Tájékoztató a

Többváltozós függvények differenciál- és integrálszámítása

tárgy 2018/2019. tanév II. félévi kurzusairól és számonkéréséről

Az előadások és gyakorlatok időpontja, tematikája

Előadó: Boros Zoltán
— *e-mail*: `zboros@science.unideb.hu`

Az előadás *kódja(i)*: (T)TMBE0204 , TMOE0204 , TTMBE0814 ;
— *heti óraszáma*: 3, *kreditértéke*: 4.

Az előadás időpontja: kedd 9.00–11.40 (közte 10 perc szünet k.b. 10.15–10.25);
— *helyszíne*: Matematikai Épület M 426 tanterem.

Az előadások dátuma (2019-ben) **és tervezett tematikája:**

február 12.: Valós vektorterek, belső szorzat, norma. Normák ekvivalenciája. A véges dimenziós euklideszi tér, fontosabb normák, sorozatok konvergenciája, teljesség. Intervallumok, zárt téglák, kompakt halmazok. Lineáris leképezések mátrixa, normája. A reguláris mátrixok halmaza.

február 19.: A Fréchet-derivált, lineáris approximálhatóság. Differenciálhatóság és folytonosság. Iránymenti és parciális deriváltak. A differenciálhatóság szükséges feltétele, a derivált mint mátrix meghatározása.

február 26.: Differenciálási szabályok. A Lagrange-féle középérték-tétel vektorváltozós alakjai. A differenciálhatóság elegendő feltétele.

március 5.: Többszöri differenciálhatóság, vegyes parciális deriváltak, Young tétele, Taylor-tétel. A lokális szélsőérték elsőrendű szükséges és másodrendű elégséges feltétele.

március 12.: A Banach-féle fixpont-tétel. Inverzfüggvény-tétel.

március 19.: Implicit függvény tétel. Feltételes szélsőérték.

március 26.: Paraméteres integrálok differenciálása. Az integrál, mint határérték: Darboux tételei.

április 9.: A Riemann-integrál téglán. Riemann-kritérium; folytonos függvények integrálhatósága. Egyenlőtlenségek. Tégla-additivitás és linearitás. Fubini-tétel; az integrál kiszámítása.

április 16.: A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-kritériuma*. A Riemann-integrál korlátos halmazokon. A Jordan-mérték és tulajdonságai.

április 23.: Fubini-tétel egyszerű tartományra. Integráltranszformáció*.

április 30.: Korlátos változású függvények, totális variáció. Jordan dekompozíciós tétele.

május 7.: Riemann–Stieltjes-integrál. A parciális integrálás tétele. Elegendő feltétel; az integrál kiszámítása.

május 14.: Görbementi integrál. Primitív függvény fogalma, létezésének szükséges illetve elegendő feltételei; meghatározása.

A gyakorlatok órarendje és dátumai:

A gyakorlat *kódja(i)*: (T)TMBG0204 , TMOG0204 , TTMBG0814 ;
— *heti óraszáma*: 3, *kreditértéke*: 3.

Tárgykód	*Órarendi időpont*	*Tanterem*	*Gyakorlatvezető*
TTMBG0814	kedd 16.00–18.40	M 205	Molnár Gábor Marcell
(T)TM[B/O]G0204	kedd 17.00–19.40	M 315	Nagy Daniella
(T)TM[B/O]G0204	csütörtök 16.00–18.40	M 317	Grünwald Richárd

A táblázatban feltüntetett gyakorlati időtartamok egy 10 perces szünetet tartalmaznak.

A gyakorlatok dátuma (2019-ben) **és tervezett tematikája:**

február 12., 14.: Normák kiszámítása, sorozatok konvergenciája $\mathbb{R}^2$-ben illetve $\mathbb{R}^3$-ban. Halmazok topológiai tulajdonságai illetve nevezetes (belső, határ-, torlódási, érintkezési) pontjai és átmérője $\mathbb{R}^2$-ben.

február 19., 21.: Két- és háromváltozós függvények irány menti és parciális deriváltjai. A derivált-mátrix meghatározása. Az összetett függvény deriváltja és parciális deriváltjai: láncszabály.

február 26., 28.: Kétváltozós függvények határértéke és folytonossága. Vektorváltozós, valós illetve vektorértékű függvények differenciálhatósága.

március 5., 7.: Magasabb rendű (vegyes) parciális deriváltak. Szélsőérték-számítási feladatok.

március 12., 14.: Példák szélsőérték-számítási feladatok alkalmazásaira. Egyes lineáris leképezések folytonossága, normája*. A lokális inverz létezése és derivált-mátrixa.

március 19., 21.: Implicit függvények deriváltjai. Feltételes szélsőértékszámítási feladatok.

március 26., 28.: *1. zárthelyi dolgozat.*

április 9., 11.: Paraméteres integrálok differenciálása. Riemann-integrálok téglán.

április 16., 18.: Integrálok meghatározása téglán valamint háromszög-tartományokon.

április 23., 25.: Terület- illetve térfogat-számítási feladatok. Az integráltranszformáció alkalmazásai. Áttérés sík- illetve térbeli polárkoordinátákra. Integrálás körlapon, félkörön, negyedkörön.

április 30., május 2.: Egyes Riemann–Stieltjes integrálok meghatározása. A görbementi integrál kiszámítása (szakaszonként) sima görbe esetén.

május 7., 9.: Primitív függvény létezésének eldöntése, meghatározása („többváltozós kvadratúra-probléma").

május 14., 16.: *2. zárthelyi dolgozat.*

A gyakorlatok látogatása kötelező.

A dolgozatok a gyakorlatok tananyagára épülnek. A gyakorlatokon áttekintett feladat-típusok akkor is szerepelhetnek a dolgozatokban, ha a mintadolgozatokban nem jelennek meg.

Gyakorló feladatok

1. Legyen $x\,,\,y\in\mathbb{R}^3$ úgy, hogy
$$x=\Big(\sqrt{2}\,,\,5\,,\,3\Big)\,,\quad y=\Big(\sqrt{2}\,,\,-3\,,\,-3\Big)\,.$$
Meghatározandó $\|x\|_p\,,\,\|y\|_p$ és $d_p(x,y)=\|x-y\|_p\,,$ ahol $p\in\{\,1\,,\,2\,,\,\infty\,\}$.

2. Legyen
$$x_n=\left(\frac{2n+(-1)^n}{n+2}\,,\,\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\,,\,\frac{2^{2n+1}+(-2)^n}{3^n+2^{2n}}\right)\in\mathbb{R}^3\quad(n\in\mathbb{N}).$$
Konvergens-e az (x_n) sorozat? Ha igen, mi a határértéke?

3. Legyen
$$\begin{aligned}E&=(([-5,3[\times]1,5])\cup\{(3,2)\})\setminus(]-2,0[\times[0,2])\subset\mathbb{R}^2\ \text{ és}\\ H&=([-1,2]\times]1,3[)\cup\left\{\left(\frac{2n^2}{n^2+1}\,,\,\frac{n-3}{n^2+1}\right)\,:\,n\in\mathbb{N}\right\}\subset\mathbb{R}^2\,.\end{aligned}$$
Meghatározandó(k) E és H belső pontjai, torlódási pontjai, lezártja és a fentebb bevezetett d_p ($p\in\{\,1\,,\,2\,,\,\infty\,\}$) távolságok szerinti átmérői.

4. Legyen $A(x_1\,,\,x_2)=(x_1+2x_2\,,\,2x_1-x_2)\ \ ((x_1\,,\,x_2)\in\mathbb{R}^2)$. Igazoljuk, hogy $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ lineáris leképezés, és határozzuk meg a mátrixát, valamint a normáját, ha az $\mathbb{R}^2$ téren $x=(x_1\,,\,x_2)$ jelöléssel rendre az
$$\|x\|_\infty=\max\{\,|x_1|\,,\,|x_2|\,\}\,,\qquad \|x\|_1=|x_1|+|x_2|\,,\qquad \|x\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$
normákat tekintjük!

5. Definiáljuk az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\,, & \text{ha } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\,,\\ 0\,, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$
Meghatározandó a $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ határérték. Mely $(x_0\,,\,y_0)\in\mathbb{R}^2$ pontokban folytonos az f függvény?

6. Határozzuk meg az
$$\begin{aligned}F(x,y,z)&=\frac{xz}{x^2+y^2+9}\,,\\ G(x,y,z)&=x^2-2xz+\sqrt{y^4+4z^2+5}\,,\\ H(x,y,z)&=e^{xy}\cos\Big((x+z)\pi\Big)\,,\end{aligned}$$
függvények elsőrendű parciális deriváltjait! Legyen
$$f=\begin{pmatrix}F\\ G\\ H\end{pmatrix}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\,.$$

Meghatározandó $f'(0,0,1)$. Legyen továbbá

$$u = \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{4}{5} \right).$$

Határozzuk meg a $D_uF(0,0,1)$, $D_uG(0,0,1)$ és $D_uH(0,0,1)$ iránymenti deriváltakat!

7. Definiáljuk az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy $f(x,y) = y(x^4+4)$ ha $x \neq 0$ és $f(0,y) = y^3$.
(a) Mutassuk meg, hogy az f függvénynek nem létezik határértéke a $(0,1)$ pontban!
(b) Igazoljuk, hogy f folytonos a $(0,2)$ pontban!
(c) Határozzuk meg a $D_1f(0,2)$ és $D_2f(0,2)$ parciális deriváltakat! Differenciálható-e az f függvény a $(0,2)$ pontban?
(d) Határozzuk meg a $D_1f(x,y)$ és $D_2f(x,y)$ parciális deriváltakat $x \neq 0$ esetén! Igazoljuk, hogy ezekben a pontokban f differenciálható!

8. Definiáljuk az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Legyen továbbá $v = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$.
(a) Folytonos-e az f függvény a $(0,0)$ pontban?
(b) Meghatározandó $D_1f(0,0)$ és $D_2f(0,0)$, ha létezik.
(c) Meghatározandó $D_1f(x,y)$ és $D_2f(x,y)$ minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pontban.
(d) Differenciálható-e az f függvény a $(0,0)$ pontban?
(e) Meghatározandó a $D_vf(0,0)$ irány menti derivált, ha létezik.

9. Legyen $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ úgy, hogy

$$\phi(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \phi'(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

továbbá

$$F(y_1, y_2, y_3) = y_2y_3e^{y_1y_2} \quad ((y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3)$$

és $f(x_1, x_2) = F(\phi(x_1, x_2)) \quad ((x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2)$. Meghatározandó $D_1f(0,0)$ és $D_2f(0,0)$.

10. Határozzuk meg az alábbi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények lokális szélsőérték-helyeit és nyeregpontjait:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(x,y) = 4x^2 + 8xy + 5y^2 - 8x - 8y + 6, \\ \text{(b)} & f(x,y) = 8x^3 - 6xy - y^3, \\ \text{(c)} & f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4. \end{array}$$

11. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ úgy, hogy

$$f(t,s) = \left(e^t\cos(3s), 2 + e^t\sin(3s)\right) \qquad \left((t,s) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Meghatározandó $f(\mathbb{R}^2)$.

12. Határozzuk meg f függvény feltételes lokális szélsőérték-helyeit a $g = 0$ feltételre vonatkozóan, ahol

(a) $\quad f(x,y) = 24xy \;$ és $\; g(x,y) = 4x^2 + y^2 - 8\,;$

(b) $\quad f(x,y) = 24\ln x + \ln y \;\; (x > 0\,,\; y > 0) \;$ és $\; g(x,y) = 24x + y - 25\,.$

13. Meghatározandó a

$$\phi(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\,dt \quad (x \in]0,\infty[),$$

$$\psi(x) = \int_1^2 \ln(x^2+t^2)\,dt \quad (x \in]0,\infty[)$$

és

$$f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \ln(x^2+t^2)\,dt \quad (x \in]0,\infty[)$$

függvények deriváltja.

14. Számítsuk ki a következő kettős integrálokat:

$$\int_{-2}^{2}\int_{1}^{3} \big(4xy^2 - 2\big)\,dy\,dx\,, \quad \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1} xe^{xy}\,dy\,dx\,, \quad \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1} ye^{xy}\,dy\,dx\,,$$

$$\int_{0}^{6}\int_{4}^{x^2} (3\sqrt{y} - 4x)\,dy\,dx\,, \quad \int_{0}^{1}\int_{0}^{x} y^2e^{xy}\,dy\,dx\,, \quad \int_{-8}^{8}\int_{0}^{\sqrt{64-x^2}} \frac{x}{x^2+y^2+36}\,dy\,dx\,.$$

15. Meghatározandó az

$$E(a,b) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}$$

síktartomány területe (ahol $a > 0$ és $b > 0$).

16. Legyen

$$g(t) = (\cos(\pi t)\,,\, \sin(\pi t)\,,\, t) \qquad (t \in [0,2])$$

és $f(x,y,z) = (-2yz\,,\, 2xz\,,\, x^2+y^2)$. Meghatározandó a g görbe ívhossza és az $\int_g f$ görbe menti integrál.

17. Létezik-e olyan $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, amelyre

$$D_1F(x,y) = f_1(x,y) \quad \text{és} \quad D_2F(x,y) = f_2(x,y) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)\,,$$

ha

(a) $\quad f_1(x,y) = x + y + e^x \sin y \;$ és $\; f_2(x,y) = x - y + e^x \cos y\,;$

(b) $\quad f_1(x,y) = xy - y \;$ és $\; f_2(x,y) = xy + x\,;$

(c) $\quad f_1(x,y) = y + \dfrac{2x}{x^2+y^2+1} \;$ és $\; f_2(x,y) = x + \dfrac{2y}{x^2+y^2+1}$

$((x,y) \in \mathbb{R}^2)$? Ha van ilyen F függvény, adjunk meg egyet!

A felkészüléshez ajánlott jegyzetek

A gyakorlatokra és a vizsgára legegyszerűbben minden hallgató az előadásokon és a gyakorlatokon készített saját jegyzeteiből készülhet fel. Ezek kiegészítésére javasolt az alábbi kiadványok tanulmányozása:

[BM-Ap] Bessenyei Mihály: Analízis Példatár (DE Mat. Int., 2014)
http://math.unideb.hu/media/bessenyei-mihaly/downloads/analex.pdf

[L-A1] Lajkó Károly: Analízis I. (KLTE Mat. és Inf. Int., 1998)

[L-A2] Lajkó Károly: Analízis II. (DE Mat. és Inf. Int., 2003)

[L-A3] Lajkó Károly: Analízis III. (DE Mat. és Inf. Int., 2001)

[L-K2] Lajkó Károly: Kalkulus II. (DE Mat. Int., 2005)

[L-K2p] Lajkó Károly: Kalkulus II. példatár (DE Inf. Int., 2004)

[Sze] Székelyhidi László: Többváltozós differenciál- és integrálszámítás [*A felsőbb analízis sűrűjében*] (Palotadoktor Bt., 2012.)

Dr. Lajkó Károly felsorolt jegyzetei elektronikus formában elérhetők a
http://zeus.nyf.hu/ mattan/faliujsag/lajko/ web-oldalon.

Dr. Székelyhidi László jegyzete bekötött formában megvásárolható a Matematikai Intézet könyvtárában.

További ajánlott irodalom:

[Csa] Császár Ákos: Valós analízis I-II. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.

[PSchS] Pál Jenő, Schipp Ferenc, Simon Péter: Analízis II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[Rud] Walter Rudin: A matematikai analízis alapjai. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1978.

[Str] K. R. Stromberg: An introduction to classical real analysis. Wadsworth, California, 1981.

[Sza] Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei I-II. Typotex Kiadó, Budapest, 2000.

A gyakorlatok javasolt tananyaga a [**BM-Ap**] példatárban [177–217. feladat (27–33. old.)], a [**L-A3**] jegyzetben valamint a [**L-K2p**] példatár II–VI. fejezeteiben található feladatok (ezek — az előadások és a gyakorlatok tematikája szerint haladva — abban az esetben is házi feladatnak tekintendők, ha a gyakorlatvezető nem jelöl ki gyakorló feladatokat), valamint a példatárakban található mintamegoldások.

A tananyag számonkérése

A tantárgy teljesítéséhez gyakorlati és kollokviumi jegyet kell szerezni. A korábban ebből a tantárgyból megszerzett gyakorlati jegyek természetesen érvényesek.

A gyakorlat teljesítése:

A gyakorlati jegy megszerzéséhez két dolgozatot kell megírni (ez alól a hiányzás igazolása sem mentesít, igazolt távolmaradás esetén pót-dolgozat írandó). Dolgozatonként alapfeladatok megoldásáért legfeljebb 25 pont, összesen maximum 50 pont szerezhető. A dolgozatokban található nehezebb („szorgalmi") feladatok megoldásával többletpontok szerezhetők, amelyek a dolgozat pontszámához adódnak. A gyakorlatokon új vagy nehezebb feladatok megoldásának bemutatásáért a gyakorlatvezető a hallgatónak a félév folyamán összesen legfeljebb 10 szorgalmi pontot adhat, amit a gyakorlati jegy megállapításakor hozzáadunk a dolgozatok összpontszámához.

Kevésbé sikeres dolgozatot újraírni csak a szorgalmi időszak utolsó vagy a vizsgaidőszak első hetében lehet. Csak egy dolgozat újraírása lehetséges, mely esetben a régi pontszám mindenképpen törlésre kerül.

A gyakorlati jegy megállapítása:

0	—	24	pont	...	1
25	—	30	pont	...	2
31	—	37	pont	...	3
38	—	44	pont	...	4
45	—	50+	pont	...	5

Többváltozós függvények differenciál- és integrálszámítása
1. mintadolgozat (március 26./28.)

Az alábbi feladatok összpontszáma 25, megoldási idő 100 perc. Tankönyv, jegyzet nem használható.

Feladatok

1. Legyen
$$H = [-1, 0[\times]0, 1] \cup \left\{ \left(\frac{2n}{n+1}, \frac{n}{2^n} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}^2 .$$
Meghatározandó(k) H belső pontjai, torlódási pontjai, lezártja és átmérője.
$\longrightarrow$ *(1+2+2+2=7 pont)*

2. Legyen minden $(x_1 , x_2) \in \mathbb{R}^2$ esetén
$$f(x_1 , x_2) = \sqrt[3]{(x_1 - 1)^2 x_2^4}, \quad \text{továbbá } a = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) .$$
(a) Parciálisan differenciálható-e az f függvény az $(1, 0)$ pontban?
(b) Meghatározandó $D_1 f(0, 0)$, $D_2 f(0, 0)$ és $D_a f(0, 0)$.
(c) Differenciálható-e az f függvény a $(0, 0)$ pontban? *(2+3+2=7 pont)*

3. Legyen $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ úgy, hogy
$$\phi(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \phi'(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ,$$
továbbá $F(y_1 , y_2 , y_3) = y_1^2 y_2 y_3 \quad ((y_1 , y_2 , y_3) \in \mathbb{R}^3))$, $v = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ és $f(x_1 , x_2) = F(\phi(x_1 , x_2)) \quad ((x_1 , x_2) \in \mathbb{R}^2)$. Meghatározandó $D_v f(0, 0)$. *(4 pont)*

4. Keressük meg az
$$f(x, y) = x^4 + y^2 - 2xy \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$
függvény lokális szélsőérték-helyeit! *(7 pont)*

5. *Szorgalmi feladat*: Legyen $f(x, y, z) = x^2 y - y^2 z + z^6 \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$. Igazoljuk, hogy a $(0, 1)$ pontnak egy $U \subset \mathbb{R}^2$ környezete és pontosan egy $g : U \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, amelyre $g(0, 1) = 1$ és $f(x, y, g(x, y)) = 0 \quad ((x, y) \in U)$. Határozzuk meg a $D_1 g(0, 1)$ és $D_2 g(0, 1)$ parciális deriváltakat! *(3+2=5 pont)*

6. *Szorgalmi feladat*: Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ úgy, hogy $f(t, s) = (e^t \cos s , e^t \sin s)$ $((t, s) \in \mathbb{R}^2)$.
(a) Meghatározandó $f(\mathbb{R}^2)$.
(b) Igazoljuk, hogy f nem injektív, de minden pontban lokálisan invertálható!
(c) Adjunk meg olyan $(t_0 , s_0) \in \mathbb{R}^2$ pontot, amelyre $f(t_0 , s_0) = (0, 1)$. Legyen f_0 az f függvény leszűkítése a (t_0 , s_0) pont egy alkalmas környezetére úgy, hogy f_0 invertálható! Meghatározandó $(f_0^{-1})'(0, 1)$. *(3+4+5=12 pont)*

Többváltozós függvények differenciál- és integrálszámítása
2. mintadolgozat (május 14./16.)

Az alábbi feladatok összpontszáma 25, megoldási idő 100 perc. Tankönyv, jegyzet nem használható.

FELADATOK

1. Keressük meg az
$$f(x,y) = 24x + 8y + 18 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$
függvény feltételes szélsőérték-helyeit a $3x^2 + y^2 = 4$ feltételre nézve! *(5 pont)*

2. Meghatározandók az alábbi integrálok:
(a) $$\int_{[-3,3]\times[1,2]} \left(4xy^2 - 6ye^{xy}\right)\, d(x,y)\,,$$
(b) $$\int_{-3}^{3}\int_{1}^{x^2} (8x - 6\sqrt{y})\; dy\, dx\,,$$
(c) $$\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1}{x^2+y^2+1}\, dy\, dx\,.$$
(4+3+4=11 pont)

3. Legyen
$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\,,\; -\frac{y}{x^2+y^2}\right) \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right)$$
és $\gamma(t) = (\cos t\,,\, \sin t)$ $(t \in [0, 2\pi])$. Meghatározandó az $\int_\gamma f$ görbe menti integrál.
$\longrightarrow$ *(4 pont)*

4. Legyen
$$f_1(x,y) = e^{-y} \quad \text{és} \quad f_2(x,y) = -2y - xe^{-y} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$
Döntsük el, hogy létezik-e primitív függvénye az $f = (f_1\,,\, f_2)$ függvénynek, és ha van, határozzuk meg az összeset! *(5 pont)*

5. *Szorgalmi feladat*: Meghatározandó az
$$f(x) = \int_{\frac{1}{2x}}^{x^3} \frac{\sin(xt\pi)}{t}\, dt \qquad \left(x \in]1\,,\, +\infty[\right)$$
függvény deriváltja. *(5 pont)*

6. *Szorgalmi feladat*: Legyen $1 < n \in \mathbb{N}$. Adjunk meg olyan $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, amelyre tetszőleges $x = (x_1\,,\, x_2\,,\, \dots\,,\, x_n) \in \mathbb{R}^n$ és $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén $D_j f(x) = x_j \,/\, \sqrt{\|x\|^2 + 1}$. *(3 pont)*

Az elméleti vizsga teljesítése:

A kollokvium szóbeli, tételhúzással, írásbeli felkészüléssel. A tételsor (és az egyes tételekhez ajánlott jegyzet-fejezetek vagy szakaszok megjelölése) ezen tájékoztató hetedik oldalán található. A megjelölt irodalom esetenként csak részben tartalmazza az előadáson az adott témakörben ismertetett fogalmakat és tételeket. A tétel kidolgozása során a bizonyítások leírására vagy felvázolására (majd részletesebb szóbeli ismertetésére) is törekedjenek! Természetesen a hosszabb, összetettebb bizonyítások ismerete csak a jeles illetve (részben) a jó érdemjegy megszerzéséhez követelhető meg. A vizsga során a felkészültség minél pontosabb felmérése érdekében a kihúzott tétel áttekintése mellett a tananyag más részeiből (a többi tétel anyagából) is kapnak kérdéseket (fogalmakra, alapvető tételekre vonatkozóan).

Alapvető fogalmak és tételek

A felsorolás csak a legalapvetőbb ismereteket tartalmazza, amelyeket kérdésre felkészülés nélkül is tudni kell ismertetni a vizsgán. Az egyes vizsgatételek kidolgozása során számos további fogalom és tétel ismerete is alapkövetelmény.

Alapvető definíciók:

Lineáris leképezés normája.

Többváltozós függvény differenciálhatósága, differenciálhányadosa (deriváltja).

Többváltozós függvény irány menti és parciális deriváltjai.

A Riemann-integrál téglán illetve korlátos $\mathbb{R}^n$-beli halmazokon. A Jordan-mérték, Jordan-mérhető halmaz.

Riemann–Stieltjes-integrál.

Görbe, görbe menti integrál.

Vektorváltozós, vektorértékű függvény primitív függvénye.

Alaptételek:

A deriváltmátrix előállítása a koordináta-függvények parciális deriváltjai felhasználásával. Differenciálható függvények irány menti deriváltjainak kiszámítása.

Young tétele.

A lokális szélsőérték elsőrendű szükséges és másodrendű elégséges feltétele.

Fubini-tétel.

A Jordan-mérték tulajdonságai és geometriai jelentése.

Primitív függvény létezésének szükséges illetve elegendő feltételei.

Többváltozós függvények differenciál- és integrálszámítása

VIZSGATÉTELEK

1. Valós vektortér, belső szorzat, norma; metrika normált téren. A belsőszorzat-tér geometriája. Izomorfia-fogalmak. Normák ekvivalenciája. [**L-A1:** III.1.]
2. A k dimenziós euklideszi tér. Speciális normák összehasonlítása. Sorozatok konvergenciája, teljesség. Az euklideszi terek szorzat-alakja, intervallumai. Heine–Borel-tétel. [**L-A1:** III.1., III.3., IV.4.]
3. Lineáris leképezések mátrixa, normája. A reguláris mátrixok halmaza. [**L-A3:** I.1.]
4. Vektorváltozós, vektorértékű függvények differenciálhatósága, lineáris approximálhatóság. Differenciálhatóság és folytonosság. Differenciálási szabályok. [**L-A3:** I.2., I.4.]
5. Irány menti és parciális deriváltak. A differenciálhatóság szükséges feltétele, a derivált mint mátrix meghatározása. A Lagrange-féle középérték-tétel vektorváltozós alakjai. A differenciálhatóság elegendő feltétele. [**L-A3:** I.3., I.5.]
6. Többszöri differenciálhatóság, vegyes parciális deriváltak, Young tétele, Taylor-tétel. [**L-A3:** I.6.]
7. A lokális szélsőérték elsőrendű szükséges és másodrendű elégséges feltétele. [**L-A3:** I.8.]
8. Paraméteres integrálok deriválása. [**L-A3:** I.7.]
9. Az integrál, mint határérték: Darboux tételei. [**L-A2:** II.3.]
10. A Banach-féle fixpont-tétel. Inverzfüggvény-tétel. [**L-A3:** I.9.]
11. Implicit függvény tétel. Az implicit függvény deriválása. [**L-A3:** I.10.]
12. Feltételes szélsőérték. [**L-A3:** I.11.]
13. A Riemann-integrál téglán. Riemann-kritérium; folytonos függvények integrálhatósága. [**L-A3:** II.1.(a)–(c)]
14. Tégla-additivitás és linearitás. Fubini-tétel; az integrál kiszámítása. [**L-A3:** II.1.(d),(e)]
15. A Riemann-integrál korlátos halmazokon. A Jordan-mérték és tulajdonságai. [**L-A3:** II.2., II.3.(1–4. tétel)]
16. A Riemann-integrál mint terület-mérték. Fubini-tétel egyszerű tartományra. [**L-A3:** II.3.(5–8. tétel)]
17. Integráltranszformáció. Áttérés síkbeli illetve térbeli polárkoordinátákra. [**L-A3:** II.3.(9. tétel), II.4.]
18. Korlátos változású függvények. Riemann–Stieltjes-integrál. [**L-A2:** III.1, III.2.]
19. Görbe fogalma, ívhossza. Görbe menti integrál. Primitív függvény fogalma, Newton–Leibniz-formula. [**L-A2:** III.3., III.4.], [**L-A3:** III.1., III.2.]
20. Primitív függvény létezésének szükséges illetve elegendő feltételei. [**L-A3:** III.3., III.4.]