Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

ON THE PROJECTIVE THEORY OF SPRAYS WITH APPLICATIONS TO FINSLER GEOMETRY

Szilasi Zoltán

Témavezető: Dr. Bácsó Sándor egyetemi docens

Debreceni Egyetem

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2010.

1. Előzmények, motiváció és célkitűzések

A Debreceni Egyetem Matematikai Intézetének legnagyobb hagyományokkal rendelkező kutatásai a differenciálgeometria egy fontos, klasszikus fejezetének, a Finsler-geometriának tárgykörébe tartoznak. Ezeket a kutatásokat Varga Ottó, valamint közvetlen tanítványai, Rapcsák András, Tamássy Lajos, Moór Arthur és Soós Gyula indították el. (Varga Ottó születésének 100. évfordulójáról 2009-ben emlékeztünk meg.) Az értekezés *témájában* ezekhez a hagyományokhoz csatlakozik, sőt még régebbi forrásból is merít. Varga Ottó tudományos munkásságát Ludwig Berwald irányításával a Prágai Német Egyetemen kezdte el az 1930-as évek közepe táján. Ludwig Berwald (1883-1942) volt a klasszikus Finsler-geometria tényleges megalapozója és legkiválóbb művelője. Értekezésünk sokban támaszkodik Berwald két nagyszerű dolgozatára ([16],[17]), amelyekhez a lehetőségek szerint terminológiánkban és jelöléseinkben is igyekszünk igazodni. *Módszereinkben* ugyanakkor azt az ezredforduló táján kidolgozott apparátust (ld. pl. [57]) alkalmazzuk, amelynek szembeszökő formai jegye a klasszikus differenciálgeometria indexektől tobzódó írásmódjának teljes hiánya. Tartalmilag: tárgyalásunk színteréül - a több kínálkozó lehetőség közül - egy sokaság érintőnyalábjának a hasított érintőnyaláb projekciója általi visszahúzottját („pull-back") választottuk. Ennek megfelelően az alkalmazott formalizmusra a *pull-back formalizmus* elnevezés is használatos az irodalomban. Bár az utóbbi időben számos munka íródott ebben a formalizmusban, a klasszikus elmélet még távolról sincs átültetve erre a nyelvre. Ennek számos oka van. Az egyik nyilvánvaló ok az, hogy a különböző iskolák ragaszkodnak saját, megszokott nyelvezetükhöz és eszközeikhez. Egy másik, nyomós ok az, hogy a „fordítás" például a klasszikus tenzorkalkulusról a pull-back formalizmusra egyáltalán nem automatikus, és ez hatványozottan igaz a bizonyítások index-mentessé tételére.

A disszertáció vezérelve az a már Berwaldnál kitapintható észrevétel, hogy

a Finsler geometria egy jelentős része kifejezhető pusztán a struktúrát definiáló Finsler-függvény által meghatározott kanonikus sprayre alapozva.

Röviden:

a Finsler geometria nagy mértékben spray-geometria.

Ennek megfelelően munkánk során egyik célkitűzésünk az volt, hogy - határozott prioritást biztosítva a spray-struktúrának - lehetőleg teljes és önmagából megérthető („self contained") módon kifejtsük a spray-geometriának azt a részét, amelyre a vizsgálni kívánt speciális problémák tárgyalásánál szükség van. Ez a célkitűzés azt is maga után vonta, hogy *önálló bizonyítással* együtt tárgyaljunk olyan, a hagyományos elméletből ismert tényeket, amelyek a mi fogalmi kereteink között eddig nem voltak elérhetők. Az ebbe a kategóriába tartozó vizsgálataink három csoportba sorolhatók:

(1) Technikai jellegű eredmények megfogalmazása és igazolása. Tipikus példák: homogenitási tulajdonságok, Ricci- és Bianchi-azonosságok.

(2) Fontos klasszikus tételek új interpretációja és bizonyítása. Példák: a Schur-lemma Finsler-geometriai verziója, a skalárgörbületű Finsler-sokaságokra vonatkozó Berwald - del Castillo - Szabó Z. tétel.

(3) A kétdimenziós Finsler-sokaságok Berwald-féle elméletének átültetése a pull-back formalizmusba.

Vizsgálataink egy további része a következő problémafölvetés köré összpontosul:

Mit mondhatunk egy olyan Finsler-sokaságról, amelynek valamelyik fontos tenzoriális adata csakis helyfüggő?

A kérdés azért érdekes és természetes, mert a Finsler-geometria tipikusan hely *és* irányfüggő objektumokkal dolgozik. Az első klasszikus tétel, amely ebbe a kategóriába sorolható, éppen az imént említett Schur-lemma, amely (további, technikai feltételek mellett) azt állítja, hogy ha egy Finsler-sokaság skalárgörbülete pusztán a helytől függ, akkor a skalárgörbület konstans függvény. A kérdéskör módszeres vizsgálatát témavezetőm, Bácsó Sándor és Makoto Matsumoto japán professzor indította el az 1990-es évek végén, munkánkkal ezekhez a kutatásokhoz csatlakoztunk.

A Finsler-geometria egyik legintenzívebben kutatott és igen szerteágazó témája *a speciális* - bizonyos tulajdonsággal kitüntetett - *Finsler-sokaságok vizsgálata.* A tárgykör talán legmélyebb eredménye is erre a területre esik: Szabó Zoltán 1981-ben általános struktúratételt nyert az ún. *Berwald-sokaság*okra [55], amelyet az utóbbi években tovább finomított [56]. Dolgozatunkban szintén foglalkozunk bizonyos tenzoriális feltételekkel definiált speciális Finsler-sokaságokkal.

Rapcsák András az 1960-as évek elején fontos eredményeket ért el az ún. *pályatartó leképezések* elméletében, és egy ezzel szorosan rokon témában, a *pályaterek metrizálhatóságá*nak vizsgálatában. A tárgykör érdekességét aláhúzza, hogy Hilbertnek az 1900-as Párizsi Matematikai Kongresszuson tartott híres előadásában felvetett IV. problémája megfogalmazható ilyen metrizálási problémaként. A Rapcsák András által kapott eredmények egy része az ezredforduló táján modern megfogalmazást és bizonyítást nyert [61]; ezt a munkát is folytatni kívántuk, kapcsolódva egyben témavezetőm és M. Matsumoto ide vonatkozó vizsgálataihoz ([2], ill. [38]).

2. Az értekezés tartalma és új eredményei

A következőkben rövid összefoglalását adjuk az egyes fejezetek tartalmának, és felsoroljuk, hogy mi az *igazán új* eredmény bennük, ill. melyek a *részben*, vagy csupán *technikailag új* észrevételek. Említést teszünk *klasszikus eredmények új interpretációjá*ról és *bizonyítás*áról is.

1. fejezet A munkát a szükséges előzmények rövid összefoglalásával indítjuk. Ebben a fejezetben azokat a legnélkülözhetetlenebb differenciálgeometriai fogalmakat és tényeket gyűjtjük össze, amelyekre a továbbiakban végig támaszkodunk, rögzítve egyúttal az alapvető jelölésbeli és terminológiai megállapodásokat is. A fejezet egyetlen, technikai szempontból érdekes újdonságot tartalmaz, a τ-menti $\binom{1}{s+1}$-típusú tenzormezők nyomának egy induktív értelmezését, amely későbbi, következetesen indexmentes számolásainkban hasznosnak és hatékonynak fog bizonyulni. (Megjegyezzük, hogy az operáció a koordinátás nyelvezetben természetesen igen egyszerű: összegzést jelent a kontavariáns és az *első* kovariáns indexre.)

A teljesség kedvéért reprodukálunk egy egyszerű bizonyítást a *differenciális Bianchi-azonosság*ra, amelyet általános (de véges rangú) vektornyalábon adott kovariáns deriválásra fogalmazunk meg.

Vizsgálataink színtere a továbbiakban a $\tau : TM \to M$ érintőnyaláb, ill. a $\mathring{\tau} : \mathring{T}M \to M$ hasított érintőnyaláb τ, ill. $\mathring{\tau}$ általi visszahúzottja, a

$$\pi : TM \times_M TM \to TM \text{ , ill. a } \mathring{\pi} : \mathring{T}M \times_M TM \to \mathring{T}M$$

„pull-back" nyaláb; nevezzük a rövidség kedvéért az utóbbit *Finsler-nyaláb*nak. A $\mathring{\pi}$ szelései által alkotott $\mathrm{Sec}(\mathring{\pi})$ $C^\infty(\mathring{T}M)$-modulus tenzoralgebráján az ismert eljárással bevezetünk egy kanonikus tenzorderivációt, a ∇^{v} vertikális differenciálást.

2. fejezet Rögzítjük, hogy mit értünk *Ehresmann-konnexió*n, és emlékeztetünk a *spray* fogalmára, valamint ennek különböző verzióira (semispray, másodrendű vektormező, affin spray). Bár mindkét fogalom jól ismert, a pontos definiálásukra szükség van, ugyanis az irodalomban számos nem ekvivalens variánsukkal találkozhatunk. Leírjuk az Ehresmann-konnexiók és a semisprayk között M. Crampin és J. Grifone által felírt, alapvető kapcsolatot. Bevezetjük számolásaink legfontosabb technikai eszközét, a *Berwald-deriválás*t (∇), amely egy Ehresmann-konnexió által származtatott „horizontális rész”-ből (∇^{h}) és a vertikális differenciálásból épül fel. Egy $\mathring{T}M$-en értelmezett sima függvény második horizontális differenciáljára levezetjük a *hh-Ricci azonosság*ot. Ebben fellép az alapulvett Ehresmann-konnexió $\mathbf{R}$ görbületi tenzora. Megmutatjuk, hogy ennek horizontális differenciáljára érvényes a

$$\underset{(X,Y,Z)}{\mathfrak{S}}(\nabla^{\mathsf{h}}\mathbf{R})(\widehat{X},\widehat{Y},\widehat{Z})=0$$

Bianchi-azonosság. Ezzel a fontos relációval nem találkoztunk az irodalomban. Tartalmilag azt fejezi ki, amit a J. Grifone alapvető dolgozatának [27] I.61 állításában szereplő

$$[h,R]=0$$

reláció. Itt a $[,]$ szimbólum az ún. Frölicher-Nijenhuis zárójel, amelynek kiértékelése meglehetősen hosszadalmas. Az általunk felírttal szorosan rokon és hasonló formájú Bianchi-azonosságot nyert korábban M. Crampin is [18], de sokkal kevésbé természetes módon.

3. fejezet Az Ehresmann-konnexiók *Berwald-görbület*ét vizsgáljuk, amelyet úgy kapunk, hogy a Berwald-deriválásból származó szokásos

$$R^{\nabla}(\xi,\eta):\widetilde{Z}\in\operatorname{Sec}(\mathring{\pi})\mapsto R^{\nabla}(\xi,\eta)\widetilde{Z}:=\nabla_\xi\nabla_\eta\widetilde{Z}-\nabla_\eta\nabla_\xi\widetilde{Z}-\nabla_{[\xi,\eta]}\widetilde{Z}\in\operatorname{Sec}(\mathring{\pi})$$

görbületi operátort vertikális és horizontális vektormezőkön értékeljük ki:

$$\mathbf{B}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) := R^{\nabla}(\mathbf{i}\widetilde{X},\mathcal{H}\widetilde{Y}) \ ; \ \widetilde{X},\widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\mathring{\pi}).$$

(Az $\mathbf{i}$ $C^{\infty}(\mathring{T}M)$-lineáris leképezés azonosítja a $\mathrm{Sec}(\mathring{\pi})$ modulust a $\mathring{T}M$ fölötti vertikális vektormezők modulusával.)

Néhány, a későbbiekhez szükséges technikai jellegű eredmény (kiszámítási formula, szimmetria- és homogenitási tulajdonságok, a $\mathbf{B}$ tenzort tartalmazó Ricci-azonosságok) levezetése mellett megmutatjuk, hogy *a Berwald-görbület pontosan akkor tűnik el, ha az Ehresmann-konnexióból származó horizontális deriválás bázikus* abban az értelemben, hogy egy, az alapsokaságon adott

$$D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto \mathfrak{X}(M) \ , \ (X,Y) \mapsto D_X Y$$

kovariáns deriválás természetes liftje:

$$\nabla^{\mathsf{h}}_{\widehat{X}} \widehat{Y} = \widehat{D_X Y} \ ; \ X,Y \in \mathfrak{X}(M);$$

$$\widehat{X}(v) := (v, X(\tau(v))) \ , \ v \in \mathring{T}M.$$

4. fejezet Ebben a szakaszban az Ehresmann-konnexiók ún. *affin görbület*ét diszkutáljuk, különös tekintettel arra az esetre, amikor az Ehresmann-konnexiót egy spray generálja a Crampin-Grifone konstrukció szerint. Az affin görbületet az Ehresmann-konnexióhoz csatolt Berwald deriválásból úgy kapjuk, hogy annak görbületi operátorát két horizontális vektormezőn értékeljük ki:

$$\mathbf{H}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) := R^{\nabla}(\mathcal{H}\widetilde{X},\mathcal{H}\widetilde{Y}) \ ; \ \widetilde{X},\widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\mathring{\pi}).$$

Terminológiánkban („affin görbület") L. Berwald szóhasználatát követjük [17]. Amennyiben $\nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{H} = 0$, Z. Shen nyomán azt mondjuk, hogy az Ehresmann-konnexió *R-kvadratikus*.

Levezetjük a $\mathbf{H}$ affin görbületi és az $\mathbf{R}$ görbületi tenzor között fennálló

$$\mathbf{H}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z} = \nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{R}(\widetilde{Z},\widetilde{X},\widetilde{Y})$$

és

$$\mathbf{R}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \mathbf{H}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\delta \ , \textit{ ha az Ehresmann-konnexió homogén}$$

kapcsolatot. (A második relációban δ a $v \in TM \mapsto \delta(v) := (v,v) \in TM \times_M TM$ kanonikus szelés.) Szintén homogén Ehresmann-konnexió esetén megmutatjuk, hogy az $\mathbf{R}$ görbületi tenzor elsőfokú, a $\mathbf{H}$ affin görbület nulladfokú homogén.

A következőkre nézve feltesszük, hogy az alapulvett Ehresmann-konnexió *torziómentes*, ami azzal ekvivalens, hogy tetszőleges $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők esetén

$$[X^{\mathsf{h}},Y^{\mathsf{v}}] - [Y^{\mathsf{h}},X^{\mathsf{v}}] - [X,Y]^{\mathsf{v}} = 0.$$

Levezetjük a $\mathbf{H}$ tenzorra vonatkozó

$$\underset{(X,Y,Z)}{\mathfrak{S}} \mathbf{H}(\widehat{X},\widehat{Y})\widehat{Z} = 0$$

*algebrai Bianchi-azonosság*ot, valamint a $\mathbf{H}$ és a $\mathbf{B}$ tenzort tartalmazó

$$\nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{H}(\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z},\widetilde{U}) - \nabla^{\mathsf{h}}\mathbf{B}(\widetilde{Y},\widetilde{X},\widetilde{Z},\widetilde{U}) + \nabla^{\mathsf{h}}\mathbf{B}(\widetilde{Z},\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{U}) = 0$$

*differenciális Bianchi-azonosság*ot.

További, későbbi meggondolásainkhoz szükséges technikai eredményként leszármaztatjuk a szelések és az 1-formák második horizontális kovariáns differenciáljára vonatkozó *Ricci-formulák*at, ezekben a $\mathbf{H}$ affin görbületi tenzor és az $\mathbf{R}$ görbületi tenzor lép fel.

Mindezek birtokában be-, ill. levezetjük azokat az összefüggéseket, amelyeknek tenzorkomponensekben felírt alakját Berwald az alapvető görbületi adatok definiálására használta a már említett, klasszikus dolgozatában. A kiindulópont ekkor egy S spray (Berwaldnál egy koordinátás formában felírt másodrendű differenciálegyenlet). Tekintjük az S-ből származó $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexiót és az ehhez tartozó $\mathcal{V}$ vertikális leképezést. A spray *affin elhajlási tenzor*a (Berwald terminológiája) vagy *Jacobi-endomorfizmus*a a

$$\mathbf{K}(\widetilde{X}) := \mathcal{V}[S, \mathcal{H}\widetilde{X}] \ , \ \widetilde{X} \in \mathrm{Sec}(\mathring{\pi})$$

előírással értelmezett $\mathbf{K}$ $\binom{1}{1}$-tenzor. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{K}$-ból $\mathcal{H}$ görbületi tenzora az

$$\mathbf{R}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \frac{1}{3}(\nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{K}(\widetilde{Y},\widetilde{X}) - \nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{K}(\widetilde{X},\widetilde{Y})) \ ; \ \widetilde{X},\widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\mathring{\pi})$$

összefüggés szerint kapható meg.

A fejezetet egy spray *lapos*ságának (flatness) és *izotrop*iájának rövid, előzetes diszkussziójával zárjuk. A Jacobi-endomorfizmus a definíció értelmében mindkét esetben nagyon speciális alakú. Azonnal kiderül, hogy a laposság igen erős megszorítást jelent: a Jacobi-endomorfizmus eltűnését vonja maga után, amiből következik, hogy a **H** affin görbületi tenzor és az **R** görbületi tenzor is eltűnik. Az izotrop sprayk részletesebb tanulmányozására a Finsler-keretek között kerítünk sort.

5. fejezet Azt mondjuk, hogy egy sprayn *projektív változtatás*t hajtunk végre, ha hozzáadjuk a Liouville vektormező egy függvényszeresét úgy, hogy eredményül továbbra is sprayt kapjunk. Ehhez szükséges és elegendő, hogy a kérdéses függvény, amelyet *projektív faktor*nak hívunk, az érintősokaságon C^1-osztályú, a hasított érintősokaságon sima, elsőfokú pozitív homogén függvény legyen. Más nézőpontból: két spray *projektíven ekvivalens*, ha különbségük a Liouville vektormező mondott tulajdonságú függvényszerese.

A fejezet indításaként a sprayk projektív változtatásával kapcsolatos alapvető tényeket tekintjük át. A tipikus jelenség az, hogy projektív változtatás során a sprayhez csatolt, eddig említett összes objektum (Ehresmann konnexió és a hozzá csatolt leképezések, horizontális derivált, Berwald-görbület, Jacobi-endormorfizmus, ...) változik. Felsoroljuk, a horizontális Berwald-derivált esetén pedig le is vezetjük az „eredeti” és az „új” spray ezen geometriai adatainak explicit kapcsolatát. Megmutatjuk, hogy *a* **B** *Berwald-görbület a spray projektív változtatása esetén akkor és csak akkor marad invariáns, ha invariáns marad a nyoma.* **B** invarianciájának kritériuma egy egyszerű parciális differenciálegyenletet ad a projektív faktorra, amelyet koordinátamentes módon megoldunk.

Ismeretes, hogy két olyan alapvető tenzor konstruálható, amely egy spray projektív változtatása során invariáns marad: a *Douglas-görbület* ($\mathbf{D}$) és a *Weyl-endomorfizmus* ($\mathbf{W}^\circ$); az előbbi a Berwald-görbületből, az utóbbi a Jacobi-endomorfizmusból származtatható. További projektíven invariáns tenzorok nyerhetők $\mathbf{D}$ és $\mathbf{W}^\circ$ vertikális differenciálásával. Célkitűzéseink szellemében mind a Douglas-görbületet, mind a Weyl-endomorfizmust indexmentesen vezetjük be. $\mathbf{W}^\circ$ definiálásakor, változtatva a változtatandókon, del Castillo egy munkáját [22] vettük alapul, megadtuk azonban e tenzornak egy jóval áttekinthetőbb, és így haszonosabbnak bizonyuló előállítását is.

6. fejezet Indulásként pontosan rögzítjük, hogy mit értünk *Finsler-függvény*en, bevezetve így disszertációnk másik központi fogalmát. Koordinátamentesen definiáljuk a Finsler-függvényekhez csatolható, vizsgálatainkban nélkülözhetetlen geometriai adatokat (Hilbert 1-forma, normalizált támaszelem-mező, szögmetrika, Cartan-tenzorok, Landsberg-tenzor), és igazolunk ezekkel kapcsolatban néhány, többé-kevésbé technikai jellegű, de az alkalmazások szempontjából fontos észrevételt. Megadjuk egyebek mellett egy Finsler-függvény harmadik vertikális differenciáljának kifejezését a kovariáns Cartan-tenzor, a normalizált támaszelem-mező és a szögmetrika segítségével.

Emlékeztetünk a Finsler-függvények által meghatározott *kanonikus spray* kordinátamentes definíciójára, amely az energiafunkcionálhoz tartozó Euler-Lagrange egyenlet egy finom és elegáns átfogalmazásán alapul. A kanonikus spray birtokában a Finsler-geometriai vizsgálatokhoz szükséges tenzoriális objektumok a

$$\textit{Finsler-függvény} \longrightarrow \textit{kanonikus spray} \longrightarrow$$
$$\textit{Ehresmann-konnexió} \longrightarrow \textit{görbületek}$$

séma szerint vezethetők be, és Finsler-kontextusban is alkalmazhatókká válnak a spray-elmélet általános konstrukciói, technikái és eredményei. A kanonikus spray által meghatározott Ehresmann-konnexiót ekkor *Berwald-konnexió*nak (vagy a *Finsler-sokaság kanonikus konnexiójá*nak) nevezzük. A Berwald-konnexióból az ismert (és már jelzett) módon származtatható a Berwald-*deriválás* (amely természetesen nem tévesztendő össze a kiinduló Berwald-*konnexió*val!).

A fejezet egyetlen igazán érdekes eredménye egy klasszikus tétel modern interpretálása és bizonyítása. Már többször is idézett munkájában [17] Berwald megmutatta, hogy *egy legalább 3-dimenziós skalárgörbületű Finsler-sokaság Weyl-endomorfizmusa eltűnik*, és egy *további feltétel előírása mellett* a megfordítást is igazolta. Szabó Zoltán észrevette [54], hogy a megfordításhoz nincs szükség további feltételre, tehát *egy legalább 3-dimenziós Finsler-sokaság pontosan akkor skalárgörbületű, ha a Weyl-tenzora eltűnik.* Jóval később kiderült, hogy Berwald tételének ezt az élesebb változatát Szabó Zoltánnal lényegében egyidejűleg, de tőle teljesen függetlenül L. del Castillo is felfedezte [22], Berwaldról nem téve említést. (del Castillo - J. Grifone nyomán - teljesen index- és argumentummentes kalkulust alkalmazott; munkája valószínűleg ezért, továbbá a rendkívül tömör fogalmazás és a hiányos hivatkozások miatt kerülte el a Finsler-geometriát többségükben a klasszikus tenzorkalkulus eszközeivel művelő kutatók figyelmét.)

Megjegyezzük, hogy a skalárgörbület fogalmát is Berwald vezette be, a **H** görbületi tenzorhoz tartozó, a Riemann-geometriából ismert eljárással értelmezett *metszetgörbület* segítségével, és ehhez fel kellett tennie, hogy a sokaság legalább 3-dimenziós. Mi a tétel megfogalmazásakor skalárgörbületű Finsler-sokaság helyett *izotrop Finsler-sokaság*ról szólunk, értve ezen azt, hogy a kanonikus spray izotrop. Ez a feltétel a három vagy magasabb dimenziós esetben ekvivalens a Berwald által megkívánt skalárgörbületűséggel, viszont két dimenzióban is értelmes, és ekkor is ekvivalens a Weyl-endomorfizmus eltűnésével. Azt mutatjuk meg tehát, hogy *egy legalább kétdimenziós Finsler-sokaság pontosan akkor izotrop, ha a Weyl-endomorfizmusa a zérus transzformáció.* A kétdimenziós esetet a 9. fejezetben külön is diszkutáljuk. Ellenőrizzük azt a jól ismert tényt, hogy ekkor a Weyl-endomorfizmus automatikusan zérus, és megmutatjuk, hogy a kanonikus spray izotrop.

7. fejezet A Finsler-geometria objektumai tipikusan „hely- és irányfüggők”, megtörténhet azonban, hogy bizonyos objektum csakis a „helytől függ”. Ez matematikailag úgy fejezhető ki, hogy az illető objektum (kanonikus) vertikális differenciálja eltűnik. Felidézünk ennek illusztrálására egy nevezetes, klasszikus példát. A Berwald által bevezetett skalárgörbület-függvény megadható az

$$R = \frac{1}{(n-1)F^2}\operatorname{tr}\mathbf{K}$$

formulával, ahol F a Finsler-függvény, n a sokaság dimenziója, $\mathbf{K}$ pedig a (kanonikus sprayből származó) Jacobi-endomorfizmus. Ez nulladfokú pozitív homogén függvény, ami azért lényeges, mert egy 0-tól különböző fokú homogenitással rendelkező és csakis helyfüggő objektum automatikusan zérus. Berwald megmutatta, hogy *ha egy legalább 3-dimenziós, összefüggő Finsler-sokaság skalárgörbülete csakis helyfüggő, azaz ha* $\nabla^{\mathsf{v}} R = 0$, *akkor a skalárgörbület konstans.*

Azoknak a Finsler-sokaságoknak a szisztematikus tanulmányozását, amelyek hordoznak csakis a helytől függő geometriai objektumokat, Bácsó Sándor és Makoto Matsumoto indította el [5]. Folytatva ezeket a vizsgálatokat, ebben a fejezetben foglalkozunk az affin görbületi tenzor, továbbá a *Landsberg-tenzor* ($\mathbf{P}$) és a *stretch-tenzor* ($\mathbf{\Sigma}$) iránytól való függetlenségének konzekvenciáival.

Jelentse g az adott Finsler-függvényből származó *metrikus tenzor*t, azaz az $\frac{1}{2}F^2$ energiafüggvény második vertikális differenciálját. Emlékeztetünk rá, hogy a Landsberg-tenzort a

$$\mathbf{P} := -\frac{1}{2}\nabla^{\mathsf{h}} g,$$

a stretch-tenzort pedig a

$$\Sigma(\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}, \widetilde{U}) := 2(\nabla^{\mathsf{h}}\mathbf{P}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}, \widetilde{U}) - \nabla^{\mathsf{h}}\mathbf{P}(\widetilde{Y}, \widetilde{X}, \widetilde{Z}, \widetilde{U}))$$

formulával értelmezzük, ahol $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$, $\widetilde{Z}$, $\widetilde{U}$ a Finsler-nyaláb tetszőleges szelései.

Eredményeink a következők:

(1) *A Landsberg-tenzor és a stretch-tenzor irány-függetlensége csakis triviálisan teljesülhet*, azaz

$$\nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{P} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{P} = 0 \;\;,\;\; \nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{\Sigma} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{\Sigma} = 0.$$

(Megjegyezzük, hogy maga az eredmény nem triviális, mert mind a $\mathbf{P}$ tenzor, mind pedig a $\mathbf{\Sigma}$ tenzor *nulladfokú* pozitív homogén!)

(2) *Az R-kvadratikus - tehát irány-független affin görbülettel rendelkező - Finsler-sokaságok stretch-tenzora eltűnik.*

8. fejezet Legyen (M, F) Finsler-sokaság, g a metrikus tenzora. Euklideszi analógiára értelmezzük a Finsler-nyaláb tetszőleges szelésének a $\mathrm{span}(\delta)$ altér g-ortogonális komplementerére való merőleges vetítését. A vetítési operátor megadható az egyszerű

$$\mathbf{p} = \mathbf{1} - \frac{1}{F}\nabla^{\mathsf{v}}F \otimes \delta$$

formulával, ahol az $\mathbf{1}$ a $\mathrm{Sec}(\mathring{\pi})$ modulus identikus transzformációja. $\mathbf{p}$ segítségével értelemszerűen definiálható a $\binom{0}{k}$ és $\binom{1}{k}$ $(k \geq 1)$ típusú Finsler-tenzormezők (azaz $\mathring{\tau}$ menti tenzormezők) *vetített tenzor*a. Egy Finsler-sokaságot ideiglenesen *p-Berwald sokaság*nak mondunk, ha a Berwald-görbületének vetített tenzora eltűnik. Ezzel kapcsolatban megmutatjuk a következőket:

(1) *Egy p-Berwald sokaság pontosan akkor R-kvadratikus, ha a stretch-tenzora eltűnik.*

(2) *Egy legalább 3-dimenziós Finsler-sokaság pontosan akkor p-Berwald sokaság, ha eltűnik a Berwald görbülete.*

Az eltűnő Berwald-görbülettel rendelkező Finsler-sokaságok az ún. *Berwald-sokaság*ok; ezek alkotják - mint már jeleztük - a Finsler-sokaságok legalaposabban kivizsgált osztályát. A (2) eredmény úgy interpretálható, mint a legalább 3-dimenziós Berwald-sokaságok egy új jellemzése. Ez szoros analógiát mutat T. Sakaguchi egy fontos tételével [51], amely szerint legalább 3-dimenziós Finsler-sokaság esetén a Douglas-görbület vetítettjének eltűnése ekvivalens magának a Douglas-görbületnek az eltűnésével. Eredményünk bizonyításában Sakaguchinak ez a tétele lényeges szerepet játszik.

A $\mathbf{p}$ projekció-operátor birtokában egy *izotrop* Finsler-sokaság Berwald-konnexiójának görbülete a számolások szempontjából igen kényelmes

$$\mathbf{R} = F\mathbf{p} \wedge (R\nabla^{\mathsf{v}} F + \frac{1}{3} F\nabla^{\mathsf{v}} R)$$

alakban fejezhető ki, ahol az R függvény a már említett skalárgörbület. Megfordítva, ha az $\mathbf{R}$ tenzor a felírt alakú, akkor az (M, F) Finsler-sokaság skalárgörbületű.

Felhasználva ezeket az észrevételeket, demonstrálandó az eszközeink hatékonyságát, a fejezetet a Schur-lemma Finsler-verziójának egy új bizonyításával zárjuk.

9. fejezet Berwald egyik további, alapvető dolgozatában [16] a klasszikus tenzorkalkulus nyelvén kidolgozta a *kétdimenziós Finsler-sokaságok* elméletének egy igen szép megalapozását. A [68] dolgozat megadta ennek egy elegáns, modern interpretációját az Ehresmann-konnexiók és Finsler-sokaságok Grifone-féle elméletének [27] keretei között. E fejezet jelentős részét annak szenteljük, hogy szintén koordinátamentes - és ilyen értelemben „intrinsic" - formában kifejtsük a 2-dimenziós Finsler-sokaságok elméletének alapjait az általunk használt, a Grifone-félénél gazdaságosabb „pull-back formalizmusban". A tárgyalás során újra feltűnik az előzőekben szerephez jutott fontos Finsler-geometriai objektumok legtöbbje, de jóval áttekinthetőbb alakban. Ez a jobb áttekinthetőség - az alacsony és konkrét dimenzió mellett - annak köszönhető, hogy rendelkezésünkre áll egy intrinsic módon megkonstruált ortonormált kétél-mező, a *Berwald-féle kétél-mező*, és hatásosan alkalmazható az erre vonatkozó Fourier-kifejtés. Ily módon ez a fejezet részben úgy tekinthető, mint eszközeink és technikáink alkalmazása egy speciálisabb szituációban; másrészt lehetőség adódik arra, hogy néhány, mindeddig nyitva hagyott kérdést lezárjunk:

(1) Megadjuk a Jacobi-endomorfizmus egy olyan előállítását, amelyből közvetlenül kiolvasható, hogy a kétdimenziós Finsler-sokaságok kanonikus sprayje izotrop.

(2) Megmutatjuk, hogy a Weyl-endomorfizmus a Berwald-féle kétél-mező mindkét tagját annullálja, és így a zérustranszformáció.

(3) Igazoljuk, hogy egy kétdimenziós Finsler-sokaság pontosan akkor p-Berwald sokaság, ha a Berwald-görbülete nyommentes. Ez azt jelenti, hogy *a kétdimenziós p-Berwald sokaságok osztálya egybeesik az ún. gyengén Berwald Finsler-sokaságok osztályával.*

(4) Bebizonyítjuk, hogy *egy kétdimenziós Finsler-sokaság pontosan akkor Berwald sokaság, ha eltűnő Landsberg-tenzorral rendelkező gyengén Berwald sokaság.*

10. fejezet Kijelölve egy sokaság fölött egy sprayt, természetes módon vetődnek fel a következő, teoretikusan is igen érdekes, és például a fizikai alkalmazások szempontjából fontos kérdések:

(A) *Milyen feltételek mellett létezik olyan Finsler-függvény az alapulvett sokaságon, amelynek kanonikus sprayje* egybeesik *az adott sprayvel*?

(B) *Milyen feltételek mellett létezik olyan Finsler-függvény az alapulvett sokaságon, amelynek kanonikus sprayje* projektíven ekvivalens *a kijelölt sprayvel*?

Az (A) kérdés a sprayk *Finsler-metrizálhatóság*ának vagy *Finsler-variációsság*ának problémája, a (B) kérdés pedig a sprayk *tágabb értelemben vett Finsler-metrizálhatóság*áé vagy *projektív metrizálhatóság*áé. Mindkét probléma igen nehéz. Ha például a (B) esetben az adott spray a kanonikus lapos spray $\mathbb{R}^n$ egy konvex nyílt halmaza fölött, akkor Hilbert híres IV. problémájának Finsler-geometriai interpretációjához jutunk.

Az 1960-as évek legelején Rapcsák András fontos lépéseket tett a (B) probléma megtámadásának irányában [49]. Először is, a klasszikus tenzorkalkulus nyelvén, két, egymással ekvivalens, szükséges és elegendő feltételt fogalmazott meg arra vonatkozóan, hogy - a mi terminológiánkkal élve - ugyanazon sokaság fölötti két Finsler-függvény kanonikus sprayje projektíven ekvivalens legyen. Ezekben az egyik Finsler-függvényből származó spray adatai és a másik Finsler-függvény parciális deriváltjai szerepelnek, így világos, hogy a Rapcsák-egyenletek kulcsot adnak a (B) probléma vizsgálatához.

A fejezet első lényeges lépéseként a Rapcsák-egyenletek egyikét intrinsic módon - először indexmentes, majd index- és argumentummentes formában - fogalmazzuk meg. Alkalmazva a Rapcsák-egyenletek így nyert új alakját, egyszerű *szükséges és elegendő feltételt származtatunk le egy spray Finsler-variációsságára.* Alkalmazva ezt a kritériumot, szintén rendkívül egyszerű bizonyítást adunk a Finsler-sokaságok kanonikus konnexiójának *unicitás*ára.

A fejezet további részében *szükséges feltétel*eket vezetünk le egy spray *projektív metrizálhatóság*ára. A nyert eredmények közül a legérdekesebb (és legmunkaigényesebb) a következő:

Ha egy $\overline{F} : TM \to \mathbb{R}$ Finsler-függvény eleget tesz egy M fölötti sprayre vonatkozó Rapcsák-egyenletnek, akkor a sprayből származó $\mathbf{K}$ Jacobi-endomorfizmus „önadjungált” a $\overline{\mu} := \nabla^{\mathsf{v}}\nabla^{\mathsf{v}}\overline{F}$ szimmetrikus $\binom{0}{2}$ tenzorra vonatkozóan, azaz

$$\overline{\mu}(\mathbf{K}(\widetilde{X}), \widetilde{Y}) = \overline{\mu}(\widetilde{X}, \mathbf{K}(\widetilde{Y}))$$

teljesül minden $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\mathring{\pi})$ szelés esetén.

1 History, motivations and aims

In a broad sense, the subject of our thesis is *Finsler geometry*, a classical chapter of differential geometry. Finsler geometry is a traditional, perhaps the oldest research area in the Institute of Mathematics of the University of Debrecen. These researches were initiated by Ottó Varga and his immediate students, A. Rapcsák, A. Moór, L. Tamássy and Gy. Soós. (The centenary of birth of Ottó Varga was celebrated last year, 2009.) In its main *topics* our thesis joins these traditions. It draws on, however, also the most important original sources of Finsler geometry, represented by the papers of Ludwig Berwald. Ludwig Berwald (1883-1942) was the real originator of Finsler geometry, and Ottó Varga started his studies in Finsler geometry under Berwald's direction in the early 1930s in the German University at Prague. Our thesis is also debt to Berwald's wonderful papers [16], [17] in a large extent. In the choice of our terminology and notation we followed Berwald's conventions as far as we could.

Our *conceptual framework and technique*, however, is totally different from the classical theory based on old-fashioned tensor calculus, which appears visually as an impenetrable jungle of indices up and down. On the contrary, the most striking formal feature of our thesis is the complete absence of indices. As to the essence, the scene of the theory in our approach is the pull-back of the tangent bundle of a smooth manifold over the projection map of the slit tangent bundle. This is only one of the possible settings of the current modern formalisms. Our choice, however, the *pull-back formalism*, is not a random selection. In our opinion, the pull-back bundle is geometrically the most natural for the purposes of Finsler geometry, and, in addition, it is more economical than, for example, Grifone's 'TTM-formalism' [27].

Having fixed the scene, our guiding principle may be formulated as follows:

A large part of Finsler geometry may be explained in terms of the canonical spray arising from the Finsler function, which determines the geometry.

Briefly:

A large part of Finsler geometry is spray geometry.

In the spirit of this principle, we set as an aim to elaborate in a self-contained manner the part of spray geometry which is necessary to a satisfactory treatment of our specific problems. Thus we also present *together with a new proof* some classically well-known facts, which have not been translated into our language until now. (Note that such a 'translation' is not so automatic and easy in general!) Our considerations of this type may be classified into three groups:

(1) Formulation and proof of technical results. Typical examples: homogeneity properties, Bianchi and Ricci identities.

(2) New interpretation and proof of important classical theorems. Examples: a Finslerian version of Schur's lemma; Berwald - del Castillo - Szabó's theorem on Finsler manifolds of scalar curvature.

(3) An elaboration of Berwald's theory of two-dimensional Finsler manifolds in the pull-back formalism.

An important part of this dissertation deals with the following problem:

Characterize the Finsler manifolds some of whose tensorial data depend only on the position.

The question is interesting and quite natural since the objects of Finsler geometry depend typically on position *and* direction. The first classical theorem belonging to this category is just the above mentioned Finslerian Schur-lemma. It states (under some further conditions) that if the scalar curvature of a Finsler manifold does not depend on the directions, then this function is constant. A systematic investigation of problems of this type was initiated by my supervisor Sándor Bácsó and by Makoto Matsumoto in the end of the 1990s. Our work joins this research.

In the early 1960s András Rapcsák obtained important results concerning the *path-preserving maps* and the *metrizabilities of path-spaces*. The importance of the subject lies, among others, in the fact that the differential geometric version of Hilbert's famous Fourth Problem, formulated in his lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900, is a metrizability problem of the mentioned type. A part of Rapcsák's results was reformulated and proved in a modern setting about 2000 (see e.g. [61]). In the dissertation we aim to carry this program on, in connection with some related works of S. Bácsó [2] and M. Matsumoto [38].

2 Contents and new results

In the following we present a brief survey of chapter contents, and give a list of what are *really new* and *partly* or merely *technically new. New interpretations and proofs of classical results* are also mentioned.

Chapter 1 In this chapter we give the necessary preliminaries. We collect the most indispensable concepts and facts from basic differential geometry, and standardize our notation and terminology. We fix the main scene of our considerations: this is the *Finsler bundle*

$$\mathring{\pi} : \mathring{T}M \times_M TM \to \mathring{T}M,$$

the pull-back of the tangent bundle $\tau : TM \to M$ over the projection of the slit tangent bundle $\mathring{\tau} : \mathring{T}M \to M$. We also need the vector bundle

$$\pi : TM \times_M TM \to TM,$$

the pull-back of τ over τ. The modules of sections of these vector bundles will be denoted by $\mathrm{Sec}(\mathring{\pi})$ and $\mathrm{Sec}(\pi)$, respectively. We introduce a canonical tensor derivation, the *vertical derivation* ∇^{v}, over the tensor algebra of the $C^\infty(\mathring{T}M)$-module $\mathrm{Sec}(\mathring{\pi})$.

The only new technicality is the *inductively defined trace operator* acting on type $\binom{1}{s+1}$ tensor fields along $\mathring{\tau}$. This will be proved to be effective and useful in our coordinate-free calculations. For completeness, we reproduce a simple proof of the *differential Bianchi identity* in the context of general vector bundles.

Chapter 2 Here we fix what we mean by an *Ehresmann connection* and a *spray.* We also introduce some mutations of a spray: semispray, second-order vector field, affine spray. All this is necessary since we find different and non-equivalent definitions for these basic concepts in the literature. We recall the fundamental relation between an Ehresmann connection and a semispray, discovered (independently) by M. Crampin and J. Grifone. We define the most important technical tool of our calculations, the *Berwald derivative* ∇. It is built of a *horizontal part* ∇^{h} determined by an Ehresmann connection, and the vertical derivative ∇^{v}.

We derive a *horizontal Ricci identity* for functions, in which the curvature tensor $\mathbf{R}$ of the Ehresmann connection appears. We prove the following *Bianchi identity* for the horizontal differential of the curvature:

$$\underset{(X,Y,Z)}{\mathfrak{S}}(\nabla^{\mathsf{h}}\mathbf{R})(\widehat{X},\widehat{Y},\widehat{Z})=0.$$

To our knowledge, this simple and useful relation has not appeared in the literature (at least in this form). It corresponds the Bianchi identity

$$[h,R]=0$$

in Proposition I.61 in Grifone's paper [27], where the symbol $[,]$ means Frölicher-Nijenhuis bracket, whose evaluation is quite difficult. A similar Bianchi identity was obtained also by M. Crampin [19], but in a quite artifical manner.

Chapter 3 This chapter is devoted to a brief discussion of the *Berwald curvature* of an Ehresmann connection $\mathcal{H}$. Consider the usual curvature operator

$$R^{\nabla}(\xi,\eta) : \widetilde{Z} \in \mathrm{Sec}(\mathring{\pi}) \mapsto R^{\nabla}(\xi,\eta)\widetilde{Z} := \nabla_{\xi}\nabla_{\eta}\widetilde{Z} - \nabla_{\eta}\nabla_{\xi}\widetilde{Z} - \nabla_{[\xi,\eta]}\widetilde{Z} \in \mathrm{Sec}(\mathring{\pi})$$

of the Berwald derivative ∇ (ξ and η are fixed vector fields on $\mathring{T}M$). Then the Berwald curvature $\mathbf{B}$ of $\mathcal{H}$ is defined by

$$\mathbf{B}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) := R^{\nabla}(\mathbf{i}\widetilde{X},\mathcal{H}\widetilde{Y}) \ ; \ \widetilde{X},\widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\mathring{\pi}).$$

(The $C^{\infty}(\mathring{T}M)$-linear map $\mathbf{i}$ identifies the module $\mathrm{Sec}(\mathring{\pi})$ with the module of vertical vector fields on $\mathring{T}M$.)

Beside some technicalities (convenient formulae for calculations of $\mathbf{B}$, symmetry and homogeneity properties, Ricci identities involving $\mathbf{B}$), we show that *the Berwald curvature vanishes, if and only if, the horizontal derivative arising from the connection is "h-basic"*, i.e., roughly speaking, it is the natural lift of a covariant derivative operator on the base manifold. More precisely, $\mathbf{B}$ vanishes, if and only if, there is a covariant derivative operator D on M, such that

$$\nabla^{\mathsf{h}}_{\widehat{X}}\widehat{Y} = \widehat{D_X Y} \ ; \ X,Y \in \mathfrak{X}(M);$$

$$\widehat{X}(v) := (v, X(\tau(v))) \ , \ v \in \mathring{T}M.$$

Chapter 4 In this chapter we discuss the *affine curvature* $\mathbf{H}$ of an Ehresmann connection, with specific emphasis on the case when the Ehresmann connection is generated by a spray. By definition,

$$\mathbf{H}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) := R^{\nabla}(\mathcal{H}\widetilde{X},\mathcal{H}\widetilde{Y}) \ ; \ \widetilde{X},\widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\overset{\circ}{\pi}).$$

Our terminology ('affine curvature') follows Berwald's usage [17]. If $\nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{H} = 0$, we say after Z. Shen that the Ehresmann connection is *R-quadratic.*

We derive between the affine curvature $\mathbf{H}$ and the curvature $\mathbf{R}$ of $\mathcal{H}$ the following relations:

$$\mathbf{H}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z} = \nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{R}(\widetilde{Z},\widetilde{X},\widetilde{Y});$$

$$\mathbf{R}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \mathbf{H}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\delta \quad \textit{, if } \mathcal{H} \textit{ is homogeneous.}$$

($\delta : v \in TM \mapsto \delta(v) := (v,v)$ is the canonical section of π.)

Also in the homogeneous case, we show that $\mathbf{R}$ is homogeneous of degree 1, and $\mathbf{H}$ is homogeneous of degree 0.

We assume now that the Ehresmann connection $\mathcal{H}$ is torsion-free.

We deduce

the algebraic Bianchi identity $\underset{(X,Y,Z)}{\mathfrak{S}} \mathbf{H}(\widehat{X},\widehat{Y})\widehat{Z} = 0,$

and the *differential Bianchi identity*

$$\nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{H}(\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z},\widetilde{U}) - \nabla^{\mathsf{h}}\mathbf{B}(\widetilde{Y},\widetilde{X},\widetilde{Z},\widetilde{U}) + \nabla^{\mathsf{h}}\mathbf{B}(\widetilde{Z},\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{U}) = 0.$$

As further technicalities, we derive the *Ricci formulae* for the repeated horizontal differential of sections and 1-forms; they involve the affine curvature.

After these, we define and derive in an index-free manner the basic relations which served, in the language of tensor calculus, as the definitions of the basic curvature data in Berwald's classical paper [17]. Let a spray S over M be given. (In Berwald's treatment the role of S is played by a system of second-order differential equations written in terms of local coordinates.) The *affine deviation tensor* (Berwald's terminology) or the *Jacobi endomorphism* of S is the type $\binom{1}{1}$ tensor field $\mathbf{K}$ along $\overset{\circ}{\tau}$ given by

$$\mathbf{K}(\widetilde{X}) := \mathcal{V}[S, \mathcal{H}\widetilde{X}] \ , \ \widetilde{X} \in \operatorname{Sec}(\overset{\circ}{\pi}),$$

where $\mathcal{H}$ is the Ehresmann connection associated to S, and $\mathcal{V}$ is the vertical map belonging to $\mathcal{H}$ ($\mathcal{V} \circ \mathcal{H} = 0$, $\mathcal{V} \circ \mathbf{i} = identity$). We show in our formalism that the curvature of $\mathcal{H}$ and the affine deviation tensor are related by

$$\mathbf{R}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \frac{1}{3}(\nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{K}(\widetilde{Y}, \widetilde{X}) - \nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{K}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})) \ ; \ \widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \operatorname{Sec}(\overset{\circ}{\pi}).$$

We conclude this chapter with a brief discussion of the *flatness* and the *isotropy* of a spray. In both cases, by definition, the Jacobi endomorphism has a very specific form. It turns out immediately that flatness implies the vanishing of the Jacobi endomorphism, whence the curvature and the affine curvature also vanish. Isotropic sprays will be studied in some detail in the Finslerian case.

Chapter 5 Two sprays, S and $\overline{S}$, over a smooth manifold M are said to be *projectively related* if

$$\overline{S} = S - 2PC,$$

where the *projective factor* P is a positive-homogeneous function of degree 1 (smooth on $\overset{\circ}{T}M$), and $C := \mathbf{i}\circ\delta$ is the Liouville vector field. The transition from S to $\overline{S}$ is mentioned as a *projective change.*

In this chapter first we review some basic facts concerning a projective change of a spray. Then all of the basic geometric data (Ehresmann connection and its associated objects, horizontal derivative, Berwald curvature, Jacobi endomorphism,...) of the spray change; we give the explicit formulas for these changes. We show that *the Berwald curvature and its trace remain invariant under a projective change at the same time.* The criterion of their invariance leads to a simple PDE for the projective factor, which we solve without using coordinates.

We recall an intrinsic definition of the two basic projectively invariant tensors, the *Douglas curvature* ($\mathbf{D}$), which may be constructed from the Berwald curvature, and the *Weyl endomorphism* ($\mathbf{W}^{\circ}$), which may be built from the Jacobi endomorphism. As for the Weyl endomorphism (or *projective deviation tensor* in Berwald's usage), we adopted del Castillo's definition [22], mutatis mutandis, but we expressed it in a more convenient form in terms of $\mathbf{K}$, $\mathrm{tr}\mathbf{K}$ and their vertical differentials.

Chapter 6 We begin with the definition of a *Finsler function* and its fundamental geometric data (Hilbert 1-form, normalized supporting element field, angular metric tensor, Cartan tensor, Landsberg tensor). We present some simple, more or less technical, observations about these basic objects. Next we recall an intrinsic definition of the *canonical spray* of a Finsler manifold. The construction is just a fine intrinsic reformulation of the Euler-Lagrange equation of the energy functional. From this point, our general principles may be realized according to the scheme

Finsler function $\longrightarrow$ *canonical spray* $\longrightarrow$ *Ehresmann connection* $\longrightarrow$ *curvatures.*

Note that the Ehresmann connection determined by the canonical spray of a Finsler manifold is said to be the *canonical connection* or *Berwald connection* of the Finsler manifold. From this connection, as in the general theory, a covariant derivative operator can be obtained by linearization in the Finsler bundle $\overset{\circ}{\pi} : \overset{\circ}{T}M \times_M TM \to \overset{\circ}{T}M$, this is the *(Finslerian) Berwald derivative*. (It is dangerous to confuse the Berwald connection with the Berwald derivative!)

The only truly interesting result in this chapter is essentially classical. In his paper [17] Berwald has shown that an at least 3-dimensional isotropic Finsler manifold has vanishing Weyl endomorphism. (His formulation is distinct to some extent, but equivalent.) It was discovered by L. del Castillo and, independently, by Z. I. Szabó, that the converse of Berwald's theorem is also true. We give here a simple proof of this important observation. (Berwald himself also proved the converse, but he used an additional condition.) For completeness, we also present an independent proof of Berwald's above mentioned statement; in fact, this is the harder part. Note that in Berwald's and Szabó's formulation it is assumed that the Finsler manifold is at least

3-dimensional. In our treatment this condition is superfluous. However, we shall discuss the 2-dimensional case repeatedly in Chapter 9. Then we shall check that the Weyl tensor is automatically zero (which is a well-known fact), while the canonical spray is isotropic (this will be obtained as an easy consequence).

Chapter 7 Finsler geometric objects are typically position and direction dependent. It may happen, however, that some of them depend only on the position. Mathematically expressed: some Finsler geometric objects may have vanishing vertical differential. We mention here an important, classical example. In an n-dimensional, isotropic Finsler manifold (M, F) may be defined by the scalar curvature function

$$R := \frac{1}{(n-1)F^2}\mathrm{tr}\mathbf{K},$$

where $\mathbf{K}$ is the Jacobi endomorphism. It is positive-homogeneous of degree 0. Berwald has shown in [17] that if R "depends only on the position", i.e., $\nabla^{\mathsf{v}} R = 0$, and $\dim M \geq 3$, then the function R is constant. (It is presupposed that the manifold is connected.) This is the Finslerian version of the well-known *Schur lemma* from Riemannian geometry.

As we have already mentioned, systematic investigation of Finsler manifolds with direction-independent data was initiated by S. Bácsó and M. Matsumoto [5]. In this chapter we show that the direction independence of the Landsberg tensor and the stretch tensor holds only trivially, i.e., if these tensors vanish. We also prove that R-quadratic Finsler manifolds have vanishing stretch tensor. To formulate these results more explicitly,

consider
the *metric tensor* $g := \frac{1}{2}\nabla^{\mathsf{v}}\nabla^{\mathsf{v}} F^2$,
the *Landsberg tensor* $\mathbf{P} := -\frac{1}{2}\nabla^{\mathsf{h}} g$,
and the *stretch tensor* $\mathbf{\Sigma}$ defined by

$$\Sigma(\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z},\widetilde{U}) := 2(\nabla^{\mathsf{h}}\mathbf{P}(\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z},\widetilde{U}) - \nabla^{\mathsf{h}}\mathbf{P}(\widetilde{Y},\widetilde{X},\widetilde{Z},\widetilde{U})).$$

Then we have

(1) $\nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{P} = 0 \ \Rightarrow\ \mathbf{P} = 0$;

(2) $\nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{\Sigma} = 0 \ \Rightarrow\ \mathbf{\Sigma} = 0$;

(3) $\nabla^{\mathsf{v}}\mathbf{H} = 0 \ \Rightarrow\ \mathbf{\Sigma} = 0$.

Chapter 8 Let (M, F) be a Finsler manifold with metric tensor g. First we define the orthogonal projection of the module of sections of the Finsler bundle $\mathring{\pi} : \mathring{T}M \times_M TM \to \mathring{T}M$ onto the g-orthogonal complement of span(δ) (δ is the canonical section). On Euclidean analogy, it may simply be given by

$$\widetilde{X} \mapsto \mathbf{p}(\widetilde{X}) := \widetilde{X} - \frac{g(\widetilde{X},\delta)}{g(\widetilde{X},\widetilde{X})}\delta.$$

In a more compact form,

$$\mathbf{p} = \mathbf{1} - \frac{1}{F}\nabla^{\mathsf{v}} F \otimes \delta.$$

We also define, what we mean by the projected tensor of a type $\binom{0}{k}$ or a type $\binom{1}{k}$ "Finsler tensor" ($k \geq 1$).

Temporarily, we say that a Finsler manifold is a *p-Berwald manifold*, if the projected tensor of its Berwald curvature vanishes. Our first observation is that *a p-Berwald manifold is R-quadratic, if and only if, its stretch tensor vanishes.* Next we show that *the class of the at least 3-dimensional p-Berwald manifolds is the same as the class of the at least 3-dimensional Berwald manifolds.* Thus we obtain a new characterization of Berwald manifolds in dimension $n \geq 3$. This result is strongly related to Sakaguchi's important theorem in [51], which states that an at least 3-dimensional Finsler manifold is a Douglas manifold (i.e., has vanishing Douglas curvature), if and only if, its projected Douglas curvature vanishes. Sakaguchi's theorem plays an essential role in our proof.

Having the projection operator $\mathbf{p}$, we may express the curvature of the Berwald connection of an *isotropic* Finsler manifold (M, F) in the very convenient form

$$\mathbf{R} = F\mathbf{p} \wedge (R\nabla^{\mathsf{v}} F + \frac{1}{3} F\nabla^{\mathsf{v}} R),$$

where R is the scalar curvature mentioned above. Conversely, if the curvature $\mathbf{R}$ takes this form, then (M, F) is isotropic. If, in addition, R 'depends only on the position', then we obtain

$$\mathbf{R} = FR(\mathbf{p} \otimes \nabla^{\mathsf{v}} F - \nabla^{\mathsf{v}} F \otimes \mathbf{p}).$$

Starting from these observations, to demonstrate the efficiency of our tools, we conclude the Chapter with a new proof of the Finslerian Schur lemma.

Chapter 9 The greater part of this chapter consists essentially of transcriptions in order to give an intrinsic formulation in our setup of Berwald's theory of *2-dimensional Finsler manifolds*, explained by him so beautifully in terms of the classical tensor calculus in [16]. In this process all ingredients of the preceding chapters appear once again, but in a more transparent form. This transparency is mostly due to the fact that we have an intrinsically constructed orthonormal 2-frame, called *Berwald frame*, and we may apply Fourier expansion with respect to this frame. So, on the one hand, this chapter may be considered as an application of our tools and techniques to a concrete situation. On the other hand, we find an opportunity to tie up some loose ends.

We give an explicit representation of the Jacobi endomorphism, and conclude that all 2-dimensional Finsler manifolds are isotropic. On the other hand, we can easily show that the Weyl endomorphism annulates both members of the Berwald frame, and hence it is the zero transformation. We show that *a 2-dimensional Finsler manifold is p-Berwald, if and only if, it is weakly Berwald, i.e., its Berwald curvature is traceless.* We conclude, finally, that *a 2-dimensional Finsler manifold is a Berwald manifold, if and only if, it is weakly Berwald and has vanishing Landsberg tensor.*

Chapter 10 Given a spray over a manifold M, we may ask:

When does a Finsler function exist such that its canonical spray is *the given spray? When does a Finsler function exist such that its canonical spray is* projectively related *to the given spray?*

The first question is the problem of *Finsler metrizability* or *Finsler-variationality*, the second one is the problem of *Finsler metrizablity in a broad sense* or, briefly, the problem of *projective metrizability.* In terms of the classical tensor calculus, A. Rapcsák has formulated two equivalent criteria for the projective relatedness of the canonical sprays of two Finsler functions F and $\overline{F}$ over the same manifold M. These criteria are mentioned as *Rapcsák equations* nowadays. In Rapcsák equations we find the partial derivatives of $\overline{F}$ and the spray coefficients of the canonical spray of (M, F), or the Christoffel symbols of the Berwald connection of (M, F). So it makes sense to speak of a *Rapcsák equation for a Finsler function with respect to a spray.* In what follows, we use the term in this sense. Then, obviously, *Rapcsák equations give a key to attack the problem of projective metrizability.*

In the first essential step of this chapter we formulate one of the Rapcsák equations in an intrinsic (first index-free, next index and argumentum-free) manner. Using these new forms, *we derive a simple necessary and sufficient condition for Finsler variationality.* Applying this criterion, we obtain an *extremely simple proof for the unicity of the canonical connection of a Finsler manifold.*

The rest of the chapter is devoted to necessary conditions for projective metrizability of a spray. The most interesting among them (with the most difficult proof) is the following:

If a Finsler function $\overline{F} : TM \to \mathbb{R}$ satisfies a Rapcsák equation with respect to a spray over M, then the Jacobi endomorphism $\mathbf{K}$ *determined by the spray is "self-adjoint" with respect* *to the symmetric type* $\binom{0}{2}$ *tensor* $\overline{\mu} := \nabla^{\mathsf{v}}\nabla^{\mathsf{v}}\overline{F}$, *i.e., for any sections* $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ *along* $\mathring{\tau}$ *we have*

$$\overline{\mu}(\mathbf{K}(\widetilde{X}), \widetilde{Y}) = \overline{\mu}(\widetilde{X}, \mathbf{K}(\widetilde{Y})).$$

3 Tudományos munkásság

Referált kiadványokban megjelent, illetve elfogadott dolgozatok

(1) S. Bácsó, Z. Szilasi, Notes on the representational possibilities of projective quadrics in four dimensions, *Teaching Mathematics and Computer Science* **4** 2006, 167–177.

(2) S. Bácsó, Z. Szilasi, Generalized Rabl Mappings and Apollonius-Type Problems, *Journal for Geometry and Graphics* **11** 2007, 27–38.

(3) S. Bácsó, Z. Szilasi, On the direction independence of two remarkable Finsler tensors, *Differential geometry and its applications - Proceedings of the 10th International Conference on DGA2007*, World Scientific, 2008, 385–394.

(4) S. Bácsó, Z. Szilasi, P-Berwald manifolds, *Publicationes Mathematicae* **74**, 2009, 369–382.

(5) S. Bácsó, Z. Szilasi, On the projective theory of sprays, *Acta Mathematica Academiae Paedagogiace Nyíregyháziensis*, megjelenés alatt.

Egyéb dolgozatok

(1) Szilasi Z., A centrálaxonometriáról az A. 456. feladat kapcsán, *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok*, 2009. május

Előadások

(1) Térgeometriai problémák megoldása a ciklografikus leképezés magasabb dimenziós általánosításának alkalmazásával, 2006. május 5., Budapest, Országos ábrázoló geometria konferencia

(2) P-Berwald sokaságok, 2008. december 5., Debrecen, Geometria tanszéki szeminárium

Irodalomjegyzék

Hivatkozások

[1] D. Bao, S. S. Chern and Z. Shen, *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[2] S. Bácsó, On geodesic mappings of special Finsler spaces, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, Serie II, **59** (1999), 83-87.

[3] S. Bácsó and M. Matsumoto, On Finsler spaces of Douglas type. A generalization of the notion of Berwald space, *Publicationes Mathematicae* **51** (1997), 385-406.

[4] S. Bácsó and M. Matsumoto, On Finsler spaces of Douglas type II. Projectively flat spaces, *Publicationes Mathematicae* **53** (1998), 423-438.

[5] S. Bácsó and M. Matsumoto, Finsler spaces with the h-curvature tensor dependent on position alone, *Publicationes Mathematicae* **55** (1999), 199-210.

[6] S. Bácsó and M. Matsumoto, On Finsler spaces of Douglas type III., *in: Finslerian Geometries* (ed. by P. Antonelli), Kluwer Academic Publishers, 2000, 89-94.

[7] S. Bácsó and M. Matsumoto, On Finsler spaces of Douglas type IV. Projectively flat Kropina spaces, *Publicationes Mathematicae* **56** (2000), 213-221.

[8] S. Bácsó and Z. Szilasi, On the direction independence of two remarkable Finsler tensors, *In: Differential Geometry and its Applications - Proceedings of the 10th International Conference on DGA2007*, World Scientific, 2008, 385-394.

[9] S. Bácsó and Z. Szilasi, P-Berwald manifolds, *Publicationes Mathematicae*, **74** (2009), 369-382.

[10] S. Bácsó and Z. Szilasi, On the projective theory of sprays, submitted.

[11] S. Bácsó and R. Yoshikawa, Weakly-Berwald spaces, *Publicationes Mathematicae*, **61** (2002), 219-231.

[12] W. Ballmann, *Vector Bundles and Connections*, http://www.math.uni-bonn.de/people/hwbllmnn/archiv/concurvb.ps

[13] K. Bélteky, *Special path-preserving maps*, Thesis, Debrecen, 1966. (Hungarian).

[14] L. Berwald, Über Parallelübertragung in Räumen mit allgemeiner Massbestimmung, *Jber. Deutsch Math.-Verein* **34** (1926), 213-220.

[15] L. Berwald, Parallelübertragung in allgemeinen Räumen, *Atti. Congr. Intern. Mat. Bologna* **4** (1928), 263-270.

[16] L. Berwald, On Finsler and Cartan Geometries III, *Ann. of Math.*, **42** (1941), 84-112.

[17] L. Berwald, Ueber Finslersche und Cartansche Geometrie IV, *Ann. of Math.*, **48** (1947), 755-781.

[18] M. Crampin, On horizontal distributions on the tangent bundle of a differentiable manifold, *J. London Math. Soc.* (2) **3** (1971), 178-182.

[19] M. Crampin, Generalized Binachi identities for horizontal distributions, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **94** (1983), 125-132.

[20] M. Crampin, Isotropic and R-flat sprays, *Houston J. Math* **33** (2007), 451-459.

[21] A. Deicke, Über die Finsler-Räume mit $A_i = 0$, *Arch. Math.* **4** (1953), 45-51.

[22] L. del Castillo, Tenseurs de Weyl d'une gerbe de directions, *C. R. Acad. Sc. Paris Ser. A* **282** (1976), 595-598.

[23] J. Douglas, The general geometry of paths, *Ann. of Math.* (2) **29** (1928), 143-168.

[24] L. P. Eisenhart, *Non-Riemannian Geometry.* Reprint: Dover, New York, 2005.

[25] W. Greub, S. Halperin and J. R. Vanstone, *Connections, Curvature, and Cohomology*, Vols I-III, Academic Press, New York, 1972., 1973., 1976.

[26] M. Giaquinta and S. Hildebrand, *Calculus of Variations*, Vols I,II. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[27] J. Grifone, Structure presque tangente et connexions, I, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble **22**(1) (1972), 287-334.

[28] J. Grifone and Z. Muzsnay, *Variational Principles for Second-order Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 2000.

[29] J. Klein, Geometry of Sprays, *In: Proc. of the Iutam-Isimm Symposium on Analytical Mechanics, Torino*, 1982, 177-196.

[30] S. Lang, *Fundamentals of Differential Geometry* (Corrected 2nd printing), Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[31] D. Laugwitz, *Differential and Riemannian Geometry*, Academic Press, New York and London, 1965.

[32] D. Laugwitz, *Bernard Riemann 1826-1899 (Turning Points in the Conception of Mathematics)*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1999.

[33] R. L. Lovas, A note on Finsler-Minkowski norms, *Houston J. Math.* **33** (2007), 701-707.

[34] E. Martínez, J. F. Cariñena and W. Sarlet, Derivations of differencial forms along the tangent bundle projection, *Diff. Geometry and its Applications* **2** (1992), 17-43.

[35] M. Matsumoto, On the indicatrices of a Finsler space, *Periodica Mathematica Hungarica* **8** (1977), 185-191.

[36] M. Matsumoto, Projective changes of Finsler metrics and projectively flat Finsler spaces, *Tensor N. S.* **34** (1980), 303-315.

[37] M. Matsumoto, *Foundations of Finsler Geometry and special Finsler spaces*, Kaiseisha Press, 1986.

[38] M. Matsumoto, The Tavakol-van den Bergh conditions in the theories of gravity and projective changes of Finsler metrics, *Publicationes Mathematicae* **42**(1-2) (1993), 155-168.

[39] M. Matsumoto, On the stretch curvature of a Finsler space and certain open problems, *J. Nat. Acad. Math. India* **11** (1997), 22-32.

[40] M. Matsumoto, *Finsler Geometry in the 20th-Century*, in: *Handbook of Finsler Geometry* (ed. by P. Antonelli), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[41] T. Mestdag and V. Tóth, On the geometry of Randers manifolds, *Reports on Mathematical Physics* **50** (2002), 167-193.

[42] T. Mestdag, *Berwald-Type connections in time-dependent mechanics and dynamics on affine Lie algebroids*, PhD Thesis, Gent, 2003.

[43] A. Moór, Über projektive Vernderung der Ubertragung in Linienelementmannigfaltigkeiten, *Acta Sci. Math.* **24** (1963), 119-128.

[44] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity*, Academic Press, 1983.

[45] P. N. Pandey, On a Finsler space of zero projective curvature, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, **39** (1982), 387-388.

[46] J. Pék, *Ehresmann-sokaságok, sprayk és vonalelem D-sokaságok transzformációi*, PhD Thesis, Debrecen, 2009.

[47] J. Pék and J. Szilasi, Automorphisms of Ehresmann connections, *Acta Math. Hungar.*, **123** (2009), 379-395.

[48] P. Petersen, *Riemannian Geometry* (Second Edition), Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[49] A. Rapcsák, Über die bahntreuen Abbildungen metrischer Räume, *Publ. Math. Debrecen*, **8** (1961), 285-290.

[50] H. Rund, *The Differential Geometry of Finsler Spaces*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **101**, Springer-Verlag, Berlin, 1959.

[51] T. Sakaguchi, On Finsler spaces of scalar curvature, *Tensor, N. S.* **38**, 1982, 211-219.

[52] Z. Shen, *Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2001.

[53] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vols. I-V (2nd edition), Publish or Perish, Houston, Texas, 1979.

[54] Z. I. Szabó, Ein Finslerscher Raum is gerade dann von skalarer Krümmung, wenn seine Weylsche Projektivkrümmung verschwindet, *Acta Sci. Math.*, **39** (1977), 163-168.

[55] Z. I. Szabó, Positive definite Berwald spaces (Structure theorems on Berwald spaces), *Tensor N. S.*, **35** (1981), 25-39.

[56] Z. I. Szabó, Berwald metrics constructed by Chevalley's polynomials, arXiv:math.DG/0601522, 2006.

[57] J. Szilasi, *A Setting for Spray and Finsler Geometry*, in: Handbook of Finsler Geometry, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2003, 1183-1426.

[58] J. Szilasi, Calculus along the tangent bundle projection and projective metrizability, *In: Differential Geometry and its Applications - Proceedings of the 10th International Conference on DGA2007*, World Scientific, 2008, 527-546.

[59] J. Szilasi, *Variations on a theme of A. Rapcsák*, handwritten manuscript.

[60] J. Szilasi and Sz. Vattamány, Erratum to „On the projective geometry of sprays", *Differential Geom. Appl.* **13** (2000), 95-118.

[61] J. Szilasi and Sz. Vattamány, On the Finsler-metrizabilities of spray manifolds, *Periodica Mathematica Hungarica* **44** (2002),

[62] J. Szilasi and Á. Győry, A generalization of Weyl's theorem on projectively related affine connections, *Report on Mathematical Physics* , **53** (2007), 261-273.

[63] J. Szilasi and Á. Győry, Topics in spray geometry (manuscript)

[64] J. Szilasi, R. L. Lovas, *Some aspects of Differential Theories*, in: *Handbook of Global Analysis*, Elsevier, 2007, 1071-1116.

[65] L. Tamássy and M. Matsumoto, Direct method to characterize conformally Minkowskian Finsler spaces, *Tensor N. S.* **33** (1979), 379-384.

[66] V. Tóth, *Metrics along the tangent bundle projection*, PhD Thesis, Debrecen, 2003.

[67] Sz. Vattamány, Projection onto the indicatrix bundle of a Finsler manifold, *Publicationes Mathematicae* **58** (2001), 193-221.

[68] Sz. Vattamány and Cs. Vincze, Two-dimensional Landsberg manifolds with vanishing Douglas tensor, *Annales Univ. Sci. Budapest* **58** (2001), 11-26.

[69] Sz. Vattamány, *On the projective geometry and metrizability of spray manifolds*, PhD Thesis, Debrecen, 2004.

[70] F. W. Warner, The Conjugate Locus of a Riemannian Manifold, *American Journal of Mathematics* **87** (1965), 575-604.