A végesen generált részstruktúrák közötti izomorfizmusokat a struktúra *parciális izomorfizmusainak* nevezzük. Ez alapján úgy fogalmazhatunk, hogy egy megszámlálható struktúra akkor homogén, ha minden parciális izomorfizmusa kiterjed automorfizmussá. A homogenitás definíciójára úgy is gondolhatunk, mint az a feltétel, ami garantálja, hogy az oda-vissza algoritmus minden köztes állapotból folytatható. A $(\mathbb{Q}, <)$

struktúra tehát homogén. Megjegyezzük, hogy a legtöbb struktúra nyelve, amivel foglalkozunk, nem tartalmaz függvényjeleket, sőt általában konstansokat sem. Vagyis a legtöbb struktúra ebben a cikkben *relációs struktúra*, azaz nyelvük csupán relációkból áll. Ilyen esetben a homogenitás definíciójában szereplő "végesen generált" kifejezés lecserélhető a "véges" szóra, hiszen relációs struktúrákban minden részhalmaz saját magát generálja.

A homogén struktúrákat Fraïssé vizsgálta először átfogóan. A már említett "oda-vissza" algoritmus segítségével belátta, hogy a homogén struktúrákat izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározza a *véges nyomuk*. Egy megszámlálható Δ struktúra véges nyoma azokból a végesen generált struktúrákból áll, amik beágyazhatók Δ-ba, és ezt az osztályt $\mathrm{Age}(\Delta)$ jelöli. Fraïssé karakterizálta azokat az osztályokat, amik megegyeznek valamely homogén struktúra véges nyomával. Eszerint egy adott megszámlálható nyelv feletti végesen generált struktúrákból alló $\mathcal{K}$ osztály pontosan akkor véges nyoma egy homogén struktúrának, ha a következő egyszerű feltételek fennállnak.

- Izomorfizmus erejéig $\mathcal{K}$-ban megszámlálható sok struktúra van.
- $\mathcal{K}$ lefelé zárt, vagyis ha $B \in \mathcal{K}$ és A beágyazható B-be, akkor $A \in \mathcal{K}$. (Következésképpen $\mathcal{K}$ izomorfizmusra zárt.)
- *Közös kiterjeszthetőség tulajdonsága*: minden $B_1, B_2 \in \mathcal{K}$ esetén létezik $C \in \mathcal{K}$, amibe B_1 és B_2 is beágyazható.
- *Vegyítési tulajdonság*: ha $A, B_1, B_2 \in \mathcal{K}$ és $\varphi_1 : A \hookrightarrow B_1$, $\varphi_2 : A \hookrightarrow B_2$ beágyazások, akkor létezik egy $C \in \mathcal{K}$ és $\psi_1 : B_1 \hookrightarrow C$, $\psi_2 : B_2 \hookrightarrow C$ beágyazások, amikre $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$.

Megjegyezzük, hogy általában a vegyítési tulajdonságból nem következik a közös kiterjeszthetőség. Egy egyszerű példa, amit [33] is említ, az összes véges test osztálya. Erre nem teljesül a közös kiterjeszthetőség, hiszen ha B_1 és B_2 karakterisztikája különböző, akkor lehetetlen ezeket ugyanabba a testbe ágyazni. A vegyítési tulajdonság ellenőrzése azonban rutin feladat. Ott ugyanez a probléma nem léphet fel, hiszen ha egy A véges testet be tudunk ágyazni B_1-be és B_2-be, akkor mindhárom test karakterisztikája megegyezik. Ha a nyelv nem tartalmaz függvényjeleket és konstansokat, csak relációkat, akkor a vegyítési tulajdonságból és a lefelé zártságból következik az együttes kiterjeszthetőség tulajdonsága ($A = \emptyset$ választással), így ilyenkor elég előbbieket leellenőrizni.

Ha egy végesen generált struktúrákból alló $\mathcal{K}$ osztályra fennállnak a fenti felsorolásban szereplő tulajdonságok, akkor $\mathcal{K}$ egy *Fraïssé-osztály.* A továbbiakban $\mathrm{Flim}(\mathcal{K})$ jelöli azt az (izomorfizmus erejéig) egyértelmű struktúrát, aminek $\mathcal{K}$ a véges nyoma, feltéve, hogy ilyen létezik. Ez a Fraïssé-osztály *Fraïssé-limesze.* Ha $\mathcal{K}$ az összes véges teljes rendezés osztálya, akkor $\mathrm{Flim}(\mathcal{K}) = (\mathbb{Q}, <)$. Ha $\mathcal{K}$ az összes véges gráf osztálya, akkor $\mathrm{Flim}(\mathcal{K})$ az Erdős-Rényi-féle véletlen gráf. Ez az a gráf, amit 1 valószínűséggel megkapunk (izomorfizmus erejéig) ha egy megszámlálható alaphalmazba minden élet egymástól függetlenül 1/2 valószínűséggel húzunk be. Teljesen hasonlóan definiálhatók a véletlen k-uniform hipergráfok minden $k \geq 2$-re, és a véletlen turnament is. Ezeket a struktúrákat a legegyszerűbben Fraïssé felépítésében lehet tárgyalni: mind $\mathrm{Flim}(\mathcal{K})$ alakban állnak elő, előbbiek esetében $\mathcal{K}$ az összes véges k-uniform hipergráf, utóbbi esetben az összes véges turnament osztálya. Az, hogy ezen osztályok mindegyike Fraïssé-osztály, egyszerűen igazolható. Az egyetlen nemtriviális lépés a vegyítési tulajdonság ellenőrzése, melyet a véges gráfok osztályával illusztrálunk. Adott $\varphi_1 : A \hookrightarrow B_1$, $\varphi_2 : A \hookrightarrow B_2$ esetén legyen C az a struktúra, amit B_1 és B_2 diszjunkt uniójából kapunk az A-beli elemek képeinek azonosításával. Ez alatt azt értjük, hogy a diszjunkt uniót lefaktorizáljuk azzal az ekvivalenciarelációval, ami azonosítja a $(\varphi_1(a), \varphi_2(a))$ alakú párokat minden $a \in A$-ra. Az ekvivalenciaosztályok halmazán azok a párok lesznek élek, amelyek B_1-beli vagy B_2-beli reprezentánsai élt alkotnak. Ekkor azt mondjuk, hogy összeragasztjuk B_1-et és B_2-t A mentén. A véletlen turnament esetén ugyanez a konstrukció általában nem képez turnamentet, hiszen $B_1 \setminus \varphi_1(A)$ és $B_2 \setminus \varphi_2(A)$ között nem definiáltunk éleket. Ha azonban minden ilyen pontpárra tetszőlegesen választunk egyet a két lehetséges irányított él közül, akkor a kapott C turnament megfelel a vegyítési tulajdonság feltételének.

Ryll-Nardzewski tételéből közvetlenül adódik, hogy minden véges relációs nyelv feletti homogén struktúra ω-kategorikus, így az összes fentebb említett példa is.

Megemlítünk két példát, amikben konstansok és függvényjelek is vannak. Ha $\mathbb{F}_q$ a q-elemű véges test, akkor az összes $\mathbb{F}_q$ feletti véges dimenziós vektortér egy Fraïssé-osztály. Ennek Fraïssé-limesze az $\mathbb{F}_q$ feletti megszámlálhatóan végtelen dimenziós vektortér. Ha pedig $\mathcal{K}$ az összes véges Boole-algebrából áll, akkor $\mathrm{Flim}(\mathcal{K})$ a megszámlálható atommentes Boole-algebra. Ezek a struktúrák szintén ω-kategorikusak.

Henson vette észre [31], hogy az összes K_n-mentes véges gráf szintén Fraïssé-osztályt alkot. Adott $n \geq 3$ esetén ennek az osztálynak a Fraïssé-limeszét az n-edik Henson-gráfnak hívjuk, és (H_n, E)-vel jelöljük. Lachlan és Woodrow belátták [39], hogy triviális példáktól eltekintve nincs más megszámlálhatóan végtelen homogén gráf, mint a véletlen gráf, a Henson gráfok és azok komplementerei. Lachlan karakterizálta a homogén turnamenteket [38], Schmerl pedig a homogén részbenrendezéseket [54]. Cherlin adott áttekinthető leírást az összes homogén irányított gráfra, amikben két elem között legfeljebb egy irányított él fut [24]. Ez az eredmény azért is figyelemre méltó, mert ilyen gráfból kontinuum sok van, és mert egyszerre általánosítja Lachlan és Schmerl tételeit.

A legérdekesebb homogén részbenrendezés az összes véges részbenrendezett halmaz Fraïssé-limeszeként előálló *generikus részbenrendezés*, vagy más néven *véletlen részbenrendezés*. Erre az osztályra is fennáll a vegyítési tulajdonság, ám ennek igazolása a korábbi esetekhez képest nagyobb óvatosságot igényel. Ha ugyanis összeragasztjuk a B_1 és B_2 részbenrendezett halmazokat A mentén, akkor általában nem kapunk részbenrendezést, hiszen a tranzitivitás sérülhet. Így az összeragasztott struktúra tranzitív lezártját érdemes C-nek választani. Vagyis a véletlen hipergráfokhoz és a véletlen turnamenthez hasonlóan itt is igaz, hogy minden vegyítés elvégezhető úgy, hogy C-ben B_1 és B_2 beágyazott példányai éppen A képében messék egymást. Ekkor azt mondjuk, hogy az osztályra teljesül az *erős vegyítési tulajdonság.* Könnyű meggondolni, hogy relációs nyelvek feletti osztályokra ez azzal ekvivalens, hogy az osztály Δ Fraïssé-limeszének automorfizmuscsoportjában minden véges $H \subseteq \Delta$ halmaz stabilizátora pontosan H elemeit stabilizálja. Ekkor azt mondjuk, hogy Δ-ban *nincs algebraicitás.*

Megjegyezzük, hogy a generikus részbenrendezésnek valóban van egy a véletlen gráfhoz hasonló *véletlen konstrukciója.* Ez a fogalom precízen definiálható, és Ackerman, Freer és Patel [1, Theorem 1.1] meghökkentő eredménye szerint a véletlen konstrukció létezése ekvivalens azzal, hogy a struktúrában nincs algebraicitás. Mint azt fentebb megmutattuk, ez a tulajdonság a generikus részbenrendezésre fennáll, ezért indokolt a véletlen részbenrendezés elnevezés.

Csak a véletlen gráfról rengeteg cikk és összefoglalás jelent meg. A teljesség igénye nélkül az olvasó figyelmébe ajánljuk Cameron cikkét [22], melyben többek között igazolja az erős kis index tulajdonságot a véletlen gráfra, Fagin nulla-egy törvényét [27], ami kapcsolatot teremt véges véletlen gráfok és a végtelen véletlen gráf elmélete között, illetve Truss eredményét, miszerint a véletlen gráf automorfizmuscsoportja egyszerű [59]. Homogén struktúrákról két kiváló angol nyelvű összefoglalót ajnánlhatunk [42, 23], előbbinek egy bővített változata is elérhető [41]. Általában ω-kategorikus struktúrákról, Ryll-Nardzewski, Engeler és Svenonius tételeiről és Fraïssé felépítéséről Hodges könyvében [33] olvashatunk.

2. Reduktok

2.1. **Definiálható struktúrák.** Egy Δ struktúra *reduktjai* alatt azokat a Γ relációs struktúrákat értjük, amelyek alaphalmaza megegyezik Δ alaphalmazával, és amiknek minden relációja elsőrendben definiálható Δ-ban. Két relációs struktúra *elsőrendben átdefiniálható* ha egymás reduktjai, vagyis mindkettő relációi elsőrendben definiálhatók a másik struktúrában.

Példa 2.1. A $(\mathbb{Q},<)$ struktúrának reduktjai a $(\mathbb{Q},\mathrm{Betw})$ és a $(\mathbb{Q},>)$ struktúrák, ahol a Betw háromváltozós reláció a következő formulával adható meg: $(x,y,z)\in\mathrm{Betw}\Leftrightarrow(x<y\wedge y<z)\vee(z<y\wedge y<x)$. Teljesen világos, hogy $(\mathbb{Q},<)$ és $(\mathbb{Q},>)$ elsőrendben átdefiniálhatók, hiszen $x<y\Leftrightarrow y>x$.

Bár ezek a fogalmak tökéletesen értelmesek bármilyen struktúrára, mi csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor Δ ω-kategorikus. A legtöbb konkrét eredmény véges relációs nyelv feletti homogén struktúráról szól. Fontos, hogy Ryll-Nardzewski tételéből közvetlenül következik, hogy egy ω-kategorikus struktúra minden reduktja ω-kategorikus. Érdekes módon hasonló eredmény nem igaz a véges relációs nyelvek feletti homogén struktúrákra. Lachlan mutatott példát egy olyan véges relációs nyelv feletti homogén struktúrára, aminek egy reduktja semmilyen véges nyelv felett nem homogén, vagyis nem elsőrendben átdefiniálható egy véges nyelv feletti homogén struktúrával. Eredményét sajnos nem publikálta, egy rövid összefoglalás a tételről és bizonyításáról [56]-ban található. Megjegyezzük, hogy minden ω-kategorikus struktúra homogén egy megszámlálható relációs nyelv felett: ha ugyanis minden elsőrendben definiálható relációt beveszünk a nyelvbe, akkor az eredetivel elsőrendben átdefiniálható homogén struktúrát kapunk.

Ha Δ egy tetszőleges struktúra, és az R reláció egy elsőrendű ϕ formulával definiálható Δ-ban, akkor a ϕ hossza szerinti indukcióval könnyen igazolható, hogy Δ minden automorfizmusa megőrzi R-et. Eszerint ha Γ reduktja Δ-nak, akkor $\mathrm{Aut}(\Delta)\subseteq\mathrm{Aut}(\Gamma)$. A megfordítás nem igaz teljes általánosságban, de Ryll-Nardzewski tételének egy következménye szerint igaz ω-kategorikus struktúrákra. Vagyis ha Δ ω-kategorikus, akkor egy Γ struktúra pontosan akkor reduktja Δ-nak, ha $\mathrm{Aut}(\Delta)\subseteq\mathrm{Aut}(\Gamma)$. Ennek következménye, hogy két redukt (vagy általában két ω-kategorikus struktúra), Γ_1 és Γ_2 pontosan akkor elsőrendben átdefiniálható, ha $\mathrm{Aut}(\Gamma_1)=\mathrm{Aut}(\Gamma_2)$. Így ha meg szeretnénk érteni Δ reduktjait elsőrendű átdefiniálhatóság erejéig, akkor elég karakterizálni azokat az $\mathrm{Aut}(\Delta)$-t tartalmazó csoportokat, amik előállnak $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ alakban. Ebből az észrevételből következik, hogy a 2.1. Példában említett $(\mathbb{Q},<)$ és $(\mathbb{Q},\mathrm{Betw})$ struktúrák nem elsőrendben átdefiniálhatók, hiszen $(\mathbb{Q}, \mathrm{Betw})$-nek minden rendezésfordító permutáció automorfizmusa. Vagyis $(\mathbb{Q}, \mathrm{Betw})$ egy valódi reduktja $(\mathbb{Q}, <)$-nek.

2.2. **Zárt csoportok.** A továbbiakban rögzítünk egy ω-kategorikus Δ relációs struktúrát, és annak alaphalmazát D fogja jelölni. Jelöljük $\mathrm{Sym}(D)$-vel azt a permutációcsoportot, ami a D halmaz összes permutációjából áll. Ezen a csoporton a következőképpen adható meg egy topológia. (A topológiát a lezárási operátorával adjuk meg.) Ha $S \subseteq \mathrm{Sym}(D)$, akkor S lezártja azokból a β permutációkból áll, amik D minden véges részhalmazán interpolálhatók S valamely elemével, vagyis minden véges $F \subseteq D$ esetén létezik egy $\alpha \in S$, amire $\alpha \restriction_F = \beta \restriction_F$. Az így definiált topológiával $\mathrm{Sym}(D)$ egy *topologikus csoport*, vagyis egyszerre csoport és topologikus tér úgy, hogy a szorzás és az inverzképzés folytonos műveletek. Könnyű belátni, hogy $\mathrm{Sym}(D)$ egy részcsoportja pontosan akkor áll elő $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ alakban, ha zárt. Így Δ reduktjai egy-egyértelmű megfeleltetésben állnak $\mathrm{Sym}(D)$-nek az $\mathrm{Aut}(\Delta)$-t tartalmazó zárt részcsoportjaival.

Ryll-Nardzewski tételének legerősebb formája azt mondja ki, hogy Galois-kapcsolat áll fenn Δ reduktjai és az $\mathrm{Aut}(\Delta)$-t tartalmazó permutációcsoportok között. A Galois-kapcsolat az Aut és az Inv operátorokkal adható meg. Az Aut operátor minden redukthoz annak automorfizmuscsoportját rendeli, míg Inv az $\mathrm{Aut}(\Delta)$-t tartalmazó permutációcsoportokhoz rendeli Δ-nak azt a reduktját, ami az összes olyan D-n értelmezett relációt tartalmazza, melyeket az adott csoport megőriz. Mint minden Galois-kapcsolat, ez is megad egy lezárási operátort a csoportokon: egy G csoport lezártja $\mathrm{Aut}(\mathrm{Inv}(G))$. Megmutatható, hogy ez a lezárási operátor egybeesik a fent definiálttal. Ahhoz, hogy Galois-kapcsolatról beszélhessünk, meg kell adnunk egy-egy kvázirendezést az $\mathrm{Aut}(\Delta)$-t tartalmazó részcsoportokon és Δ reduktjain. A csoportokon $G_1 \preceq G_2$ pontosan akkor, ha G_2 lezártja tartalmazza G_1-et, míg két reduktra $\Gamma_1 \preceq \Gamma_2$ akkor és csak akkor ha Γ_1 reduktja Γ_2-nek. Ez utóbbi kompatibilis az elsőrendű átdefiniálhatósággal, vagyis ha $\tilde{\Gamma}$ jelöli a Γ ekvivalenciaosztályát, akkor jóldefiniált úgy megadni egy részbenrendezést a reduktok ekvivalenciaosztályain, hogy $\tilde{\Gamma}_1 \preceq \tilde{\Gamma}_2$ akkor és csak akkor, ha Γ_1 reduktja Γ_2-nek. Ezek alapján a következő tétel fogalmazható meg.

Tétel 2.1 (Ryll-Nardzewski)**.** *Legyen Δ egy ω-kategorikus relációs struktúra, melynek D az alaphalmaza. Ekkor az* Aut *és* Inv *operátorok rendezésfordító Galois-kapcsolatot teremtenek* $\mathrm{Sym}(D)$*-nek az* $\mathrm{Aut}(\Delta)$*-t tartalmazó részcsoportjai és Δ reduktjai között. Ez a Galois-kapcsolat* *egy rendezésfordító, egy-egyértelmű megfeleltetést ad meg a zárt részcsoportok és a reduktok elsőrendű átdefiniálhatóság erejéig vett ekvivalenciaosztályai között.*

Vagyis az $\mathrm{Aut}(\Delta)$-t tartalmazó zárt részcsoportok karakterizálásával nemcsak Δ reduktjait érthetjük meg, de még az is leolvasható belőle, hogy az egyes reduktokból mely reduktokat lehet elsőrendben definiálni. Triviális speciális esetként érdemes megjegyezni, hogy egy ω-kategorikus Δ struktúrában egy R reláció pontosan akkor elsőrendben definiálható, ha R-et minden $\mathrm{Aut}(\Delta)$-beli permutáció megőriz. Vagyis a Δ-ban elsőrendben definiálható n-változós relációk éppen azok a halmazok Δ^n-ben, amelyek előállnak $\mathrm{Aut}(\Delta)$-orbitok uniójaként. Így minden $n \geq 1$-re Δ-ban csak véges sok elsőrendben definiálható n-változós reláció van. Ez a tulajdonság a megszámlálható struktúrák körében ekvivalens az ω-kategoricitással [33].

A 2.1. Tétel segítségével számos konkrét esetben sikerült karakterizálni ω-kategorikus struktúrák reduktjait elsőrendű átdefiniálhatóság erejéig. Cameron igazolta, hogy pontosan 5 zárt csoport van $\mathrm{Sym}(\mathbb{Q})$-ban, ami tartalmazza $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q},<)$-et [21]. A véletlen gráf és a véletlen turnament automorfizmuscsoportjára érdekes módon ugyanez igaz, előbbi Thomas [56], utóbbi Bennett [6] eredménye. Thomas megmutatta, hogy a triviális $(H_n,=)$ reduktot leszámítva a (H_n,E) Henson gráfnak nincs valódi reduktja [56], a véletlen k-uniform hipergráfoknak pedig 2^k+1 reduktja van elsőrendű átdefiniálhatóság erejéig [57]. Junker és Ziegler általánosították Cameron eredményét, karakterizálva ezzel $(\mathbb{Q},<,0)$ reduktjait [36]. Megmutatták, hogy $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q},<)$-ben minden véges halmaz pontonkénti stabilizátorát csak véges sok zárt csoport tartalmazza.

Jelen cikk szerzője belátta [51], hogy a Henson-gráfokból egy konstans felvételével kapott $(H_n,E,0)$ struktúrának elsőrendű átdefiniálhatóság erejéig 16 reduktja van $n \geq 4$-re, és csupán 13 ha $n=3$. Több társszerzővel közösen megmutattuk, hogy a véletlen részbenrendezés automorfizmuscsoportját 5 zárt csoport tartalmazza [49]. Egy másik többszerzős cikk eredményeként megkaptuk a véletlen rendezett gráf reduktjait is [14]. Ez a struktúra az összes véges rendezett gráf osztályának Fraïssé-limesze. Mivel ennek egyaránt reduktja a véletlen gráf, $(\mathbb{Q},<)$ és a véletlen turnament is, így az eredmény felfogható Thomas, Cameron és Bennett korábbi tételeinek a közös általánosításaként.

A fenti eredmények bizonyításának legfontosabb közös pontja a strukturális Ramsey-elmélet alkalmazása, aminek részleteire később térünk ki. Akiknek ez a téma felkeltette az érdeklődését, azok további részletekért olvassák el Bodirsky és Pinsker összefoglalóját [11].

2.3. **Zárt monoidok.** A Δ struktúra *endomorfizmusmonoidja* azokból az $f : D \to D$ függvényekből áll, amelyek megőrzik Δ összes relációját. Az $\mathrm{End}(\Delta)$ halmaz valóban monoid, melyben az egységelem az identitásfüggvény, a szorzás pedig a kompozíció. Az endomorfizmusmonoidon belül könnyedén felismerhetők az automorfizmuscsoport elemei. Ezek éppen azok az invertálható elemek, amelyeknek az inverze is az endomorfizmusmonoidban van. Így $\mathrm{End}(\Delta)$ több információt tárol el a Δ struktúráról, mint $\mathrm{Aut}(\Delta)$. Ennek fényében nem meglepő, hogy az előbb tárgyalt Galois-kapcsolat kiterjeszthető az endomorfizmusmonoidokra, és az a reduktokat egy olyan ekvivalenciareláció erejéig karakterizálja, ami finomabb az elsőrendű átdefiniálhatóságnál. Egy formula *egzisztenciális pozitív*, ha egzisztenciális kvantorokkal kezdődik (vagy kvantormentes), és az ezeket követő kvantormentes formulában negáció nem szerepel. Például a véletlen gráf feletti $\exists x \exists y (E(x,z) \wedge E(y,z)) \vee (x = y)$ egy egzisztenciális pozitív formula. Két relációs struktúra, Γ_1 és Γ_2, *e.p.-átdefiniálható*, ha Γ_2 relációi egzisztenciális pozitív formulákkal definiálhatók Γ_1 relációiból, és viszont. Könnyen meggondolható a ϕ hossza szerinti indukcióval, hogy ha az R reláció egy egzisztenciális pozitív ϕ formulával definiálható Δ-ban, akkor Δ minden endomorfizmusa megőrzi R-et. Ha $\mathrm{Mon}(D)$ jelöli az összes D-ből D-be képező függvény monoidját, akkor ezen a halmazon teljesen hasonlóan definiálható egy lezárási operátor, mint $\mathrm{Sym}(D)$ esetében.[1] Itt is igaz, hogy egy monoid pontosan akkor zárt $\mathrm{Mon}(D)$-ben, ha valamely struktúrának endomorfizmusmonoidja. Ekkor a fentebb említett Galois-kapcsolat mintájára megadható egy Galois-kapcsolat az $\mathrm{End}(D)$-t tartalmazó zárt monoidok és Δ reduktjainak ekvivalenciaosztályai között, ahol az ekvivalenciareláció az e.p.- átdefiniálhatóság. Vagyis Δ reduktjai egzisztenciális pozitív átdefiniálhatóság erejéig egy-egyértelmű megfeleltetésben állnak az $\mathrm{End}(D)$-t tartalmazó zárt monoidokkal. A következő tétel foglalja össze ezeket az állításokat.

Tétel 2.2. *Legyen Δ egy ω-kategorikus relációs struktúra, melynek D az alaphalmaza. Ekkor az* End *és* Inv *operátorok rendezésfordító Galois-kapcsolatot teremtenek* $\mathrm{Mon}(D)$*-nek az* $\mathrm{End}(\Delta)$*-t tartalmazó részmonoidjai és Δ reduktjai között. Ez a Galois-kapcsolat egy rendezésfordító, egy-egyértelmű megfeleltetést ad meg a zárt részmonoidok és a reduktok e.p.-átdefiniálhatóság erejéig vett ekvivalenciaosztályai között.*

[1]Ezen a ponton óvatosnak kell lennünk, ha egy permutációcsoport lezártjáról beszélünk, ugyanis nem mindegy, hogy az előző alfejezet szerint tárgyalt módon, $\mathrm{Sym}(D)$-ben, vagy $\mathrm{Mon}(D)$-ben zárjuk le a halmazt. Egy zárt csoport $\mathrm{Mon}(D)$-ben jellemzően nem zárt. Pl. a véletlen gráf automorfizmuscsoportjának monoidlezártja a véletlen gráf *önbeágyazásaiból* áll, vagyis azokból az injektív endomorfizmusokból, amik a nem-él relációt is megőrzik.

2.4. **Zárt klónok.** Egy k-változós $f : \Delta^k \to \Delta$ függvény a Δ struktúrának akkor *polimorfizmusa*, ha megőrzi Δ minden relációját. Ez alatt azt értjük, hogy Δ tetszőleges n-változós R relációjára fennáll, hogy amennyiben az $(a_1^1, \ldots, a_n^1)$, …, $(a_1^k, \ldots, a_n^k)$ mindegyike R-beli, akkor $(f(a_1^1, \ldots, a_1^k), \ldots, f(a_n^1, \ldots, a_n^k)) \in R$. A polimorfizmus tehát az endomorfizmus többváltozós általánosítása. Példaképpen érdemes megjegyezni, hogy egy egyváltozós függvény pontosan akkor injektív, ha megőrzi a $\neq$ relációt. Egy többváltozós függvényre azonban ez nem igaz. Pl. egy kétváltozós függvény definíció szerint akkor őrzi meg a $\neq$ relációt, ha minden olyan esetben, amikor $a_1 \neq b_1$ és $a_2 \neq b_2$, fennáll az $f(a_1, a_2) \neq f(b_1, b_2)$ összefüggés. Ettől még a függvény rendelhet azonos értéket olyan pontpárhoz, amiknek megegyezik az első (vagy a második) koordinátája. Hogy ez nem csak elvi lehetőség, azt mutatja az az egyszerű tény is, hogy egy *projekciófüggvény* minden relációt megőriz. A k-változós i-edik projekciófüggvény az a $\pi_i^k : \Delta^k \to \Delta$ függvény, amire $\pi_i^k(a_1, \ldots, a_k) = a_i$. A Δ struktúra összes polimorfizmusának halmazát $\mathrm{Pol}(\Delta)$ jelöli.

Állítás 2.3. *Legyen Δ egy tetszőleges struktúra. Legyen $n, k \geq 1$, és legyen $f \in \mathrm{Pol}(\Delta)$ n-változós függvény, valamint $g_1, \ldots, g_n \in \mathrm{Pol}(\Delta)$ k-változós függvények. Ekkor $f \circ (g_1, \ldots, g_n)$, vagyis az $(x_1, \ldots, x_k) \in \Delta^k$-hoz $f(g_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_k))$ értéket rendelő függvény szintén $\mathrm{Pol}(\Delta)$-ban van.*

Bizonyítás. Adott a Δ egy m-változós R relációja és az $(a_1^1, \ldots, a_m^1)$, …, $(a_1^k, \ldots, a_m^k)$ m-esek R-ben. Ekkor minden $1 \leq i \leq n$ esetén $t_i := (g_i(a_1^1, \ldots, a_1^k), \ldots, g_i(a_m^1, \ldots, a_m^k)) \in R$, hiszen g_i tartja az R relációt. Mivel f is tartja az R relációt, így

$$((f \circ (g_1, \ldots, g_n))(a_1^1, \ldots, a_1^k), \ldots, (f \circ (g_1, \ldots, g_n))(a_m^1, \ldots, a_m^k)) = \\ f(t_1, \ldots, t_n) \in R$$

□

A 2.3. Állítás szerint tehát $\mathrm{Pol}(\Delta)$ zárt a többváltozós függvénykompozícióra, és emellett tartalmazza az összes projekciófüggvényt. Az ilyen tulajdonságoknak eleget tevő halmazokat *klónoknak* nevezzük, $\mathrm{Pol}(\Delta)$-t pedig Δ polimorfizmusklónjának hívjuk. A korábban definiált topológiát k-változós függvényekre is értelmezhetjük. Vagyis ha S a D-n értelmezett k-változós függvények egy részhalmaza, akkor S lezártja azokból az $f : D^k \to D$ függvényekből áll, amik D^k minden véges részhalmazán interpolálhatók S valamely elemével, vagyis minden véges $F \subseteq D^k$ esetén létezik egy $g \in S$, amire $g \restriction_F = f \restriction_F$.

Az összes D-n értelmezett többváltozós függvény halmazát $\mathrm{Clo}(D)$-vel jelöljük. Vegyük észre, hogy $\mathrm{Mon}(D)$ topologikus altere $\mathrm{Clo}(D)$-nek. Továbbá minden k-ra a $\mathrm{Clo}(D)$-beli k-változós függvények a $\mathrm{Clo}(D)$-nek egy nyílt-zárt részhalmazát alkotják.

Ahhoz, hogy kimondhassuk Ryll-Nardzewski tételének általánosítását klónokra, be kell vezetnünk a *primitív pozitív formula* fogalmát. Egy formula primitív pozitív, ha egzisztenciális kvantorokkal kezdődik (vagy kvantormentes), és az ezeket követő kvantormentes formulában sem negáció, sem a "vagy" logikai kötőszó nem szerepel, azaz csupán prímformulák "és" kötőszóval való összekapcsolása megengedett. Például a véletlen gráf feletti $\exists x \exists y E(x,z) \wedge E(y,z) \wedge (x=z)$ egy primitív pozitív formula.

Tétel 2.4. *Legyen Δ egy ω-kategorikus relációs struktúra, melynek D az alaphalmaza. Ekkor a* Pol *és* Inv *operátorok rendezésfordító Galois-kapcsolatot teremtenek* $\mathrm{Clo}(D)$*-nek a* $\mathrm{Pol}(\Delta)$*-t tartalmazó részklónjai és Δ reduktjai között. Ez a Galois-kapcsolat egy rendezésfordító, egy-egyértelmű megfeleltetést ad meg a zárt klónok és a reduktok primitív pozitív átdefiniálhatóság erejéig vett ekvivalenciaosztályai között.*

2.5. **Ramsey-elmélet.** Tetszőleges A, B azonos nyelv feletti struktúrákra $\binom{B}{A}$ jelöli a B struktúra A-val izomorf részstruktúráinak halmazát. Fouché vezette be a struktúrák *Ramsey-fokának* fogalmát [28]. Legyen $\mathcal{K}$ egy adott nyelv feletti véges struktúrákból álló osztály. Ekkor $A \in \mathcal{K}$ Ramsey-foka az a legkisebb d pozitív egész szám, amire a következő tulajdonság fennáll: minden $r \in \mathbb{N}$ és $B \in \mathcal{K}$ esetén létezik $C \in \mathcal{K}$ úgy, hogy bárhogyan színezzük a $\binom{C}{A}$ halmazt r színnel, található C-ben a B-nek egy legfeljebb d-színű példánya, azaz $B' \in \binom{C}{B}$, hogy $\binom{B'}{A}$-ban legfeljebb d szín fordul elő. Ha nem létezik ilyen tulajdonságú $d \in \mathbb{N}$, akkor a Ramsey-fokot végtelennek definiáljuk. A $\mathcal{K}$ osztály Ramsey-foka a benne lévő struktúrák fokainak supremuma. Végül egy megszámlálható Δ struktúra Ramsey-foka az $\mathrm{Age}(\Delta)$ osztály Ramsey-foka. Egy megszámlálható Δ struktúra *Ramsey*, ha Ramsey-foka 1.

Definíció 2.5. Egy megszámlálható Δ struktúrára teljesül a Ramsey-tulajdonság, ha tetszőleges $r \geq 2$, $A, B \in \mathrm{Age}(\Delta)$ esetén létezik egy $C \in \mathrm{Age}(\Delta)$, hogy bárhogyan színezzük is A példányait C-ben r színnel, mindig lesz C-ben egy B-vel izomorf B' részstruktúra, amiben A minden példánya azonos színű.

Mielőtt összefoglalnánk a legfontosabb eredményeket Ramsey-struktúrákkal kapcsolatban, jöjjön néhány egyszerű észrevétel a definícióról.

Állítás 2.6. *A következő állítások ekvivalensek tetszőleges megszámlálható Δ struktúrára.*

(1) *Δ Ramsey-tulajdonságú.*
(2) *Minden $A, B \in \mathrm{Age}(\Delta)$ esetén létezik egy $C \in \mathrm{Age}(\Delta)$, hogy tetszőleges $\chi : \binom{C}{A} \to \{0,1\}$ esetén létezik egy $B' \in \binom{C}{B}$ úgy, hogy $\chi \restriction_{\binom{B'}{A}}$ konstans.*
(3) *Minden $A, B \in \mathrm{Age}(\Delta)$, $r \in \mathbb{N}$ és $\chi : \binom{\Delta}{A} \to \{0, 1, \ldots, r-1\}$ esetén létezik egy $B' \in \binom{\Delta}{B}$ úgy, hogy $\chi \restriction_{\binom{B'}{A}}$ konstans.*
(4) *Minden $A, B \in \mathrm{Age}(\Delta)$-ra és $\chi : \binom{\Delta}{A} \to \{0,1\}$ függvényre létezik egy $B' \in \binom{\Delta}{B}$ úgy, hogy $\chi \restriction_{\binom{B'}{A}}$ konstans.*

Bizonyítás. Mindegyik feltétel triviálisan teljesül, ha $A \notin \mathrm{Age}(B)$ vagy $r \leq 1$. Így a továbbiakban feltesszük, hogy $A \in \mathrm{Age}(B)$ és $r \geq 2$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Vezessük be a $C_0 = A$ és $C_1 = B$ jelölést. Minden $i \geq 0$-ra legyen $C_{i+2} \in \mathrm{Age}(\Delta)$ egy struktúra, aminek a létezését a (2) pontbeli feltétel garantálja a C_i, C_{i+1} párra. Az r szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy $C_r = C$ megfelelő választás az A, B párra a Ramsey-tulajdonság definíciójában. Ha $r = 2$, akkor C_2 definíció szerint megfelelő. Legyen $r \geq 3$, és tegyük fel, hogy $\binom{C_r}{A}$ r-színezett. Legyen $\chi : \binom{C_r}{A} \to \{0,1\}$ az a függvény, ami A egy példányához pontosan akkor rendel 1-et, ha az az r-edik színt kapta. Ekkor létezik C_{r-1}-nek egy C'_{r-1} példánya C_r-ben, amire megszorítva a χ függvény konstans. Ha ez a konstans 0, akkor az indukciós feltevés miatt vagyunk készen, ha pedig 1, akkor bármely C'_{r-1}-beli példánya B-nek monokromatikus (az r-edik színnel).

(1) $\Rightarrow$ (3) Legyen $C \in \mathrm{Age}(\Delta)$ egy struktúra, aminek a létezését a Ramsey-tulajdonság garantálja az $A, B \in \mathrm{Age}(\Delta)$ és $r \in \mathbb{N}$ esetben. Legyen $C' \subseteq \Delta$ ennek a C-nek egy példánya. Ekkor létezik egy a feltételeknek eleget tevő B' a C' résztruktúrában.

(3) $\Rightarrow$ (4) speciális eset $r = 2$ választással.

(4) $\Rightarrow$ (2) Tételezzük fel, hogy (2) nem teljesül valamely $A, B \in \mathrm{Age}(\Delta)$-ra. Eszerint minden $C \in \mathrm{Age}(\Delta)$ struktúra 2-színezhető úgy, hogy abban nincs B-nek monokromatikus példánya. Legyen $C_1 \subsetneq C_2 \subsetneq \cdots$ a Δ véges részstruktúráinak egy sorozata úgy, hogy $\cup C_i = \Delta$. Minden $i \geq 1$-re álljon a H_i halmaz a C_i összes olyan 2-színezéséből, amiben B-nek nincs monokromatikus példánya. Minden $i \geq 1$-re kössük össze azokat a $H_i \times H_{i+1}$-beli párokat éllel, amiknek a H_i-beli eleme a H_{i+1}-beli elem megszorítása. Erre a gráfra fennállnak a Kőnig-lemma feltételei, így van benne egy végtelen út. Egy ilyen végtelen

út megad egy 2-színezést $\binom{\Delta}{A}$-ra, amiben nincs B-nek monokromatikus példánya. $\square$

A Ramsey-tulajdonságot részstruktúrákra definiáltuk, de gyakran kényelmesebb beágyazásokkal dolgozni. Egy megszámlálható Δ struktúrára teljesül a *Ramsey-tulajdonság a beágyazásokra*, ha tetszőleges $r \geq 2$, $A, B \in \mathrm{Age}(\Delta)$ esetén létezik egy $C \in \mathrm{Age}(\Delta)$, hogy bárhogyan színezzük is A beágyazásait C-be r színnel, mindig létezik B-nek egy g beágyazása C-be úgy, hogy minden $f : A \hookrightarrow B$ beágyazásra $g \circ f$ azonos színű. Természetesen a Ramsey-fokot is lehet beágyazásokra definiálni. A két fogalom kapcsolatáról bővebben [44]-ben olvashatunk. Az nyilvánvaló, hogy a két fogalom ekvivalens ha minden $A \in \mathcal{K}$ struktúra *merev*, azaz egyetlen automorfizmusa az identitás. Ilyen esetben ugyanis a beágyazások egyértelműen megadhatók a képükkel. Egy Δ struktúra *rendezett* ha létezik az alaphalmazán egy olyan teljes rendezés, amelyet $\mathrm{Aut}(\Delta)$ minden eleme megőriz. Ryll-Nardzewski tétele alapján ω-kategorikus struktúrák esetén ez azzal ekvivalens, hogy Δ-ban elsőrendben definiálható egy teljes rendezés. Ha egy megszámlálható homogén Δ struktúra rendezett, akkor minden $A \in \mathrm{Age}(\Delta)$ merev.

Nešetřil vette észre [47], hogy lényegében nem veszítünk azzal, ha a Ramsey-tulajdonságot csak homogén struktúrákra vizsgáljuk.

Tétel 2.7. *Legyen $\mathcal{K}$ egy adott nyelv feletti véges struktúrákból álló, lefelé zárt osztály a közös kiterjeszthetőség tulajdonságával. Ha $\mathcal{K}$-ra teljesül a Ramsey-tulajdonság, akkor a vegyítési tulajdonság is fennáll rá. Vagyis ha $\mathcal{K} = \mathrm{Age}(\Delta)$ valamely megszámlálható Δ Ramsey-struktúrára, akkor $\mathcal{K} = \mathrm{Age}(\Gamma)$ alkalmas Γ megszámlálható, homogén Ramsey-struktúrára.*

Ezzel az észrevétellel vette kezdetét a Ramsey-osztályok szisztematikus vizsgálata és karakterizálása. Több konkrét nyelv felett meghatározták már a homogén Ramsey-struktúrákat. Egy effajta vizsgálat nagyban építhet arra, ha az adott nyelv feletti homogén struktúrákat már korábban karakterizálták. A strukturális Ramsey-elmélet egyik legkiemelkedőbb eredményét Nešetřil és Rödl bizonyította [45, 48], belátva ezzel struktúráknak egy igen gazdag osztályára a Ramsey-tulajdonságot. Egy A struktúra *irreducibilis*, ha minden $x, y \in A$-ra létezik egy n-változós R reláció a struktúra nyelvében és $(x_1, \ldots, x_n) \in R$ úgy, hogy x és y is szerepel az $x_1, \ldots, x_n$ elemek között. Legyen $\mathcal{K}$ véges struktúrák egy halmaza egy adott nyelv felett. Ekkor $\mathrm{Forb}(\mathcal{K})$ jelöli az adott nyelv felett az összes olyan véges struktúra osztályát, amibe nem képezhető homomorfizmussal a $\mathcal{K}$ halmaz egyetlen eleme sem.

Tétel 2.8 (Nešetřil-Rödl)**.** *Legyen $\mathcal{K}$ véges irreducibilis struktúrák egy halmaza. Bővítsük ki a nyelvet egy $<$ szimbólummal, és legyen $\mathcal{K}$ az összes véges struktúra osztálya a kibővített nyelv felett, amiben $<$ interpretációja egy teljes rendezés, az eredeti nyelv feletti redukt pedig* $\mathrm{Forb}(\mathcal{K})$*-beli. Ekkor $\mathcal{K}$ egyszerre Fraïssé-osztály és Ramsey-osztály.*

Ennek bizonyítása megtalálható egy friss összefoglaló cikkben [7]. A tétel legfontosabb következménye, hogy bár a Ramsey-tulajdonság egy ritka és nagyon erős kombinatorikai feltétel, sok homogén struktúra legalábbis reduktja egy Ramsey-struktúrának. Ez az eredmény is motiválja a Bodirky-Pinsker-sejtést. Ramsey-elméletről a [29, 46] összefoglalókat ajánljuk. Ramsey-fokokról a [28, 35] cikkekben olvashatunk.

2.6. **Kanonikus függvények.** Egy Δ struktúra $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \Delta^n$ n-esének *típusa* az összes olyan n szabad változóval rendelkező elsőrendű formulából áll, ami teljesül $\underline{a}$-ra. Δ egy n-típusa alatt valamely n-esének típusát értjük. Ezeket a fogalmakat sok forrás másféleképpen nevezi, pl. [33]-ban teljes típusnak hívják azt, amit mi típusnak definiáltunk. Ryll-Nardzewski, Engeler és Svenonius ekvivalens karakterizációinak egyike szerint egy megszámlálható Δ struktúra pontosan akkor ω-kategorikus, ha minden n-re véges sok n-típusa van. Ekkor az n-típusok megfeleltethetők $\mathrm{Aut}(\Delta)$ orbitjainak a Δ^n-en vett koordinátánkénti hatására nézve: vagyis két n-es pontosan akkor van ugyanabban az orbitban, ha megegyezik a típusuk. Δ n-típusainak halmazát $S_n(\Delta)$ jelöli. Ez Δ n-edik Stone-tere.

Definíció 2.9. Egy $g : \Gamma \to \Delta$ függvény kanonikus, ha tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in \Gamma^n$-re fennáll, hogy amennyiben $\underline{a}$ és $\underline{b}$ típusa megegyezik Γ-ban, úgy $g(\underline{a})$ és $g(\underline{b})$ típusa megegyezik Δ-ban. Ha g egy kanonikus függvény, akkor g viselkedése alatt az összes olyan (s, t) alakú típusfeltételt értjük, amire $s \in S_n(\Gamma)$, $t \in S_n(\Delta)$, és minden s-típusú $\underline{a} \in \Gamma^n$-re $g(a)$-nak t a típusa.

Megjegyzés 2.10. *Ha Δ homogén egy m-változós relációs nyelv felett, akkor egy $\underline{a} \in \Delta^n$ típusát egyértelműen meghatározza az, hogy Δ egyes relációi mely m-esekre állnak fenn $\underline{a}$-ban.*

Megjegyzés 2.11. *Könnyen meggondolható, hogy ha Δ homogén egy m-változós relációs nyelv felett, és a $c_1, \ldots, c_n \in \Delta$ elemeket konstansként hozzávesszük Δ nyelvéhez, akkor az így kapott $(\Delta, c_1, \ldots, c_n)$ struktúra szintén homogén egy m-változós relációs nyelv felett. Ha ugyanis ezt a struktúrát mint relációs struktúrát tekintjük azon nyelv fölött,* *ami az összes legfeljebb m-változós, elsőrendben definiálható relációból áll, akkor egy olyan Γ homogén struktúrát kapunk, amire* $\mathrm{Aut}(\Gamma) = \mathrm{Aut}(\Delta, c_1, \ldots, c_n)$, *vagyis ami elsőrendben átdefiniálható a* $(\Delta, c_1, \ldots, c_n)$ *struktúrával.*

Így a továbbiakban minden ilyen esetben úgy gondolunk a $(\Delta, c_1, \ldots, c_n)$ struktúrára, mint a 2.11. Megjegyzésben definiált homogén relációs struktúrára. Fontos észrevétel, hogy rendezett struktúrák körében a Ramsey-tulajdonság megőrződik, ha véges sok konstanst hozzáadunk a nyelvhez [17].

Lemma 2.12 (Borirsky, Pinsker, Tsankov)**.** *Legyen Δ egy megszámlálható, homogén, rendezett Ramsey-struktúra, és legyen $c_1, \ldots, c_n \in \Delta$. Ekkor $(\Delta, c_1, \ldots, c_n)$ Ramsey.*

Megjegyzés 2.13. *A 2.12. Lemmából nem hagyható el a rendezettség feltétele. Legyen* $\Delta = (\mathbb{Q}, \mathrm{Betw})$. *Ramsey tételéből következik, hogy ez egy Ramsey-struktúra. Vegyük hozzá a 0 elemet konstansként a nyelvhez. Legyen A egy nullától különböző elem, B pedig az a struktúra, ami egy pozitív és egy negatív elemből áll. (Könnyen meggondolható, hogy ezek a megfogalmazások valóban részstruktúrák izomorfiatípusait jelölik ki* $(\mathbb{Q}, \mathrm{Betw}, 0)$*-ban.) A negatív racionális számokat pirosra, a pozitívakat kékre festve B-nek nem létezik olyan példánya, amiben A minden példánya azonos színű.*

Állítás 2.14. *Legyen Δ egy véges relációs nyelv feletti homogén, rendezett Ramsey-struktúra. Legyen $c_1, \ldots, c_n \in \Delta$, és jelöljük Γ-val a $(\Delta, c_1, \ldots, c_n)$ struktúrát. Adott egy $f : \Delta \to \Delta$ injektív függvény. Ekkor létezik egy $g : \Gamma \to \Delta$ kanonikus, injektív függvény, amire* $g \in \overline{\{\alpha \circ f \circ \beta \mid \alpha \in \mathrm{Aut}(\Delta), \beta \in \mathrm{Aut}(\Gamma)\}}$, *és* $f \restriction_{\{c_1,\ldots,c_n\}} = g \restriction_{\{c_1,\ldots,c_n\}}$.

Bizonyítás. Legyen $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ véges részstruktúráknak egy felszálló lánca $(\Delta, c_1, \ldots, c_n)$-ben úgy, hogy $\cup A_i = D$, ahol D a Δ struktúra alaphalmaza. Legyen $S_1, \ldots, S_k$ az összes legfeljebb m-elemű részstruktúrának egy-egy példánya $\mathrm{Age}(\Gamma)$-ban, ahol m a legnagyobb fellépő aritás Δ (és egyúttal Γ) nyelvében. Γ-ra végig relációs struktúraként gondolunk, ahogy azt a 2.11. Megjegyzésben definiáltuk. Színezzük Γ-ban $S_1, \ldots, S_k$ példányait az f-képük izomorfiatípusával. Mivel Δ homogén egy véges relációs nyelv felett, így ehhez csak véges sok színt használunk. A 2.12. Lemma alapján Γ Ramsey, így minden A_i-nek létezik egy A'_i példánya Γ-ban, amire tetszőleges $1 \leq j \leq k$ esetén az $\binom{A'_i}{S_j}$ halmaz monokromatikus. Rögzítsük A_i-nek egy ilyen A'_i példányát.

Tekintsük minden i-re az $f \restriction_{A'_i}$ függvény viselkedését. Mivel csak véges sok lehetséges viselkedés van, így valamely b viselkedés végtelen sokszor ismétlődik. Elhagyva az $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sorozatból azokat az elemeket, amikre nem ezt a viselkedést kaptuk, feltehető, hogy minden $i \geq 1$ esetén $f \restriction_{A'_i}$ viselkedése b. Minden $i \geq 1$-re rögzítsünk egy $\alpha_i \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ permutációt, amire $\alpha_i(A_i) = A'_i$. Ekkor $(f \circ \alpha_i) \restriction_{A_i}$ éppen b-nek megfelelően módosítja az A_i-beli típusokat. Vagyis $i < j$ esetén $(f \circ \alpha_j) \circ (f \circ \alpha_i)^{-1} \restriction_{(f\circ\alpha_i)(A_i)}$ tartja Γ típusait, így kiterjed egy $\beta_{i,j} \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ permutációvá. A $h_j := \beta_{1,2}^{-1} \circ \cdots \circ \beta_{j,j+1}^{-1} \circ (f \circ \alpha_{j+1})$ függvénysorozat konvergens $\mathrm{Mon}(D)$-ben a pontonkénti konvergencia topológiájával. Legyen h a határértéke. Ekkor $h \circ f^{-1} \restriction_{\{f(c_1),\dots,f(c_n)\}}$ tartja Γ típusait, így kiterjed egy $\beta \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ permutációvá. Ekkor a $g = \beta^{-1} \circ h$ függvény megfelel az előírt feltételeknek, hiszen a konstansokhoz ez ugyanazt az értéket rendeli, mint f, és előáll mint a $g_j := \beta^{-1}\beta_{1,2}^{-1}\circ\cdots\circ\beta_{j,j+1}^{-1}\circ f\circ\alpha_{j+1}$ függvénysorozat határértéke $\mathrm{Mon}(D)$-ben. $\square$

Következmény 2.15 (Bodirski, Pinsker, Tsankov [17])**.** *Legyen Γ egy véges relációs nyelv feletti megszámlálható struktúra. Tegyük fel, hogy létezik egy megszámlálható Δ struktúra, ami homogén egy véges relációs nyelv felett, rendezett, Ramsey, és aminek Δ reduktja. Ekkor létezik az* $\mathrm{End}(\Gamma)$*-t szigorú értelemben tartalmazó zárt monoidoknak egy véges* $\{M_1,\dots,M_n\}$ *halmaza, amire fennáll, hogy tetszőleges* $\mathrm{End}(\Gamma) \subsetneq M$ *zárt monoidra $M_i \subseteq M$ valamely $1 \leq i \leq n$ indexre.*

Bizonyítás. Legyen $\mathrm{End}(\Gamma) \subsetneq M$ egy zárt monoid, és legyen $f \in M \setminus \mathrm{End}(\Gamma)$. Ekkor f megsérti Γ valamely R relációját, vagyis létezik $\underline{c} = (c_1,\dots,c_k) \in R$ amire $f(\underline{c}) \notin R$. A 2.14. Állítás szerint ekkor létezik egy $g : (\Delta, \underline{c}) \to \Delta$ kanonikus függvény amire $f(\underline{c}) = g(\underline{c})$ és $g \in M$. Vegyük észre, hogy $\underline{c}$ típusa Γ-ban és g viselkedése együttesen egyértelműen meghatározza az $\mathrm{End}(\Gamma) \cup \{g\}$ által generált zárt monoidot, amit persze $g \in M$ miatt az M monoid tartalmaz. Mivel csak véges sok reláció van Γ nyelvében, így csak véges sok különböző típusú $\underline{c}$ és viselkedés van, vagyis az így előálló, $\mathrm{End}(\Gamma) \cup \{g\}$ által generált zárt monoidokból is csak véges sok van. A fenti gondolatmenet szerint minden $\mathrm{End}(\Gamma) \subsetneq M$ zárt monoid tartalmazza ezek valamelyikét. $\square$

A 2.15. Következmény gondolatmenete kiterjeszthető zárt klónokra is. A technikai részleteket mellőzzük, azok megtalálhatók [11]-ben.

Következmény 2.16 (Bodirski, Pinsker, Tsankov [17])**.** *Legyen Γ egy véges relációs nyelv feletti megszámlálható struktúra. Tegyük fel, hogy* *létezik egy megszámlálható Δ struktúra, ami homogén egy véges relációs nyelv felett, rendezett, Ramsey, és aminek Δ reduktja. Ekkor létezik a* $\mathrm{Pol}(\Gamma)$*-t szigorú értelemben tartalmazó zárt klónoknak egy véges* $\{C_1, \dots, C_n\}$ *halmaza, amire fennáll, hogy tetszőleges* $\mathrm{Pol}(\Gamma) \subsetneq C$ *zárt klónra* $C_i \subseteq C$ *valamely* $1 \leq i \leq n$ *indexre.*

Ugyanez az alapötlet segíthet az $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ feletti zárt csoportok karakterizálásában is. Ehhez először meg kell keresnünk az $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ feletti minimális zárt csoportokat, amik $\mathrm{Aut}(\Gamma_1), \dots, \mathrm{Aut}(\Gamma_n)$ alakúak, majd folytatni az eljárást az $\mathrm{Aut}(\Gamma_i)$ feletti minimális zárt csoportok felkutatásával, és így tovább. Mindez a gyakorlatban remekül működik: az összes eredmény, amit a 2.2. alfejezet végén említettünk, belátható ezzel a módszerrel. Teljeskörű elméleti magyarázat azonban nincs arra, hogy ez az eljárás mindig feltárja az összes $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ feletti zárt csoportot. A 2.15. és 2.16. Következmények és a gyakorlati példák egyértelműen rámutattak arra, hogy erős összefüggés van a kanonikus függvények és az $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ feletti zárt csoportok között. Sajnos egyelőre ez a gondolat nem vihető tovább, amint azt a 3. Probléma és annak magyarázata mutatja a következő alfejezetben.

2.7. **Nyitott problémák zárt csoportokról.** A reduktok karakterizálására vonatkozó legfontosabb sejtést Simon Thomas fogalmazta meg.

Probléma 1 (Thomas-sejtés)**.** *Minden véges relációs nyelv feletti megszámlálható homogén struktúrának véges sok reduktja van elsőrendű átdefiniálhatóság erejéig.*

Erről a sejtésről nagyon keveset tudunk, bár sok konkrét esetben már sikerült igazolni. A gyakorlati példákból kiindulva kijelenthetjük, hogy a Thomas-sejtésben komoly előrelépést jelentene, ha a következő sejtést igazolnánk.

Probléma 2 (Bodirsky-Pinsker-sejtés)**.** *Minden véges relációs nyelv feletti megszámlálható homogén Δ struktúra esetén létezik egy ugyanilyen feltételeknek eleget tevő Γ struktúra, ami rendezett és rendelkezik a Ramsey-tulajdonsággal, és aminek Δ reduktja.*

A Bodirsky-Pinsker-sejtés jelenleg egyértelműen a legfontosabb nyitott probléma a homogén struktúrák elméletében. Pozitív válasz esetén nem csak a Thomas-sejtésben lenne nagy jelentősége, de az összes későbbi fejezetben említett témában is komoly részeredményeket lehetne vele elérni.

A Thomas-sejtés bizonyításában komoly előrelépést jelentene a következő állítás igazolása, ami a 2.15. és 2.16. Következmények közvetlen átfogalmazása csoportokra.

Probléma 3. *Legyen Δ egy véges relációs nyelv feletti megszámlálható homogén struktúra. Tegyügy fel, hogy létezik egy ugyanilyen feltételeknek eleget tevő struktúra, ami rendezett és rendelkezik a Ramsey-tulajdonsággal, és aminek Δ reduktja. Bizonyítsuk be, hogy létezik* $\mathrm{Aut}(\Delta)$*-t szigorú értelemben tartalmazó zárt csoportoknak egy véges* $\{G_1, \ldots, G_n\}$ *halmaza úgy, hogy minden* $\mathrm{Aut}(\Delta) \subsetneq G \subseteq \mathrm{Sym}(D)$ *zárt csoport tartalmazza $G_1, \ldots, G_n$ valamelyikét.*

Sajnos a 2.15. és 2.16. Következmények bizonyítása nem működik ebben az esetben, aminek az az oka, hogy kanonikus függvények generálása során a szürjektivitás tulajdonsága sérülhet. Vagyis a 2.14. Állításban akkor sem tudjuk a g függvény szürjektivitását garantálni, ha f egy permutáció. Konkrét ellenpéldaként tekintsük azt a Cycl háromváltozós relációt, amit $(\mathbb{Q}, <)$-ben a következő formula definiál: $(x, y, z) \in \mathrm{Cycl} \Leftrightarrow x < y < z \vee y < z < x \vee z < x < y$. $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, \mathrm{Cycl})$ egyike a Cameron karakterizációjában szereplő öt zárt csoportnak, amik tartalmazzák $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$-et, mégpedig az $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, \mathrm{Betw})$ csoporttal ezek éppen a minimális zárt csoportok $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ felett. Az $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, \mathrm{Cycl})$ csoport azokból az α permutációkból áll, amelyekhez létezik olyan irracionális t szám (vagy $t = \infty$), hogy minden $x, y \in \mathbb{Q}$-ra

- $x < t < y$ esetén $\alpha(x) > \alpha(y)$,
- $x < y < t$ esetén $\alpha(x) < \alpha(y)$, és
- $t < x < y$ esetén $\alpha(x) < \alpha(y)$.

Ha $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, \mathrm{Cycl}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$, vagyis t ténylegesen egy irracionális szám, akkor α nem kanonikus mint $(\mathbb{Q}, <, c_1, \ldots, c_k) \to (\mathbb{Q}, <)$ függvény semmilyen $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{Q}$ konstansokra. Valóban, ha bevezetjük a $c_0 = -\infty, c_{k+1} = \infty$ jelöléseket, és $t \in [c_i, c_{i+1}]$, akkor a $[c_i, c_{i+1}]$ intervallumon α némely elemekpárokra megtartja, másokra viszont megfordítja a rendezést.

Természetes gondolat, hogy ne a minimális, hanem inkább a maximális zárt csoportok meghatározásával póbáljuk megoldani a Thomas-sejtést, vagy legalábbis részeredményt elérni benne. Ehhez fontos lenne tisztázni a következő kérdést.

Probléma 4. *Tetszőleges Δ véges relációs nyelv feletti struktúrára jelöljük $m(\Delta)$-val a legnagyobb fellépő aritást Δ nyelvében. Igaz-e, hogy létezik egy csakis $m(\Delta)$-tól függő $k \in \mathbb{N}$ szám, amire fennáll, hogy minden Δ véges relációs nyelv feletti megszámlálható homogén struktúra* *esetén, ha* $\mathrm{Aut}(\Delta) \subseteq G \subseteq \mathrm{Sym}(D)$ *egy* k*-tranzitív zárt csoport, akkor* $G = \mathrm{Sym}(D)$*? (*D *jelöli* Δ *alaphalmazát.)*

A 4. Problémából - pozitív válasz esetén - következne, hogy minden Δ véges relációs nyelv feletti struktúrára létezik zárt csoportoknak egy véges $\{G_1, \ldots, G_n\}$ halmaza úgy, hogy minden $1 \leq i \leq n$ esetén $\mathrm{Aut}(\Delta) \subseteq G_i \subsetneq \mathrm{Sym}(D)$, és minden $\mathrm{Aut}(\Delta) \subseteq G \subsetneq \mathrm{Sym}(D)$ zárt csoportot tartalmazza a $G_1, \ldots, G_n$ csoportok valamelyike. Ha a 4. Probléma igaz, akkor minden $\mathrm{Aut}(\Delta) \subseteq G \subsetneq \mathrm{Sym}(D)$ zárt csoport megőriz egy legfeljebb $(k-1)$-változós relációt, ami elsőrendben definiálható Γ-ban. Ilyenből csak véges sok van, jelöljük ezeket $R_1, \ldots, R_m$-mel. Ekkor a $\{G_1, \ldots, G_n\}$ halmaz pontosan azokból a csoportokból áll, amelyek tartalmazásra nézve maximálisak az $\{\mathrm{Aut}(D, R_1), \ldots, \mathrm{Aut}(D, R_m)\}$ halmazban.

3. Automatikus folytonosság

3.1. **Interpretálhatóság.** A 2. fejezetben láttuk, hogy az automorfizmuscsoport mint permutációcsoport egyértelműen meghatároz egy ω-kategorikus struktúrát elsőrendű átdefiniálhatóság erejéig. Felmerül a kérdés, hogy vajon mennyi információt tárol el egy ω-kategorikus Δ struktúráról az automorfizuscsoportja mint topologikus csoport, illetve mint absztrakt csoport. Mivel a permutációcsoportból egyértelműen leolvasható a topologikus csoportstruktúra, és abból az absztrakt csoportstruktúra, így nyilvánvaló, hogy ezek az invariánsok egyre kevesebb (legalábbis nem több) információt tárolnak el a Δ struktúráról.

Hogy megválaszolhassuk ezeket a kérdéseket, fel kell elevenítenünk egy alapvető modellelméleti fogalom, az *interpretálhatóság* definícióját. Ismét megjegyezzük, hogy a fogalomnak tetszőleges struktúrapárra van értelme, mi azonban a bonyodalmak elkerülése érdekében csak relációs struktúrákra definiáljuk. (Akit érdekel az általános eset, az megtalálja ennek leírását pl. [33]-ban.) Legyen adott két relációs struktúra, Δ és Γ, nem feltétlenül azonos nyelv felett. Ahhoz, hogy a Γ struktúrát interpretáljuk Δ-ban, feltéve hogy ez egyáltalán lehetséges, három dolgot kell megadnunk: egy n természetes számot, egy n szabad változóval rendelkező ∂ formulát, és egy $f : \Delta^n \to \Gamma$ függvényt. Feltétel, hogy f értelmezési tartománya pontosan azokból a Δ^n-beli n-esekből álljon, amelyekre a ∂ formula igaz, értékkészlete pedig Γ legyen. Ezen felül Γ minden definiálható relációjának f-őssképe definiálható kell, hogy legyen Δ-ban, azaz ha φ egy formula Δ felett k szabad változóval, akkor létezik egy φ_f formula Δ felett kn szabad változóval úgy, hogy minden $t_1, \ldots, t_k \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén $\Gamma \models \varphi(f(t_1), \ldots, f(t_k))$ akkor és csak akkor ha $\Delta \models \varphi_f(t_1, \ldots, t_k)$. Mivel f egyértelműen meghatározza n-et és az értelmezési tartományát, így egyes források csak f megadását követelik meg az interpretáció definiálásához. Ha létezik a fentebb megadott feltételeknek eleget tevő f, akkor az Γ egy n-dimenziós interpretációja Δ-ban. Tömör ekvivalens megfogalmazással egy $f : \Delta^n \supseteq S \to \Gamma$ szürjektív függvény Γ egy n-dimenziós interpretációja Δ-ban, ha Γ minden relációjának f-ősképe elsőrendben definiálható Δ-ban. Pl. ha Γ reduktja Δ-nak, Γ-nak létezik egydimenziós interpretációja Δ-ban: f ekkor választható az identitásfüggvénynek Δ-n.

Ha f a Γ-nak egy n-dimenziós interpretációja Δ-ban, g pedig a Δ-nak egy m-dimenziós interpretációja Λ-ban, akkor ez a két interpretáció természetes módon komponálható. A kompozíció, amit fg jelöl, Γ-nak egy nm-dimenziós interpretációja Λ-ban. Ennek alaphalmaza azon $\underline{a} = (a_{1,1}, \ldots, a_{m,1}, \ldots, a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}) \in \mathrm{Dom}(g)^n$ elemekből áll, amikre $(g(a_{1,1}, \ldots, a_{m,1}), \ldots, g(a_{1,n}, \ldots, a_{m,n})) \in \mathrm{Dom}(f)$, és $fg(\underline{a}) = f(g(a_{1,1}, \ldots, a_{m,1}), \ldots, g(a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}))$. A speciális eset, amikor $\Gamma = \Lambda$, lehetőséget ad arra, hogy definiáljuk két struktúra *bi-interpretálhatóságát*. Ha létezik Γ-nak egy n-dimenziós f interpretációja Δ-ban, és Δ-nak egy m-dimenziós g interpretációja Γ-ban, továbbá az fg interpretáció (mint függvény) gráfja definiálható Γ-ban és gf gráfja definiálható Δ-ban, akkor Γ és Δ (elsőrendben) bi-interpretálható.

Ahlbrandt és Ziegler [3] a következőt bizonyították.

Tétel 3.1 (Ahlbrandt-Ziegler). *Legyen Δ ω-kategorikus, és legyen Γ egy tetszőleges megszámlálható struktúra. Δ és Γ pontosan akkor elsőrendben bi-interpretálható, ha* $\mathrm{Aut}(\Delta)$ *és* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *izomorfak mint topologikus csoportok, vagyis létezik köztük olyan csoportizomorfizmus, ami egyben homeomorfizmus is.*

Vagyis ha Δ ω-kategorikus, akkor $\mathrm{Aut}(\Delta)$ topologikus csoportstruktúrájából bi-interpretálhatóság erejéig egyértelműen rekonstruálható a Δ struktúra.

A következő alfejezet célja annak igazolása, hogy sok esetben - sőt a halmazelmélet egy megfelelő modelljében *mindig* - $\mathrm{Aut}(\Delta)$ absztrakt csoportstruktúrájából szintén egyértelműen rekonstruálható a Δ struktúra bi-interpretálhatóság erejéig. Mindehhez természetesen elegendő annak belátása, hogy $\mathrm{Aut}(\Delta)$ topologikus csoportstruktúrája rekonstruálható annak absztrak csoportstruktúrájából.

3.2. **Csoporthomomorfizmusok automatikus folytonossága.** Legyen $G \subseteq \mathrm{Sym}(D)$ egy zárt csoport. Itt D egy megszámlálhatóan végtelen alaphalmaz, a topológia pedig a pontonkénti konvergencia topológiája, ahogyan azt a 2. fejezet 2.2. alfejezetében definiáltuk. Azt mondjuk, hogy G-re fennáll az *automatikus folytonosság*, ha tetszőleges

$H \subseteq \mathrm{Sym}(D)$ zárt csoportra minden $\Phi : G \to H$ homomorfizmus folytonos. Továbbá G *rekonstruálható*, ha fennáll, hogy minden $H \subseteq \mathrm{Sym}(D)$ zárt csoport esetén, amire $G \cong H$, létezik G és H között egy olyan izomorfizmus, ami homeomorfizmus is. Vagyis G akkor rekonstruálható, ha fennáll, hogy amennyiben G izomorf $\mathrm{Sym}(D)$ egy zárt részcsoportjával mint absztrakt csoport, akkor izomorf vele mint topologikus csoport. Maga az elnevezés is erre utal, hiszen ilyen esetben a topologikus csoportstruktúra rekonstruálható az absztrakt csoportstruktúrából. Érdemes összevetni ezt a két fogalmat. Míg az automatikus folytonosság esetén megköveteljük, hogy maga a homomorfizmus legyen folytonos, addig a rekonstruálhatóság esetében csak annyi a követelmény, hogy létezzen folytonos és nyílt izomorfizmus, vagyis fennáll a lehetősége, hogy néhány izomorfizmus nem ilyen.[2]

Egy $G \subseteq \mathrm{Sym}(D)$ zárt csoportra fennáll a *kis index tulajdonság*, ha minden megszámlálható indexű részcsoportja nyílt. Ez a tulajdonság ekvivalens az automatikus folytonossággal.

Tétel 3.2. *Legyen $G \subseteq \mathrm{Sym}(D)$ egy zárt csoport. A következő állítások ekvivalensek.*

(1) *G-re fennáll az automatikus folytonosság.*
(2) *G-re teljesül a kis index tulajdonság.*
(3) *G-ben minden megszámlálható indexű részcsoport zárt.*
(4) *Minden $\Phi : G \to \mathrm{Sym}(D)$ homomorfizmus folytonos.*

Bizonyítás. (4) $\Rightarrow$ (2) Legyen $H \subseteq G$ egy megszámlálható indexű részcsoport. Ekkor G hat H baloldali mellékosztályain a balról szorzással. Mivel H-nak megszámlálható sok baloldali mellékosztálya van, így létezik egy f egy-egyértelmű függvény a mellékosztályok halmazából D-be. Ez megad egy homomorfizmust G-ből $\mathrm{Sym}(D)$-be. Mivel ez a homomorfizmus szükségképpen folytonos, így az $f(H)$ elemet fixáló permutációk ősképe, vagyis H, egy nyílt halmaz.

(2) $\Rightarrow$ (1) Legyen adott egy $H \subseteq \mathrm{Sym}(D)$ zárt csoport és egy $\Phi : G \to H$ homomorfizmus. Legyen $U \subseteq H$ egy bázis nyílt halmaz, vagyis valamilyen $a_1, \ldots, a_k \in D$ és $b_1, \ldots, b_k \in D$ elemekre U az összes olyan H-beli α permutáció halmaza, amire $\alpha(a_i) = b_i$ minden $1 \leq i \leq k$-ra. Ha U nem metsz bele Φ képébe, akkor $\Phi^{-1}(U)$ üres, így nyílt. Feltehető tehát, hogy $U \cap \Phi(G) \neq \emptyset$. Ekkor $U \cap \Phi(G)$ az $\{a_1, \ldots, a_k\}$ véges halmaz S pontonkénti stabilizátorának egy mellékosztálya $\Phi(G)$-ben. Mivel a stabilizátor indexe az orbit elemszáma, így $|\Phi(G) : S|$ megszámlálható,

[2] Angolul "automatic homeomorphicity"-ként hivatkozunk arra a tulajdonságra, ami azt fejezi ki, hogy minden izomorfizmus G és valamely $H \subseteq \mathrm{Sym}(D)$ zárt csoport között homeomorfizmus. Ennek a terminológiának a magyarra fordítása embert próbáló feladat volna.

vagyis $|G : \Phi^{-1}(S)|$ is az. A feltétel szerint tehát $\Phi^{-1}(S)$ nyílt G-ben. A $\Phi^{-1}(U)$ halmaz eltoltja $\Phi^{-1}(S)$-nek, vagyis létezik $g \in G$, amire $\Phi^{-1}(U) = g\Phi^{-1}(S)$, így $\Phi^{-1}(U)$ is nyílt.

(1) $\Rightarrow$ (4) az automatikus folytonosság definíciója alapján nyilvánvaló, így beláttuk az $(1), (2)$ és (4) állítások ekvivalenciáját.

(2) $\Rightarrow$ (3) triviális következménye Lagrange tételének, hiszen egy nyílt részcsoport baloldali mellékosztályai nyílt halmazokra partícionálják a csoportot. Vagyis egy topologikus csoportban minden nyílt részcsoport komplementere nyílt, és így minden nyílt részcsoport zárt.

(3) $\Rightarrow$ (2) Megtalálható itt [33, Theorem 4.1.3]. □

Ez az észrevétel alapvető eszköze az automatikus folytonosság bizonyításának. Shelah megmutatta, hogy létezik a halmazelméletnek egy olyan modellje, amiben minden függvény Baire-függvény. A topologikus csoportok elméletében jól ismert tény, hogy topologikus csoportok között minden Baire-homomorfizmus folytonos. Így a halmazelmélet Shelah által konstruált modelljében minden $G \subseteq \mathrm{Sym}(D)$ zárt csoportra fennáll az automatikus folytonosság. Megjegyezzük, hogy Cherlin és Hrushovski konstruáltak egy ω-kategorikus struktúrát, aminek az automorfizmuscsoportjára nem áll fenn az automatikus folytonosság. A látszólagos ellentmondást az oldja fel, hogy a konstrukciójukhoz elengedhetetlenül szükséges feltétel nemprincipális ultrafilterek létezése megszámlálható halmazokon, ami természetesen nem teljesül a halmazelmélet azon modelljében, amelyet Shelah definiált. A konstrukció és az eredmény magyarázata megtalálható [40]-ben.

Számos konkrét esetben mindenféle halmazelméleti feltétel nélkül is sikerült igazolni a kis index tulajdonságot. Ezek között van a $\mathrm{Sym}(D)$ teljes szimmetrikus csoport [55, 25], a véges testek feletti megszámlálhatóan végtelen dimenziós vektorterek automorfizmuscsoportja [26], továbbá a $(\mathbb{Q}, <)$ teljes rendezés [58], a véletlen gráf [34] és a Henson-gráfok automorfizmuscsoportja is [32].

A következő tétel [40, Corollaire 2.8.]-ban található.

Tétel 3.3 (Lascar)**.** *Legyen $\Phi : G \to H$ folytonos csoportizomorfizmus $\mathrm{Sym}(D)$ két zárt részcsoportja között, ahol D egy megszámlálhatóan végtelen halmaz. Ekkor Φ egy homeomorfizmus.*

Tehát $\mathrm{Sym}(D)$ zárt részcsoportjaira az automatikus folytonosságból következik a rekonstruálhatóság. Így a fent említett példák mindegyikére igaz (a halmazelmélet megfelelő modelljében pedig minden ω-kategorikus Δ struktúrára fennáll), hogy a struktúra pontosan azokkal a megszámlálható struktúrákkal bi-interpretálható, amik automorfizmuscsoportja mint absztrakt csoport izomorf $\mathrm{Aut}(\Delta)$-val.

Rubin [52] kidolgozott egy módszert, amivel egy zárt oligomorf csoport rekonstruálhatósága közvetlenül, a kis index tulajdonság igazolása nélkül is belátható. Ennek tárgyalása meghaladja a jelen cikk kereteit, az olvasó bővebben a [41, 52] cikkekből tájékozódhat a témáról. Rubin többek között belátta, hogy a véletlen turnament és a véletlen részbenrendezés automorfizmuscsoportja rekonstruálható.

3.3. **Primitív pozitív interpretációk.** Egy $f : \Delta^n \to \Gamma$ szürjektív függvény Γ egy n-dimenziós egzisztenciális pozitív interpretációja Δ-ban, ha Γ minden relációjának f-őség képe egzisztenciális pozitív formulával definiálható Δ-ban. Ha létezik Γ-nak egy n-dimenziós f egzisztenciális pozitív interpretációja Δ-ban, és Δ-nak egy m-dimenziós g egzisztenciális pozitív interpretációja Γ-ban, továbbá az fg interpretáció (mint függvény) gráfja e.p. definiálható Γ-ban és gf gráfja e.p. definiálható Δ-ban, akkor Γ és Δ egzisztenciális pozitív bi-interpretálható. Teljesen analóg módon definiálhatjuk a primitív pozitív interpretálhatóságot és bi-interpretálhatóságot is.

3.4. **Monoidok és klónok.** Amikor korábban automorfizmuscsoportokról beszéltünk, mindig hangsúlyoznunk kellett, hogy arra mint permutációcsoportra, topologikus csoportra vagy absztrakt csoportra gondolunk. Hasonló megkülönböztetést tehetünk monoidok és klónok esetén is. Egy $M = \mathrm{End}(\Delta)$ monoidra tekinthetünk úgy, mint az endomorfizmusok halmazára, ilyenkor M-re mint *transzformációmonoidra* gondolunk. Egy M *topologikus monoid* egyszerre rendelkezik egy monoidstruktúrával, és egy topologikus struktúrával, és a szorzás folytonos mint $M \times M \to M$ függvény. Az egységelem egy speciális elem, vagyis ha $\Phi : M_1 \to M_2$ egy (topologikus) monoidhomomorfizmus, akkor Φ az M_1 egységelemét az M_2 egységelemébe képzi. Minden $M = \mathrm{End}(\Delta)$ monoidra tekinthetünk úgy, mint topologikus monoidra. Végül $\mathrm{End}(\Delta)$-ra gondolhatunk úgy is, mint *absztrakt monoidra.* Értelemszerűen ekkor csak $\mathrm{End}(\Delta)$ absztrakt algebrai struktúráját tartjuk számon, vagyis a szorzást és az egységelemet.

Mindhárom fogalom analóg módon definiálható klónokra, ekkor rendre függvényklónról, topologikus klónról és absztrakt klónról beszélünk. Egy C absztrakt klón esetén adott C-nek egy partíciója, $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C^{(n)}$. $C^{(n)}$ elemeire a C klón *n-változós* elemeiként hivatkozunk. Ne felejtsük el, hogy ennek nincs valós tartalma, hiszen C elemei pusztán absztrakt szimbólumok, nem pedig függvények. Az absztrakt klónok struktúrájában minden $n \geq 1$ és $1 \leq i \leq n$ esetén van egy speciális π_i^n elem, az i-edik n-változós projekció. Emellett minden $n, m \geq$

1 párra van egy $(n+1)$-változós $\mathrm{comp}^n_m : C^{(n)} \times (C^{(m)})^n \to C^{(m)}$ művelet. Formailag gondolhatunk erre úgy, mint egy parciális műveletre. Egy absztrakt klónok közti $\Phi : C_1 \to C_2$ homomorfizmusnál a C_1-beli n-változós elemek képei n-változós elemek C_2-ben minden $n \geq 1$-re, a C_1-beli i-edik n-változós projekció képe a C_2-beli i-edik n-változós projekció minden $n \geq 1$ és $1 \leq i \leq n$ esetén, továbbá Φ kompatibilis a comp^n_m műveletekkel minden $n, m \geq 1$ számpárra. Topologikus klónról akkor beszélhetünk, ha adott egy absztrakt klón, ami egyben topologikus tér is, és a comp^n_m műveletek minden $n, m \geq 1$ esetén folytonosak. Természetesen tetszőleges megszámlálható Δ struktúrára az $\mathrm{End}(\Delta)$ monoid és a $\mathrm{Pol}(\Delta)$ klón rendre topologikus monoid és topologikus klón a korábban definiált pontonkénti konvergencia topológiájával, ha comp^n_m az az operáció, ami egy n-változós függvényt n darab m-változós függvénnyel komponál. Cayley reprezentációs tétele kiterjeszthető monoidokra és klónokra is, vagyis minden absztrakt monoid reprezentálható transzformációmonoidként, és minden absztrakt klón előáll függvényklónként.

Bodirsky és Pinsker [13] egy friss eredménye az Ahlbrandt-Ziegler-tétel analógiájaként fogható fel.

Tétel 3.4 (Bodirsky-Pinsker)**.** *Legyen Δ és Γ két ω-kategorikus struktúra. Δ és Γ pontosan akkor primitív pozitív bi-interpretálható, ha* $\mathrm{Pol}(\Delta)$ *és* $\mathrm{Pol}(\Gamma)$ *izomorfak mint topologikus klónok, vagyis létezik köztük olyan klónizomorfizmus, ami egyben homeomorfizmus is.*

Megjegyezzük, hogy hasonló összefüggés áll fenn struktúrák egzisztenciális pozitív bi-interpretálhatósága és az endomorfizmusmonoidok (mint topologikus monoidok) izomorfizmusa között, bár az nem igaz teljes általánosságban minden ω-kategorikus struktúrára [8].

Monoidokra és klónokra is kiterjeszthető az automatikus folytonosság és a rekonstruálhatóság definíciója, teljesen hasonló módon, mint ahogyan azt csoportokra definiáltuk. Ezen fogalmak vizsgálatát a 3.4. Tétel is motiválja: ha egy Δ ω-kategorikus struktúrára a $\mathrm{Pol}(\Delta)$ klón rekonstruálható, akkor tetszőleges Γ ω-kategorikus struktúrára Δ és Γ pontosan akkor primitív pozitív bi-interpretálható, ha $\mathrm{Pol}(\Delta)$ és $\mathrm{Pol}(\Gamma)$ izomorfak mint absztrakt klónok.

Míg csoportok esetén az automatikus folytonosság egy nagyon érdekes fogalom, és erősebb a rekonstruálhatóságnál, addig monoidok és klónok esetén ezek egyike sem igaz. Valójában egyetlen érdekes $\mathrm{End}(\Delta)$ transzformációmonoidra és $\mathrm{Pol}(\Delta)$ függvényklónra sem teljesül az automatikus folytonosság [16]. Így ezt a fogalmat legfeljebb úgy érdemes vizsgálni, ha leszűkítjük azon monoidok vagy klónok körét, ahova a homomorfizmus $\mathrm{End}(\Delta)$-t illetve $\mathrm{Pol}(\Delta)$-t képezheti. Erre a 4. fejezetben láthatunk egy példát, ami alkalmazási lehetőséget biztosít elméleti számítástudományban. Fontos, hogy a 3.2. és 3.3. Tételek egyike sem általánosítható monoidokra vagy klónokra, mert ezek bizonyítása nagyban kihasználja a csoportok szerkezetét és az inverz létezését.

Manuel Bodirskyvel és Michael Pinskerrel közösen indítottuk el a monoidok és klónok rekonstruálhatóságának átfogó vizsgálatát [16]. Amint láttuk, rengeteg csoportról tudjuk, hogy rekonstruálható, és a halmazelmélet megfelelő modelljében ez $\mathrm{Sym}(D)$ minden zárt részcsoportjára igaz. Így természetes gondolat megpróbálni az automorfizmuscsoport rekonstruálhatóságát kiterjeszteni az endomorfizmusmonoidra, illetve a polimorfizmusklónra [16, Proposition 11].

Állítás 3.5. *Legyen D egy megszámlálhatóan végtelen halmaz, és legyen M és M' két zárt monoid* $\mathrm{Mon}(D)$*-ben. Tegyük fel, hogy az invertálható elemek halmaza sűrű M-ben és M'-ben, és jelölje ezeket a halmazokat rendre G és G'. Legyen $\xi : G \to G'$ egy folytonos homomorfizmus. Ekkor:*

- *ξ egyértelműen kiterjed egy $\bar{\xi} : M \to M'$ folytonos homomorfizmussá.*
- *Ha ξ izomorfizmus, akkor $\bar{\xi}$ izomorfizmus és homeomorfizmus.*

Következmény 3.6. *Legyen D egy megszámlálhatóan végtelen halmaz, és legyen $M \subseteq \mathrm{Mon}(D)$ egy zárt monoid. Jelölje G az invertálható elemek halmazát M-ben. Tegyük fel, hogy*

(1) *G sűrű M-ben,*
(2) *minden izomorfizmus G és* $\mathrm{Sym}(D)$ *egy zárt részcsoportja között homeomorfizmus, és*
(3) *az identitás az egyetlen injektív endomorfizmusa M-nek, ami G minden elemét stabilizálja.*

Ekkor M rekonstruálható.

Ez az állítás és bizonyítása [16, Lemma 12.]-ben található. Az első két feltétel nagyon sok endomorfizmusmonoidra teljesül, a nehézséget általában a harmadik feltétel bizonyítása jelenti. Vegyük észre, hogy ez már egy tisztán algebrai feltétel, ebben már a topológia nem játszik semmilyen szerepet. Ahhoz, hogy ki tudjuk mondani a legerősebb pozitív eredményt monoidok rekonstruálhatóságáról [16, Theorem 21.], be kell vezetnünk egy új fogalmat.

Definíció 3.7. Egy megszámlálható Δ struktúrára fennáll a közös kibővíthetőség tulajdonsága, ha tetszőleges a_1, a_2 parciális izomorfizmusokra, amelyekre $\mathrm{Dom}(a_1) = \mathrm{Dom}(a_2)$ és $a_1^{-1}(x) = a_2^{-1}(x)$ minden $x \in \mathrm{Im}(a_1) \cap \mathrm{Im}(a_2)$-re, és minden $u \in \Delta \setminus \mathrm{Dom}(a_1)$ esetén léteznek $a_1 \subseteq a_1'$ és $a_2 \subseteq a_2'$ parciális izomorfizmusok, amikre $a_1'(u) = a_2'(u)$.

A véletlen gráfra és a véletlen turnamentre például fennáll ez a tulajdonság, a Henson-gráfokra, $(\mathbb{Q},<)$-re és a véletlen részbenrendezésre azonban nem.

Tétel 3.8. *Legyen Δ egy megszámlálható homogén relációs struktúra. Tegyük fel, hogy*

- $\mathrm{Aut}(\Delta)$ *sűrű* $\mathrm{End}(\Delta)$*-ban,*
- *minden izomorfizmus* $\mathrm{Aut}(\Delta)$ *és* $\mathrm{Sym}(D)$ *egy zárt részcsoportja között homeomorfizmus,*
- Δ*-ban nincs algebraicitás, és*
- Δ*-ra fennáll a közös kibővíthetőség tulajdonsága.*

Ekkor $\mathrm{End}(\Delta)$ *rekonstruálható.*

A tétel alapján a véletlen gráf és a véletlen turnament endomorfizmusmonoidja rekonstruálható. Ennek segítségével beláttuk, hogy a véletlen gráf polimorfizmusklónja is rekonstruálható [16, Theorem 50.]. További eredmények és ellenpéldák [16]-ban találhatók.

3.5. **Nyitott problémák.** Rubin tétele alapján a véletlen turnament és a véletlen részbenrendezés automorfizmuscsoportja rekonstruálható [52]. Azonban a kis index tulajdonság bizonyítására kidolgozott módszerek mindegyike csődöt mond ezekre a csoportokra. Pozitív válasz igazolásához egyértelműen új ötletre van szükség.

Probléma 5. *Fennáll-e a véletlen turnament illetve a véletlen részbenrendezés automorfizmuscsoportjára az automatikus folytonosság?*

A következő két kérdést [16]-ban fogalmaztuk meg. Ebben a cikkben konstruáltunk egy olyan ω-kategorikus struktúrát, amely M endomorfizmusmonidjának létezik olyan $\alpha \in \mathrm{Aut}(M)$ automorfizmusa, ami nem folytonos. Ugyanez igaz az M által generált klónra is, ami szintén egy ω-kategorikus struktúra polimorfizmusklónja. Ez a monoid (klón) rekonstruálhatóságát nem cáfolja, hiszen az identitásfüggvény egy folytonos $M \to M$ izomorfizmus.

Probléma 6. *Van-e olyan ω-kategorikus sruktúra, amelynek a polimorfizmusklónja nem rekonstruálható?*

Truss és Vargas-García belátták, hogy $\mathrm{End}(\mathbb{Q};<)$ rekonstruálható. Mivel a $(\mathbb{Q},<)$ struktúrára nem áll fenn a közös kibővíthetőség tulajdonsága, így ennek igazolásában nem tudjuk a 3.8. Tételt alkalmazni.

Probléma 7. *Rekonstruálható-e a* $\mathrm{Pol}(\mathbb{Q},<)$ *klón?*

4. CSP

4.1. **Homomorfizmusok.** Legyen Δ egy ω-kategorikus relációs struktúra egy véges τ nyelv felett. Az elméleti számítástudományban $\mathrm{CSP}(\Delta)$ az a számítási probléma, melynek inputja egy véges A struktúra a τ nyelv felett, a megválaszolandó kérdés pedig az, hogy van-e homomorfizmus A-ból Δ-ba.[3] A legismertebb példák közé tartozik a gráfok k-színezhetőségének problémája, melyet úgy kaphatunk meg CSP-ként, ha Δ-nak a k-pontú teljes gráfot választjuk. Ugyancsak felírható CSP-ként a közismert NP-teljes probéma, a 3-SAT. Ehhez Δ-nak ismét egy véges struktúrát választunk, aminek alaphalmaza $\{0,1\}$, nyelve pedig négy 3-változós relációból áll. Jelölje ezeket R_1, R_2, R_3 és R_4. Δ-ban ezeket rendre a következőképpen interpretáljuk: $\{0,1\}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, $\{0,1\}^3 \setminus \{(0,0,1)\}$, $\{0,1\}^3 \setminus \{(0,1,1)\}$ és $\{0,1\}^3 \setminus \{(1,1,1)\}$. A klasszikus megfogalmazás szerint a 3-SAT lehetséges bemenetei olyan fomulák, amikben $A_1 \vee A_2 \vee A_3$ alakú klózokat kapcsolunk össze az "és" kötőszóval, ahol A_1, A_2 és A_3 egy-egy változó vagy annak negáltja. A változók egy előre rögzített $\{x_1, \ldots, x_n\}$ halmazból kerülnek ki. Ehelyett mi úgy fogjuk fel az inputot, mint egy struktúrát az $\{R_1, R_2, R_3, R_4\}$ relációs nyelv felett $\{x_1, \ldots, x_n\}$ alaphalmazzal. Ha egy klózban i db negált változó van, akkor az R_{i+1} reláció interpretációja tartalmazza az összes olyan elemhármast, aminek utolsó i eleme a klóz negált változóinak felsorolása, az ezeket megelőző elemek pedig a klóz fennmaradó változói.

Ennél kevésbé nyilvánvaló példa az aciklikus gráfok problémája. Ebben a bemenet egy véges irányított gráf, a feladat pedig annak eldöntése, hogy vajon a gráf tartalmaz-e irányított kört. Ez a probléma nem fejezhető ki olyan CSP-ként, melyben a Δ célstruktúra véges. Azonban $\Delta = (\mathbb{Q}, <)$ választással éppen az említett számítási problémát kapjuk meg. Ez a példa is azt igazolja, hogy nem érdemes pusztán a véges célstruktúrájú CSP-kre szorítani a vizsgálatainkat, mert a végtelen, ω-kategorikus célstruktúrákkal megadott CSP-k között is vannak érdekes problémák.

A téma legfontosabb kérdése a dichotómiasejtés, amelyet Feder és Vardi fogalmazott meg először véges Δ-kra.

Sejtés 4.1 (Feder-Vardi)**.** *Minden véges Δ relációs struktúrára* $\mathrm{CSP}(\Delta)$ P*-beli vagy* NP*-teljes.*

4.2. **Primitív pozitív formulák.** A CSP-ket sokféleképpen definiálhatjuk. Egy alternatív megfogalmazás szerint az input egy ϕ primitív

[3] A CSP rövidítés az angol "Constraint Satisfaction Problem"-ből származik, ami arra utal, hogy úgy keresünk a változóknak értékeket egy célstruktúrában, hogy az a behelyettesítés eleget tegyen bizonyos megkötéseknek.

pozitív formula a τ nyelv felett, a kérdés pedig az, hogy ez a formula igaz-e a Δ struktúrában. A két definíció ekvivalenciája teljesen világos. Egy ϕ primitív pozitív formulához a Δ nyelve felett azt az A struktúrát rendeljük, aminek alaphalmaza ϕ változóiból áll, és egy R reláció pontosan akkor teljesül az $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ k-asra, ha $R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ szerepel ϕ-ben. Egyetlen apró technikai problémaként megemlítjük, hogy ϕ-ben $x_i = x_j$ alakú formulák is előfordulhatnak, hiszen primitív pozitív formulákban ez megengedett. Iyenkor egyszerűen bevezetünk az azonosított változók helyébe egy új változót, és azok előfordulását ϕ-ben mindenütt ezzel helyettesítjük. Könnyű meggondolni, hogy ha az $=$ nem is volt benne Δ nyelvében, az az extra lehetőség, hogy az $=$ jelet is használhatjuk, nem változtat a probléma bonyolultságán. Valójában a fent leírt egyszerű eljárás egy polinomiális visszavezetés a két CSP között, ami megmutatja, hogy a két probléma - az egyenlőség reláció használatával illetve anélkül - polinomiálisan ekvivalens (a másik irányú visszavezetés triviális). A modellelméleszek szempontjából ez a technikai probléma nem is létezik, hiszen úgy tekintik, hogy az $=$ reláció minden nyelvben benne van. Mi is ezt a konvenciót követjük; ekkor a fenti gondolatmenetre úgy tekinthetünk, mint ami megmutatja, hogy ezzel semmit sem veszítünk, hiszen polinomiális ekvivalencia erejéig minden CSP-t megkapunk.

A CSP-kre adott új definíció azért érdekes, mert ráirányítja a figyelmet a primitív pozitív formulák jelentőségére. Véges célstruktúrájú CSP-kre először Jeavons vette észre, hogy a probléma lényegében nem változik (polinomiális ekvivalencia erejéig), ha a Δ célstruktúrához olyan relációkat (vagyis új megkötéseket) veszünk hozzá, amelyek a korábbiakból primitív pozitív formulákkal definiálhatók [19].

Tétel 4.2 (Jeavons)**.** *Legyen Δ és Γ két véges relációs struktúra. Tegyük fel, hogy Γ primitív pozitív reduktja Δ-nak. Ekkor* CSP(Γ) *polinomidőben visszavezethető* CSP(Δ)*-ra.*

Bizonyítás. Célunk egy gyors algoritmust konstruálni, ami tetszőleges ϕ primitív pozitív formulára Γ nyelvében legyárt egy olyan ψ primitív pozitív formulát Δ nyelvében, amire $\Gamma \models \phi$ pontosan akkor teljesül, ha $\Delta \models \psi$. Legyen adott egy ϕ primitív pozitív formula Γ nyelvében. Helyettesítsünk ebben minden relációt a Δ-beli primitív pozitív definíciójával úgy, hogy minden $R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ alakú prímformulára ϕ-ben a definíciójában lévő egzisztenciális kvantorral ellátott változókat minden esetben új szimbólummal helyettesítjük. Ezt követően egyszerűen gyűjtsük ki az egzisztenciális kvantorokat a hozzájuk tartozó változóval együtt a formula elejére. Ez az algoritmus lineáris futásidejű, és a legyártott ψ formula hossza is lineáris ϕ hosszában, vagyis az eredeti probléma inputjának méretében. $\square$

Ez az észrevétel vezetett a véges CSP-k vizsgálatának legalapvetőbb módszeréhez, az úgynevezett univerzális algebrai megközelítéshez.

Tétel 4.3 (Jeavons)**.** *Legyenek* Δ *és* Γ *véges struktúrák, amikre* $\mathrm{Pol}(\Delta) \subseteq \mathrm{Pol}(\Gamma)$*. Ekkor* $\mathrm{CSP}(\Gamma)$ *polinomidőben visszavezethető a* $\mathrm{CSP}(\Delta)$ *problémára. Ha* $\mathrm{Pol}(\Delta) = \mathrm{Pol}(\Gamma)$*, akkor* $\mathrm{CSP}(\Delta)$ *és* $\mathrm{CSP}(\Gamma)$ *polinomiálisan ekvivalensek.*

A véges célstruktúrájú CSP-kről rengeteget tudunk, elsősorban ennek az univerzális algebrai megközelítésnek köszönhetően. A tétel lényegében azt állítja, hogy $\mathrm{CSP}(\Delta)$ bonyolultsága csak Δ polimorfizmusklónjától függ. Ennek az észrevételnek a hatására felélénkült a véges alaphalmazon ható függvényklónok (a továbbiakban csak “véges klónok”) vizsgálata, és számtalan eredmény született, ami kapcsolatot teremt véges klónok és tagsági problémák bonyolultsága között. Schaefer [53] igazolta a dichotómiasejtést minden legfeljebb 2-elemű Δ-ra, amelyet Bulatov [18] általánosított minden legfeljebb 3-elemű Δ-ra. Barto és Kozik [5] megmutatták, hogy ha $\mathrm{Pol}(\Delta)$-ban található Jónsson-termeknek egy sorozata, akkor $\mathrm{CSP}(\Delta)$ P-beli. A témát [20]-ban foglalták össze.

Jeavons tétele általánosítható ω-kategorikus struktúrákra [10].

Tétel 4.4 (Bodirsky, Nešetřil)**.** *Legyenek* Δ *és* Γ ω*-kategorikus struktúrák, amikre* $\mathrm{Pol}(\Delta) \subseteq \mathrm{Pol}(\Gamma)$*. Ekkor* $\mathrm{CSP}(\Gamma)$ *polinomidőben visszavezethető a* $\mathrm{CSP}(\Delta)$ *problémára. Ha* $\mathrm{Pol}(\Delta) = \mathrm{Pol}(\Gamma)$*, akkor* $\mathrm{CSP}(\Delta)$ *és* $\mathrm{CSP}(\Gamma)$ *polinomiálisan ekvivalensek.*

A 4.4. Tétel a legáltalánosabb formája a CSP-k univerzális algebrai megközelítésének. A 4.4. Tétel segítségével és a kanonikus függvények szisztematikus vizsgálatával Bodirsky és Kára belátták a dichotómiasejtést az összes olyan $\mathrm{CSP}(\Delta)$ alakú problémára, amire Δ a $(\mathbb{Q}, <)$ struktúra reduktja. Ez az osztály számos olyan számítási problémát tartalmaz, amit korábban intenzíven vizsgáltak. Bodirsky és Kára eredménye [9, Theorem 50.] éles határvonalat húz a P-beli és NP-teljes problémák között az adott osztályban: ha $\mathrm{Pol}(\Delta)$ tartalmaz egyet 9 jól meghatározott klón közül, akkor $\mathrm{CSP}(\Delta)$ polinomidőben megoldható. Ellenkező esetben $\mathrm{Pol}(\Delta)$ részklónja 6 zárt klón egyikének [9, Corollary 51.], és ekkor $\mathrm{CSP}(\Delta)$ NP-teljes. Ezzel nemcsak a dichotómiasejtés egy speciális esetét oldották meg, de effektív algoritmust adtak, ami eldönti, hogy $(\mathbb{Q}, <)$ egy adott Δ reduktjára $\mathrm{CSP}(\Delta)$ P-beli vagy NP-teljes. Előbbi pontosan akkor áll fenn, ha Δ minden relációját megőrzi a [9, Theorem 50.]-ben megadott 9 (legfeljebb kétváltozós) függvény valamelyike. Bodirsky és Pinsker hasonló eredményt bizonyított a véletlen gráf reduktjairól is [12].

Ha létezik folytonos homomorfizmus $\mathrm{Pol}(\Delta)$-ból a triviális klónba, vagyis abba a klónba, ami csak a projekciókat tartalmazza, akkor $\mathrm{CSP}(\Delta)$ NP-teljes. Minden ismert esetben igaz, hogy egy ω-kategorikus Δ struktúrára $\mathrm{CSP}(\Delta)$ vagy P-beli, vagy pedig néhány egyszerű, a CSP bonyolultságát nem érintő operációval el tudunk jutni egy olyan Γ struktúrához Δ-ból, amire létezik folytonos homomorfizmus $\mathrm{Pol}(\Gamma)$-ból a triviális klónba. Utóbbi esetben tehát $\mathrm{CSP}(\Delta)$ maga is NP-teljes. Ez az észrevétel indokolja a triviális klónra képező klónhomomorfizmusok automatikus folytonosságának vizsgálatát, amelyet [15]-ben kezdeményeztünk.

4.3. **Nyitott problémák.** A következő kérdéseket [15]-ben vetettük fel.

Probléma 8. *Létezik-e olyan zárt C függvényklón, ami a triviális klónra képezhető homomorfizmussal, de folytonos homomorfizmussal nem?*

A zárt csoportokra tett megfigyelések alapján érdekes lehet halmazelméleti feltételek mellett vizsgálni klónhomomorfizmusok automatikus folytosnosságát.

Probléma 9. *Létezik-e a halmazelméletnek olyan modellje, amiben igaz, hogy minden zárt függvényklónból a triviális klónra képező homomorfizmus folytonos?*

5. Dinamikai rendszerek

5.1. **Folyamok.** A dinamikai rendszerek elméletében egy *folyam* egy $G \curvearrowright X$ csoporthatással adható meg, ahol G egy topologikus csoport, ami folytonosan hat az X kompakt Hausdorff téren, vagyis a $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto gx$ függvény folytonos. Egy G-folyam *minimális*, ha nincs valódi részfolyama.

Lemma 5.1. *Az alábbi állítások ekvivalensek egy $G \curvearrowright X$ folyamra.*

(1) *$G \curvearrowright X$ minimális.*
(2) *Nincs X-ben G-invariáns, zárt valódi részhalmaz.*
(3) *X-ben minden G-orbit sűrű.*

Bizonyítás. Egy kompakt Hausdorff térben a kompakt részhalmazok éppen a tér zárt halmazai. Így (1) $\Leftrightarrow$ (2) nyivánvaló. Megmutatjuk, hogy minden G-orbit lezártja G-invariáns (és persze zárt), ebből közvetlenül adódik (2) $\Leftrightarrow$ (3).

Legyen S egy G-invariáns halmaz, és legyen $g \in G$ tetszőleges. A g-vel való szorzás X-en, vagyis az $X \to X$, $x \mapsto gx$ függvény X-nek egy folytonos permutációja, aminek inverze, a g^{-1}-zel való szorzás szintén folytonos. Így a g-vel való szorzás X-nek egy homeomorfimusa. Tehát $g(\overline{S}) = \overline{g(S)} = \overline{S}$. □

A minimális folyamok többek között azért is nagyon fontosak a folyamok elméletében, mert minden folyamnak van minimális részfolyama. Ez a Zorn-lemma egy triviális következménye.

Tetszőleges G topologikus csoportnak van egy *univerzális minimális folyama*, vagyis egy olyan $G \curvearrowright M(G)$ folyam, aminek minden G-folyam *képe*. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $G \curvearrowright X$ folyam esetén létezik egy folytonos, szürjektív, G-*ekvivariáns* $f : M(G) \to X$ függvény, azaz $\forall g \in G, \forall y \in M(G)$ esetén $f(gy) = gf(y)$. Ez a folyam izomorfizmus erejéig egyértelmű, tehát ha $G \curvearrowright X_1$ és $G \curvearrowright X_2$ univerzális minimális folyamok, akkor létezik egy G-ekvivariáns $f : X_1 \to X_2$ homeomorfizmus.

Az általános konstrukció, ami megmutatja az univerzális minimális folyam létezését, igen komplikált, és nehezen alkalmazható. Ezért általános törekvés a dinamikai rendszerek vizsgálatában az univerzális minimális folyam kezelhető leírása bizonyos speciális esetekben. Egy egyszerű példaként megjegyezzük, hogy ha G egy kompakt Hausdorff csoport, akkor $M(G) = G$, és a hatás a balról szorzás. Ha azonban G nem kompakt, de lokálisan kompakt topologikus csoport, akkor $M(G)$ igen bonyolult; pl. tudjuk, hogy ilyen esetben $M(G)$ nem metrizálható [37, Theorem A2.2.].

Egy G topologikus csoportot *amenábilisnak* nevezünk, ha létezik $M(G)$-n egy G-invariáns Borel valószínűségi mérték.

Lemma 5.2. *Az alábbi állítások ekvivalensek egy G topologikus csoportra.*

(1) *G amenábilis.*
(2) *Minden minimális G-folyamon van G-invariáns Borel valószínűségi mérték.*
(3) *Minden G-folyamon van G-invariáns Borel valószínűségi mérték.*

Bizonyítás. (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) nyilvánvaló.

(1) $\Rightarrow$ (3) Legyen $G \curvearrowright X$ egy tetszőleges folyam, és legyen $G \curvearrowright Y$ egy minimális részfolyama. Ekkor $G \curvearrowright Y$ képe a $G \curvearrowright M(G)$ univerzális minimális folyamnak. Legyen $f : M(G) \to Y$ egy folytonos, szürjektív, G-ekvivariáns függvény. Legyen μ egy G-invariáns Borel valószínűségi mérték $M(G)$-n. Ekkor az X Borel-halmazain értelmezett

$\nu(A) := \mu(f^{-1}(A \cap Y))$ egy G-invariáns Borel valószínűségi mérték X-en. $\square$

Az amenabilitásnak egy extrém változata, ha $|M(G)| = 1$. Ez azzal ekvivalens, hogy minden G-folyamnak van fixpontja. Az ilyen csoportokról néhány éve igen keveset tudtunk, csak egy-egy konkrét esetben sikerült ezt a tulajdonságot igazolni.

5.2. **A Kechris-Pestov-Todorcevic-tétel.** A következő tétel emiatt is kiemelt jelentőségű, és mára a téma alaptételévé vált.

Tétel 5.3 (Kechris-Pestov-Todorcevic)**.** *Legyen Δ egy megszámlálható homogén struktúra egy megszámlálható nyelv felett. Az alábbi állítások ekvivalensek.*

(1) *Minden* $\mathrm{Aut}(\Delta)$*-folyamnak van fixpontja.*
(2) Δ *egy rendezett Ramsey-struktúra.*
(3) Δ *egy Ramsey-struktúra, és minden* $A \in \mathrm{Age}(\Delta)$ *merev.*

(1) $\Rightarrow$ (2) *bizonyítása.* Jelölje LO az összes teljes rendezést Δ alaphalmazán. Ekkor $\mathrm{LO} \subseteq 2^{\Delta^2}$ zárt. Tyihonov tétele szerint 2^{Δ^2} egy kompakt, Hausdorff tér, így LO is az. Az LO halmazon $\mathrm{Aut}(\Delta)$-nak értelmezhető egy folytonos csoporthatása, az úgynevezett *logikai hatás*. Ha $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ és $R \in \mathrm{LO}$, akkor $\alpha(R) \in \mathrm{LO}$ az a teljes rendezés, amire $(u, v) \in \alpha(R) \Leftrightarrow (\alpha^{-1}(u), \alpha^{-1}(v)) \in R$. Ennek az $\mathrm{Aut}(\Delta)$-folyamnak tehát van egy fixpontja, legyen ez $R_0 \in \mathrm{LO}$. Az R_0 teljes rendezést ekkor Δ minden automorfizmusa megőrzi.

A Ramsey-tulajdonság bizonyításához legyenek $A, B \in \mathrm{Age}(\Delta)$ és $\chi : \binom{\Delta}{A} \to \{0,1\}$ adottak. Legyen $X = \{0,1\}^{\binom{\Delta}{A}}$. Tyihonov tétele szerint X egy kompakt, Hausdorff tér. Ezen a téren is értelmezhető $\mathrm{Aut}(\Delta)$-nak egy folytonos csoporthatása. Ha $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ és $\nu \in X$, akkor $\alpha(\nu)$ az a színezés, amire A tetszőleges A' példányára Δ-ban $\alpha(\nu)(A') = \nu(\alpha^{-1}(A'))$. Legyen $Y := \overline{\mathrm{Aut}(\Delta) \cdot \chi}$. A feltétel szerint ennek az $\mathrm{Aut}(\Delta)$-folyamnak tehát van egy fixpontja, legyen ez $\mu \in Y$. Ha $A_1, A_2 \subseteq \Delta$ az A-nak két példánya, akkor létezik $\beta \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ amire $\beta(A_1) = A_2$. Mivel μ fixpontja $\mathrm{Aut}(\Delta)$-nak, így $\mu(A_2) = \beta(\mu)(A_2) = \mu(\beta^{-1}(A_2)) = \mu(A_1)$. Vagyis $\mu : \binom{\Delta}{A} \to \{0,1\}$ konstans. Legyen $B' \subseteq \Delta$ egy tetszőleges példánya B-nek, és jelöljük $A'_1, \ldots, A'_n$-vel az A példányait B'-ben. Ekkor $\mu \in \overline{\mathrm{Aut}(\Delta) \cdot \chi}$ miatt létezik $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Delta)$, hogy $\gamma(\chi) \restriction_{\{A'_1,\ldots,A'_n\}} = \mu \restriction_{\{A'_1,\ldots,A'_n\}}$, vagyis $\chi(\gamma^{-1}(A'_1)) = \cdots = \chi(\gamma^{-1}(A'_n))$. Vegyük észre, hogy $\gamma^{-1}(B')$-ben

A példányai éppen $\gamma^{-1}(A'_1), \ldots, \gamma^{-1}(A'_n)$, így $\gamma^{-1}(B')$ egy monokromatikus példánya B-nek. □

Az 5.3. Tételben a (2) ⇒ (3) irány triviális, a (3) ⇒ (1) irány viszont komolyabb elméleti megalapozást igényel. A tétel fontos eszközévé vált az ω-kategorikus struktúrák vizsgálatának, azonban igazi jelentősége a dinamikai rendszerek elméletében van. A strukturális Ramsey-elmélet előrehaladott eredményeit használva ezzel rengeteg olyan végtelen permutációcsoportra lehet példát adni, aminek univerzális minimális folyama triviális. Korábban csak néhány sporadikus példa volt ismert, így a szeparábilis Hilbert terek unitér transzformációinak csoportja [30] és $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ [50]. Ezek mindegyikére külön ötletet igényelt annak bizonyítása, hogy az univerzális minimális folyam triviális.

Az 5.3. Tétel csak speciális esete annak, amit Kechris, Pestov és Todorcevic bizonyítottak [37]-ben. A tétel általános formája lehetőséget ad arra, hogy átlátható leírást adjunk $M(\mathrm{Aut}(\Delta))$-ra, ha Δ reduktja egy rendezett Ramsey-struktúrának. Sokan gondolják úgy, hogy ez minden ω-kategorikus struktúrára igaz, és számos konkrét esetben ez igazolható is, így a Kechris-Pestov-Todorcevic-tétel topologikus csoportok egy széles osztályára írja le azok univerzális minimális folyamát. Pl. $M(\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, \mathrm{Cycl}))$ a Dedekind-szeletek tere, vagyis az a tér, ami a racionális számok halmazának leszálló részhalmazaiból áll (ebben az esetben azonosítanunk kell az $\emptyset$ és a $\mathbb{Q}$ Dedekind-szeleteket). Ez a tér "majdnem" az S^1 körvonal, annyi a különbség, hogy a körvonal racionális pontjait meg kell dupláznunk - ezek a duplázott racionális pontok az $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < q\}$ és $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq q\}$ szeleteknek felelnek meg adott $q \in \mathbb{Q}$-ra.

Jelen cikk szerzője Moritz Müllerrel közösen egy az 5.3. Tételhez hasonló karakterizációt adott azokra a struktúrákra, amik automorfizmuscsoportjának univerzális minimális folyama véges [44]. Azt is megmutattuk, hogy minden Ramsey-struktúra reduktja egy rendezett Ramsey-struktúrának. Így minden esetben, amikor arról beszélünk, hogy egy struktúra reduktja egy rendezett Ramsey-struktúrának, valójában a rendezettség feltétele elhagyható. Továbbá beláttuk, hogy amennyiben egy Ramsey-tulajdonságú relációs struktúra automorfizmuscsoportja amenábilis, akkor az invariáns Borel valószínűségi mérték egyértelmű a csoport univerzális minimális folyamán, és az egy *generikus* orbiton koncentrálódik. (Egy halmaz generikus, ha komplementere előáll megszámlálhatóan sok sehol sem sűrű zárt halmaz uniójaként.) Zucker megmutatta [60], hogy hasonló eredmény nem igaz, ha függvényjeleket is megengedünk a struktúra nyelvében. A kételemű test feletti megszámlálhatóan végtelen dimenziós vektortér automorfizmuscsoportjának univerzális minimális folyamán az egyetlen invariáns Borel valószínűségi mérték 0-nak méri a generikus orbitot. A [37]-beli eredményeket Angels, Kechris és Lyons [4] cikke vitte tovább, amiben a fentebb definiált fogalmakat és az ezekkel kapcsolatos kérdéseket tárgyalják. Megmutatták például, hogy a véletlen gráf automorfizmuscsoportjának univerzális minimális folyamán egyetlen invariáns Borel valószínűségi mérték van.

5.3. **Nyitott problémák.** A következő problémáról és annak jelentőségéről a [4, 61, 43] cikkekben olvashatunk.

Probléma 10. *Igaz-e, hogy tetszőleges ω-kategorikus Δ struktúrára az* $\mathrm{Aut}(\Delta)$ *topologikus csoport univerzális minimális folyama metrizálható?*

Zucker megmutatta [61], hogy ha $\mathrm{Sym}(D)$ egy zárt G részcsoportjára $M(G)$ metrizálható, akkor G-nek van egy (egyértelmű) generikus orbitja $M(G)$-ben. Ez alapján Melleray, Nguyen van Thé és Tsankov belátták [43], hogy ω-kategorikus Δ esetén $M(\mathrm{Aut}(\Delta))$ pontosan akkor metrizálható ha létezik egy ω-kategorikus Γ, ami rendezett, Ramsey, és aminek Δ reduktja. Eszerint a 10. Pobléma ekvivalens a Bodirsky-Pinsker-sejtés alábbi változatával, amit ebben a formában [17, Problem 28.]-ban vetettek fel.

Probléma 11. *Igaz-e, hogy minden ω-kategorikus struktúra reduktja egy ω-kategorikus (rendezett) Ramsey-struktúrának?*

A kérdésben a rendezett szó elhagyható, hiszen minden ω-kategorikus Ramsey-struktúra reduktja egy ω-kategorikus rendezett Ramsey-struktúrának [44].

A következő kérdéssel felvázolunk egy ígéretes stratégiát a 11. Probléma esetleges cáfolatára.

Probléma 12. *Van-e tetszőlegesen nagy n-re olyan ω-kategorikus Δ_n struktúra, amire* $\mathrm{Aut}(\Delta_n)$ *n-tranzitív és* $\mathrm{Aut}(\Delta)$*-nak létezik valódi részfolyama LO-ban, azaz a Δ-n értelmezett teljes rendezések terén?*

Ha a 12. Problémára pozitív válasz adható, akkor az így kapott Δ_n struktúrák vegyítésével kapott Δ struktúra is ω-kategorikus. Valóban, minden n-re egy n-es típusa Δ-ban csak annak Δ_k-beli típusaitól függ, ahol $1 \leq k \leq n-1$, és ilyenből csak véges sok van. Ha ez a a vegyítés elvégezhető úgy, hogy az $\mathrm{Aut}(\Delta_n)$ csoportok LO-beli folyamai diszjunktak (mint a lentebb bemutatott példákban is), akkor Δ ellenpéldát ad a 11. Problémára. Ha ugyanis létezne egy Γ ω-kategorikus, rendezett

Ramsey-struktúra, aminek Δ reduktja, akkor $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ hatna minden n-re az $\mathrm{Aut}(\Delta_n)$ LO-beli valódi részfolyamán, így a Kechris-Pestov-Todorcevic-tétel miatt minden ilyen részfolyamban lenne $\mathrm{Aut}(\Gamma)$-nak egy fixpontja. Ekkor Γ-ban végtelen sok teljes rendezést tudnánk elsőrendben definiálni, ami ellentmond az ω-kategoricitásnak. Kis n-ekre több ismert példa is van, ami megfelel a Δ_n-nel szemben támasztott követelményeknek, és ezek vegyítésével az automorfizmuscsoportnak valóban diszjunkt részfolyamait kapjuk LO-ban. Pl. $n = 1$-re a generikus részbenrendezés megfelelő, az LO-beli részfolyam azokból a teljes rendezésekből áll, amik kiterjesztik a részbenrendezést. Az $n = 2$ esetben jó válsztás a $(\mathbb{Q}, \mathrm{Cycl})$ struktúra, $n = 3$-ra pedig a véletlen D-reláció (a definíció pl. [2]-ben található).

A következő probléma önmagában is érdekes, de főként azért fontos, mert a benne foglalt állítás [44] alapján erősebb a 12. Problémánál.

Probléma 13. *Van-e tetszőlegesen nagy n-re olyan ω-kategorikus Δ_n Ramsey-struktúra, amire $\mathrm{Aut}(\Delta_n)$ n-tranzitív és nem $(n+1)$-tranzitív?*

References

[1] Ackerman, N., Freer, C., Patel, R. Invariant measures concentrated on countable structures. beküldve, arXiv:1206.4011 [math.LO], 2012.

[2] Adeleke, S. A., Neumann, P. M. Relations related to betweenness: their structure and automorphisms. *Memoirs of the American Mathematical Society 131*, 623 (1998), viii+125.

[3] Ahlbrandt, G., Ziegler, M. Quasi-finitely axiomatizable totally categorical theories. *Annals of Pure and Applied Logic 30*, 1 (1986), 63–82.

[4] Angel, O., Kechris, A. S., Lyons, R. Random orderings and unique ergodicity of automorphism groups. *Journal of the European Mathematical Society 16* (2014), 2059–2095.

[5] Barto, L., Kozik, M. Congruence distributivity implies bounded width. *SIAM Journal on Computing 39*, 4 (2009), 1531–1542.

[6] Bennett, J. H. *The reducts of some infinite homogeneous graphs and tournaments*. PhD thesis, Rutgers university, 1997.

[7] Bodirsky, M. Ramsey classes: examples and constructions. beküldve, 2014.

[8] Bodirsky, M., Junker, M. $\aleph_0$-categorical structures: interpretations and endomorphisms. *Algebra Universalis 64*, 3-4 (2011), 403–417.

[9] Bodirsky, M., Kára, J. The complexity of temporal constraint satisfaction problems. *Journal of the ACM 57*, 2 (2009), 41 pp. egy kiterjesztett absztrakt a STOC'08 kiadványában érhető el.

[10] Bodirsky, M., Nešetřil, J. Constraint satisfaction with countable homogeneous templates. *Journal of Logic and Computation 16*, 3 (2006), 359–373.

[11] Bodirsky, M., Pinsker, M. Reducts of Ramsey structures. *Model Theoretic Methods in Finite Combinatorics*, vol. 558 of *Contemporary Mathematics*. American Mathematical Society, 2011, pp. 489–519.

[12] Bodirsky, M., Pinsker, M. Schaefer's theorem for graphs. *Proceedings of STOC'11* (2011), pp. 655–664. a teljes cikk elérhető arXiv:1011.2894 [cs.CC].

[13] Bodirsky, M., Pinsker, M. Topological Birkhoff. *Transactions of the American Mathematical Society* (2014). elfogadva, arXiv:1203.1876 [math.LO].

[14] Bodirsky, M., Pinsker, M., Pongrácz, A. The 42 reducts of the random ordered graph. beküldve, 2013.

[15] Bodirsky, M., Pinsker, M., Pongrácz, A. Projective clone homomorphisms. beküldve, 2014.

[16] Bodirsky, M., Pinsker, M., Pongrácz, A. Reconstructing the topology of clones. beküldve, arXiv:1312.7699 [math.LO], 2014.

[17] Bodirsky, M., Pinsker, M., Tsankov, T. Decidability of definability. *Journal of Symbolic Logic 78*, 4 (2013), 1036–1054.

[18] Bulatov, A. A dichotomy theorem for constraint satisfaction problems on a 3-element set. *Journal of the ACM 53*, 1 (2006), 66–120.

[19] Bulatov, A., Jeavons, P. G., Krokhin, A. Classifying the complexity of constraints using finite algebras. *SIAM Journal on Computing 34* (2005), 720–742.

[20] Bulatov, A., Jeavons, P. G., Krokhin, A. The complexity of constraint satisfaction: An algebraic approach (a survey paper). *Structural Theory of Automata, Semigroups and Universal Algebra (Montreal, 2003), NATO Science Series II: Mathematics, Physics, Chemistry 207* (2005), 181–213.

[21] Cameron, P. J. Transitivity of permutation groups on unordered sets. *Mathematische Zeitschrift 148* (1976), 127–139.

[22] Cameron, P. J. The random graph revisited. *European Congress of Mathematics* (2001), vol. 201 of *Progress in Mathematics*, Birkhäuser Basel, pp. 267–274.

[23] Cameron, P. J. *Aspects of infinite permutation groups*, vol. 339 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, 2007.

[24] Cherlin, G. The classification of countable homogeneous directed graphs and countable homogeneous n-tournaments. *Memoirs of the American Mathematical Society 131*, 621 (1998).

[25] Dixon, J., Peter M. Neumann, Thomas, S. Subgroups of small index in infinite symmetric groups. *Bulletin of the London Mathematical Society 18*, 6 (1986), 580–586.

[26] Evans, D. M. Subgroups of small index in general linear groups. *Bulletin of the London Mathematical Society 18* (1986), 587–590.

[27] Fagin, R. Probabilities on finite models. *Journal of Symbolic Logic 41*, 1 (1976), 50–58.

[28] Fouché, W. L. Symmetry and the Ramsey degree of posets. *Discrete Mathematics* (1997), 309–315.

[29] Graham, R. L., Rothschild, B. L., Spencer, J. H. *Ramsey theory*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990. Second edition.

[30] Gromov, M., Milman, V. D. A topological application of the isoperimetric inequality. *American Journal of Mathematics 105* (1983), 843–854.

[31] Henson, C. W. A family of countable homogeneous graphs. *Pacific Journal of Mathematics 38* (1971), 69–83.

[32] Herwig, B. Extending partial isomorphisms for the small index property of many ω-categorical structures. *Israel Journal of Mathematics 107* (1998), 93–123.

[33] Hodges, W. *A shorter model theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[34] Hodges, W., Hodkinson, I., Lascar, D., Shelah, S. The small index property for ω-categorical ω-stable structures and for the random graph. *Journal of the London Mathematical Society 48*, 2 (1993), 204–218.

[35] Jasiński, J., Laflamme, C., Nguyen van Thé, L., Woodrow, R. Ramsey precompact expansions of homogeneous directed graphs. beküldve, 2014.

[36] Junker, M., Ziegler, M. The 116 reducts of $(\mathbb{Q}, <, a)$. *Journal of Symbolic Logic 73*, 3 (2008), 861–884.

[37] Kechris, A., Pestov, V., Todorcevic, S. Fraissé limits, Ramsey theory, and topological dynamics of automorphism groups. *Geometric and Functional Analysis 15*, 1 (2005), 106–189.

[38] Lachlan, A. H. Countable homogeneous tournaments. *Transactions of the American Mathematical Society 284* (1984), 431–461.

[39] Lachlan, A. H., Woodrow, R. Countable ultrahomogeneous undirected graphs. *Transactions of the American Mathematical Society 262*, 1 (1980), 51–94.

[40] Lascar, D. Autour de la propriété du petit indice. *Proceedings of the London Mathematical Society 62*, 3 (1991), 25–53. francia nyelven.

[41] Macpherson, H. D. A survey of homogeneous structures. http://ambio1.leeds.ac.uk/Pure/staff/macpherson/homog7.pdf.

[42] Macpherson, H. D. A survey of homogeneous structures. *Discrete Mathematics 311* (2011), 1599–1634.

[43] Melleray, J., Nguyen van Thé, L., Tsankov, T. Polish groups with metrizable universal minimal flows. beküldve, arXiv:1404.6167 [math.DS], 2014.

[44] Müller, M., Pongrácz, A. Topological dynamics of unordered Ramsey structures. elfogadva, 2014.

[45] Nešetřil, J., Rödl, V. Partitions of finite relational and set systems. *Journal of Combinatorial Theory, Series A 22*, 3 (1977), 289–312.

[46] Nešetřil, J. Ramsey theory. *Handbook of Combinatorics* (1995), 1331–1403.

[47] Nešetřil, J. Ramsey classes and homogeneous structures. *Combinatorics, Probability and Computing 14*, 1-2 (2005), 171–189.

[48] Nešetřil, J., Rödl, V. The partite construction and Ramsey set systems. *Discrete Mathematics 75*, 1-3 (1989), 327–334.

[49] Pach, P. P., Pinsker, M., Pluhár, G., Pongrácz, A., Szabó, Cs. Reducts of the random partial order. *Advances in Mathematics* (2014). elfogadva.

[50] Pestov, V. On free actions, minimal flows and a problem by Ellis. *Transactions of the American Mathematical Society 350*, 10 (1998), 4149–4165.

[51] Pongrácz, A. Reducts of the Henson graphs with a constant. elfogadva, 2013.

[52] Rubin, M. On the reconstruction of ω-categorical structures from their automorphism groups. *Proceedings of the London Mathematical Society 3*, 69 (1994), 225–249.

[53] Schaefer, T. J. The complexity of satisfiability problems. *Proceedings of STOC* (1978), pp. 216–226.

[54] Schmerl, J. H. Countable homogeneous partially ordered sets. *Algebra Universalis 9* (1979), 317–321.

[55] Semmes, S. W. Endomorphisms of infinite symmetric groups. *Abstracts of the American Mathematical Society 2* (1981), 426.
[56] Thomas, S. Reducts of the random graph. *Journal of Symbolic Logic 56*, 1 (1991), 176–181.
[57] Thomas, S. Reducts of random hypergraphs. *Annals of Pure and Applied Logic 80*, 2 (1996), 165–193.
[58] Truss, J. K. Infinite permutation groups. II. Subgroups of small index. *Journal of Algebra 120*, 2 (1989), 494–515.
[59] Truss, J. K. The automorphism group of the random graph: four conjugates good, three conjugates better. *Discrete Mathematics 268* (2003), 257–271.
[60] Zucker, A. Amenability and unique ergodicity of automorphism groups of Fraïssé structures. beküldve, arXiv:1304.2839 [math.LO], 2013.
[61] Zucker, A. Topological dynamics of closed subgroups of S_∞. beküldve, arXiv:1404.5057 [math.LO], 2014.

School of Science and Technology, Middlesex University, The Burroughs, London NW4 4BT, United Kingdom
URL: http://www.eis.mdx.ac.uk/staffpages/andraspongracz/