Trigonometria és koordinátageometria - Feladatok

Boda Judit, Vincze Csaba

2015. szeptember 29.

Bevezetés

> A matematikában, csakúgy, mint minden tudományos kutatásban, kétféle irányzattal találkozunk: az elvonatkoztatásra való törekvéssel – mely megkísérli a sokféle anyagból a logikai szempontokat kimunkálni és azokat rendszeres öszszefüggésbe hozni –, és a másik irányzattal, a szemléletesség irányzatával, mely inkább a tárgyak és azok tartalmi vonatkozásainak eleven megértésére törekszik.
>
> David Hilbert

A feladatgyűjtemény a Trigonometria és Koordinátageometria tantárgy gyakorlataihoz kíván segítséget nyújtani. Ez a matematika alapképzési szak bevezető kurzusainak egyike, melynek elméleti anyagát Vincze Csaba: Trigonometria és Koordinátageometria című egyetemi jegyzete tartalmazza. Általánosságban szólva ennek felépítését követi a feladatgyűjtemény. A szóban forgó ismeretek jelentős része azonban középiskolai törzsanyag. Erőltetett volna tehát a párhuzamos építkezés elvéhez való következetes ragaszkodás, már csak azért is, mert a témakörök sorrendje – bizonyos határok között – szabadon permutálható: a vektorfogalom bevezetése után például a trigonometria következik, de lehetőség lenne az affin koordinátarendszerek tárgyalására, az egyenesek, síkok egyenleteinek (egyenletrendszereinek) levezetésére, hiszen affin, azaz a vektortér - struktúrához kötődő problémákról van szó, melyek megoldása során valójában nincs szükség további struktúrális elemekre (távolság, szögmérték). Itt szerepeltethetők az osztóviszony és a vele kapcsolatos nevezetes tételek. Természetesen az egyenesek, síkok egyenleteiben (egyenletrendszereiben) fellépő konstansok geometriai értelmezéséhez és a metrikus feladatok megoldásához már szükség van a koordinátarendszer specializálására (tipikusan: Descartes-féle koordinátarendszerek).

Az első fejezetbe - az önálló feldolgozást ösztönző elemként - szintfelmérő feladatsorokat illesztettünk be, melyek a Debreceni Egyetemen indított matematika alapképzési szak elsőéves hallgatói számára készültek. A második és harmadik fejezet tematikusan már nem tartozik az osztatlan tanárképzéssel összehangolt Trigonometria és Koordinátageometria tárgy elméleti anyagához; korábban, a kétlépcsős képzés kezdeti szakaszában viszont szerepeltek ezek a témakörök is. A további fejezetek a jelenleg aktuális tematika címszavai köré szerveződnek. Fontos azonban, hogy időről időre megtörjük a a rutinjellegű feladatmegoldás menetét, ami a tematizálás többé-kevésbé elkerülhetetlen következménye. Erre is alkalmat teremtenek a szintfelmérő feladatsorok, illetve a már említett második és harmadik fejezet. A standard fejezeteken belül is szerepelnek olyan feladatok, melyek tematikusan később kerülnek tárgyalásra. A hozzájuk tartozó elméleti háttér azonban az aktuális anyag minimális kiegészítésével megadható (egy - egy megjegyzés erejéig utalunk rá). Néhány feladat kapcsán pedig kitekintő jellegű megjegyzést talál az érdeklődő Olvasó (logikai áramkörök, Bell - féle szám, Desargues - tételek stb.).

A témakörök elmélyült és részletes tanulmányozásához természetesen számos más forrás is a rendelkezésre áll. Ezek közül emeltünk ki néhányat a teljesség igénye nélkül az Irodalomjegyzékben.

Dr. Vincze Csaba

Debrecen, 2015 szeptember

Tartalomjegyzék

1. Szintfelmérő feladatsorok

2006/2007

1. Az x szög kiszámítása nélkül határozza meg $\sin x$ pontos értékét, ha ismert, hogy $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$! (5 pont)

2. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\sin 2x(\cos x + 1) + \sin x(\cos 2x - 5) = 0$$

egyenletet! (8 pont)

3. Határozza meg a c paraméter értékét úgy, hogy az $x + 3y = c$ egyenletű egyenes érintse az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kört! (5 pont)

4. Két, egymást derékszögben metsző egyenesen egy-egy pont mozog a metszéspont felé állandó sebességgel. Az A pont sebessége $4\frac{m}{s}$, míg a B ponté $2\frac{m}{s}$. Egy adott időpontban az A pont 40 méterre, a B pont pedig 30 méterre van a metszésponttól. Ettől a pillanattól számítva mennyi idő múlva lesz a két pont egymáshoz legközelebb és mekkora ez a minimális távolság? (8 pont)

5. Ismeretes, hogy ha egy ponton át szelőt húzunk egy körhöz, akkor a ponttól a metszéspontokig terjedő szakaszok hosszának szorzata nem függ a szelő megválasztásától. Számítsa ki ezt az állandót az

$$x^2 + y^2 - 16x - 4y + 43 = 0$$

egyenletű kör és a $P(1, 3)$ pont esetében! (6 pont)

2007/2008

6. A valós számok mely legbővebb részhalmazán értelmezhető az $\dfrac{1}{\sin x - 1}$ kifejezés? (3 pont)

7. Oldja meg a valós számok halmazán az $x \cos \dfrac{1}{x} = 0$ egyenletet! (4 pont)

8. Ha egy kocka éleit 4 centiméterrel megnöveljük, akkor felszíne 480 négyzetcentiméterrel nő. Mekkora az eredeti kocka térfogata? (5 pont)

9. Két, egymást nem metsző kör középpontjának a távolsága 12. A közös belső érintőszakaszok hossza $4\sqrt{3}$, a közös külső érintőszakaszok hossza $2\sqrt{35}$. Számítsa ki a körök sugarát! (10 pont)

10. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, mely illeszkedik a $(3, 6)$ pontra és a $(3, 0)$ ponttól mért távolsága két egység! (10 pont)

2008/2009

11. Oldja meg a $\dfrac{1}{1-\sin 2x} = 2$ trigonometrikus egyenletet. (2 pont) A p valós paraméter mely további értékei mellett van megoldása a $\dfrac{1}{1-\sin 2x} = p$ trigonometrikus egyenletnek. (3 pont)

12. Számítsa ki $\cos x$ lehetséges értékeit, ha $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{2}$. (3 pont)

13. Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb H részhalmazát, melyen az

$$\frac{x-3}{x^2-x-6}$$

kifejezés értelmezhető (1 pont) és ábrázolja az

$$f\colon H \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{x-3}{x^2-x-6}$$

függvényt. (3 pont)

14. Hol metszi a koordinátatengelyeket az $x^2-2x+y^2-4y-20=0$ egyenletű kör $P(4,6)$ pontjában vont érintője? (10 pont)

15. Milyen görbén helyezkednek el azoknak a köröknek a középpontjai, melyek átmennek a $P(3,2)$ ponton és érintik az x tengelyt? (10 pont)

2009/2010

16. Oldja meg a $\sin x = \operatorname{tg} x$ trigonometrikus egyenletet! (3 pont)

17. Egy a, b és c oldalú háromszögben $a+b=10$ és $\gamma = 30°$. Mekkora az oldalak hossza, ha a háromszög területe 4 területegység? (6 pont)

18. Határozza meg az $x^2-4x+y^2-2y-20=0$ egyenletű kör $x=5$ abszcisszájú pontjaiban vont érintőinek egyenletét és számítsa ki az érintőegyenesek metszéspontjának a koordinátáit! (7 pont)

19. Egy egyenes körkúp nyílásszöge 120°, alapkörének a sugara pedig 10 egység. Mekkora a beírt gömb sugara, felszíne és térfogata? (10 pont)

20. a) Adjon meg olyan polinomot, melynek gyökei 2, -1 és 5. (1 pont)

b) Milyen távolságra van az $X(1,1)$ pont az $A(1,2)$ és a $B(2,1)$ pontokra illeszkedő egyenestől? (2 pont)

c) Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, melyen az

$$\frac{1}{\sqrt{(x+3)(x-1)}}\sqrt{x^2-2x-3}$$

kifejezés értelmezhető! (3 pont)

2010/2011

21. Határozza meg a

$$\sqrt{10+4\sqrt{6}}\cdot\sqrt{10-4\sqrt{6}}, \quad (\sqrt{2}+1)^3-(\sqrt{2}-1)^3,$$

$$(1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{3})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{100})$$

kifejezések pontos értékét! (1+2+3 pont)

22. Melyik a nagyobb: $297\cdot 299$ vagy 298^2? (1 pont) Rendezze nagyság szerint növekvő sorrendbe a következő számokat: 2^{45}, 3^{36}, 4^{27} és 5^{18}. (3 pont)

23. Bizonyítsa be, hogy

a) $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}+\sqrt{6}}}<3$,

b) $\sqrt{5}$ irracionális,

c) egy szám pontosan akkor osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal.

(2+3+4 pont)

24. Ábrázolja az

$$f\colon x\mapsto 2x+3, \quad f\colon x\mapsto \sin(x+\frac{\pi}{2}), \quad f\colon x\mapsto x^2-4x+6, \quad f\colon x\mapsto 2^x-1$$

függvények grafikonját! (1+2+3+2 pont)

25. Az Amazonas folyó másodpercenként 116000 tonna vizet visz az Atlanti óceánba; 1 órás vízhozama Magyarországra lehullva megközelítőleg hány mm csapadéknak felel meg? (Magyarország területe kb. 93000 km^2) (3 pont)

Mekkora a Föld felszíne? (2 pont)

2. Logika

Azokat a kijelentő mondatokat, melyekről egyértelműen eldönthetjük, illetve feltételezhetjük, hogy vagy igazak, vagy hamisak, *állításnak* (*ítéletnek*) nevezzük.

26. Állapítsa meg, hogy a felsorolt példák közül, melyik állítás.

a) Ma kedd van.

b) Esik az eső.

c) Ez a négyszög téglalap.

d) Magyarországnak 10 234 451 lakosa van.

e) A 2 prímszám.

f) A téglalap átlói egyenlő hosszúak.

g) Határozza meg a 618 prímtényezős felbontását!

h) Hogy hívnak?

i) A 6 és a 8 páratlan számok.

j) A téglalap átlói egyenlő hosszúak.

27. Legyen

a) A: az n szám hattal osztható,

b) B: az n szám páros szám,

c) C: az n szám 12-re végződik,

d) D: az n szám prímszám,

e) E: az n szám 4-gyel osztható,

f) F: az n szám nem osztható 9 -cel,

g) G: az n szám osztható 3-mal.

Mi a következő formulák jelentése:

a) $A \Rightarrow C$,

b) $B \Rightarrow \neg D$,

c) $(B \wedge D) \Rightarrow F$,

d) $(B \vee A) \Rightarrow (A \wedge G)$,

e) $\neg D \Rightarrow F$,

f) $(\neg G \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$,

g) $(D \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \wedge F)$.

28. Formalizálja a következő mondatokat!

a) Esik az eső, de nincs meleg és a szél sem fúj.

b) Tivadar hazament, de nem maradt otthon, bár mindenki ezt várta tőle.

c) Ha hazajössz és be is vásárolsz, nekem nem kell lemennem és ihatok tejet.

d) Juli moziba megy és Éva otthon marad, vagy mindketten elmennek, és Juli vissza sem jön.

e) Ha ismerem a szabályt és tudom hogyan kell alkalmazni, jó eredményt kapok.

f) Ha Micimackónak és Malackának sikerül menyétet fogni, akkor sok mézet esznek.

g) Szivárvány csak akkor van, ha a nap süt és esik az eső és nincs dél.

h) Ha esik az eső, de nincs szivárvány, akkor nem süt a nap, vagy éppen dél van.

i) Ha a szemtanú megbízható és a talált ujjlenyomatok a tettestől származnak, akkor a bűncselekményt előre megfontolt szándékkal követték el, feltéve, hogy az írásszakértő véleménye helytálló,

29. Határozza meg a következő formulák értéktáblázatát és keressen logikailag ekvivalens állításokat!

a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$,

b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$,

c) $\big((A \wedge B) \vee C\big) \Leftrightarrow \big((A \vee C) \wedge (B \vee C)\big)$

d) $\big((A \vee B) \wedge C\big) \Leftrightarrow \big((A \wedge C) \vee (B \wedge C)\big)$,

e) $A \Rightarrow \big((B \vee C) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A)\big)$,

f) $(A \wedge \neg B) \wedge C$.

30. Ekvivalensek-e a következő állítások?

a) Esik az eső, kivéve, ha nincs felhő az égen.
Esik az eső, vagy nincs felhő az égen.

b) Ha nem megyek el a boltba, akkor nem tudok enni és éhes maradok.
Ha éhes maradok és nem tudok enni, akkor nem megyek le a boltba.

c) $A \Rightarrow B$
$\neg A \vee B$.

31. Állapítsa meg, hogy melyik logikai törvény az alábbiak közül!

a) $(A \wedge \neg B) \Rightarrow C$,

b) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$,,

c) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \wedge \neg B)$,

d) $(A \wedge C) \vee (A \Rightarrow B)$,

e) $(A \Rightarrow (\neg C \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg A \vee (B \Rightarrow A))$,

f) $(A \wedge B \Rightarrow \neg C) \wedge (C \wedge \neg(A \Rightarrow \neg B))$,

g) $(C \wedge A) \Rightarrow ((B \Rightarrow \neg A) \vee A)$,

h) $(\neg A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow (A \Rightarrow B))$,

i) $(A \vee B) \wedge C \Rightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$,

j) $(Y \vee Z) \wedge (Z \Rightarrow \neg X)$,

k) $\neg\big((X \vee \neg Y) \Rightarrow Z\big) \wedge (X \vee Z)$.

32. Formalizálja és tagadja a következő állításokat!

a) Péter otthon van.

b) Péter otthon van és tévét néz.

c) Péter otthon van és vagy tévét néz, vagy alszik (kizáró vagy).

d) Este moziba, vagy színházba megyek.

e) Este vagy moziba, vagy színházba megyek (kizáró vagy).

f) A tér a és b egyenese metsző, vagy kitérő.

33. Írja fel a "kizáró vagy" műveletét a konjunkció, a diszjunkció és a negáció segítségével!

34. Bizonyítsa be, hogy

a) a konjunkció és a diszjunkció művelete asszociatív,

b) a konjunkció és a diszjunkció művelete kommutatív,

c) a konjunkció és a diszjunkció művelete idempotens, azaz

$$(A \wedge A) \Leftrightarrow A \quad \text{és} \quad (A \vee A) \Leftrightarrow A$$

logikai törvény,

d) $(\neg(\neg A)) \Leftrightarrow A$ logikai törvény (a kétszeres tagadás törvénye),

e) az implikáció nem kommutatív,

f) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ logikai törvény (kontrapozíció elve)!

35. (**Indirekt bizonyítás**). Igazolja, hogy

a) $\sqrt{2}$ irracionális,

b) $\sqrt[3]{2}$ irracionális,

c) egy racionális és egy irracionális szám összege irracionális.

36. Állapítsa meg, hogy melyik igaz, illetve hamis az alábbi állítások közül.

a) Ha egy egész szám osztható hattal, akkor osztható hárommal és kettővel is.

b) A hattal való oszthatóság elegendő feltétele a hárommal való oszthatóságnak.

c) A hattal való oszthatóság elegendő feltétele a kettővel való oszthatóságnak.

d) A hattal való oszthatóság szükséges feltétele a hárommal való oszthatóságnak.

e) A hattal való oszthatóság szükséges feltétele a kettővel való oszthatóságnak.

f) A hattal való oszthatóság szükséges és elegendő feltétele a hárommal és a kettővel való oszthatóságnak.

37. Tagadja a következő állításokat!

> Élt egyszer négy jó barát: Mindenki, Valaki, Bárki és Senki. Egy verőfényes nyári délutánon szóltak Mindenkinek, hogy akadt egy fontos munka, amit sürgősen el kell végezni. Mindenki biztos volt benne, hogy Valaki megcsinálja. Bárki elvégezhette volna, viszont Senki nem tette meg, ami Mindenki dolga lett volna. Mindenki úgy gondolta, hogy Bárki megtehetné, de Senki nem vette észre, hogy Mindenki kerüli a munkát. Végül Mindenki okolt Valakit, amiért Senki nem csinálta meg azt, amit Bárki megtehetett volna.

a) Minden paralelogramma trapéz.

b) Van olyan trapéz, amelyik nem paralelogramma.

c) Minden szarka farka tarka.

d) Mindenki tisztel valakit.

e) Létezik 89-el osztható szám.

f) Minden szám osztható hárommal vagy nem létezik prímszám.

g) A rossz emberek nem szeretik a virágokat.

38. Irja fel a $\neg\big(\exists x : \neg p(x)\big) \Rightarrow (\forall x : p(x))$ formula értéktáblázatát!

39. Formalizálja a **77**. feladatban szereplő állításokat! Melyiknek felel meg a

$$\forall\ a,\ b,\ S : \ \Big((a \mid\mid b) \wedge (b\ \subset\ S)\Big)\ \Rightarrow\ a \mid\mid S$$

állítás?

40. Pista, Géza és Sanyi beszélgetnek. Pista azt mondja, hogy Géza hazudik. Géza azt mondja, hogy Sanyi hazudik. Sanyi azt mondja, hogy Géza és Pisti is hazudik. Ki mond igazat és ki hazudik?

41. Kovács úr a következő módon reagált Nagy úr felszólalására: ,,Ha Nagy úr - tisztelt kollégám - birtokában lenne az elemi logikai következtetési szabályoknak, akkor ezt a baklövést nem követte volna el. Sajnos Nagy úr a logikai következtetésekkel nincs tisztában. Ezért ne is csodálkozzunk előbbi melléfogásán.” Vajon Kovács úr helyes következtetésre jutott?

42. Helyes-e a következtetés?

a) Minden ember halandó. Szókratész ember. Szókratész tehát halandó.

b) Ádámnak nincs autója. Éva csak olyan fiúkkal áll szóba, akiknek van autója. Tehát Éva nem áll szóba Ádámmal.

c) Néhány republikánus kedvel minden demokratát, de egyetlen republikánus sem szereti a szocialistákat. Tehát egyetlen demokrata sem szocialista.

d) Ha a lóversenyek eredményeit a politikusok előre eldöntik, vagy a játéktermeket ellenőrzésük alatt tartják a szerencselovagok, akkor kevesebb a turista, ami árt a lakosságnak. Ha kevesebb a turista, akkor a rendőrség elégedett. A rendőrség sohasem elégedett. Tehát a lóversenyek eredményét nem a politikusok döntik el.

e) Ha esik az eső, ernyőt viszek magammal. Ma ernyőt vittem magammal. Tehát ma esett az eső.

f) Ha egy pozitív egész szám nem osztható kettővel, akkor prímszám. λ nem prímszám. Ebből következik, hogy λ páros.

43. A tapasztalat azt mutatja, hogy a kékszeműek között több a szőke, mint általában. Következik-e ebből, hogy a szőkék között több a kékszemű, mint általában?

44. Hány igaz állítás szerepel a következők között?

Ezen a papíron pontosan egy igaz állítás van.
Ezen a papíron pontosan két igaz állítás van.
.
.
.
Ezen a papíron pontosan száz igaz állítás van.

2.1. Logikai áramkörök

45. Számítógépekben[1], műszerekben, vezérlő automatákban alapvető szerep jut az olyan áramköröknek, melyek valamilyen logikai összefüggést fejeznek ki. Ezeknek a logikai áramköröknek az építőkövei az úgynevezett *kapuáramkörök*:

a) $\neg A$ (NOT vagy inverter),

b) $A \wedge B$ (AND - kapu),

c) $A \vee B$ (OR - kapu),

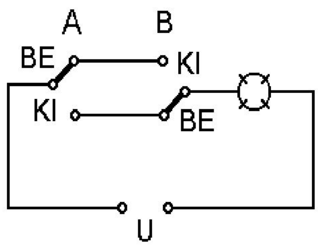
d) $\neg(A \wedge B)$ (NAND - kapu),

e) $\neg(A \vee B)$ (NOR - kapu).

A kapuáramköröknek - az A és a B állapotának függvényében - ugyancsak két állapota lehetséges, egy nyitott és egy zárt állapot, melyek a logikai igennek, illetve nemnek felelnek meg. A legegyszerűbb áramköri elem az egyállású kapcsoló. Ez bekapcsolva vezeti az áramot, kikapcsolva pedig nem. Soros, illetve párhuzamos kapcsolásuk esetén a gyakorlatban is találkozhatunk a konjunkció és a diszjunkció logikai műveletével

[1]http://www.fke.bme.hu/oktatas/meresek/6.DOC

(AND - és OR - kapu). A logikai áramkörök tervezésénél az a célunk, hogy bizonyos események bekövetkezésénél az áramkör meghatározott módon vezéreljen valamilyen eszközt: a lift induljon felfelé, vagy lefelé, ha a liftben megnyomták a megfelelő gombot, de ne induljon, ha a lift túlterhelt, vagy az ajtó nyitva van stb. A szóbanforgó eseményeket kapcsolókkal is szemléltethetjük: a kapcsoló bekapcsolása jelenti az esemény bekövetkezését, a kikapcsolt állapot pedig, hogy az esemény nem következett be. A folyosói világítást például a folyosó mindkét végén fel tudjuk kapcsolni és le is tudjuk oltani.



1. ábra. Alternatív kapcsolás.

Az ún. *alternatív kapcsolás* olyan kétkapcsolós áramkör, mely a kapcsolók bármelyikével be- , illetve kikapcsolható. Ezt a gyakorlatban kétállású kapcsolókkal oldják meg, melyek "KI" állásánál is van a vezeték számára csatlakozási lehetőség. Legyen az A állítás az, hogy az ,,A kapcsoló be van kapcsolva"', a B állítás az, hogy a ,,B kapcsoló be van kapcsolva"', a C állítás pedig, hogy ,,ég a lámpa". Mivel a rendszer állapotát a két kapcsolóval függetlenül változtathatjuk, a lámpa pontosan akkor ég, ha a kapcsolók ellentétes állásban vannak: C tehát logikailag ekvivalens az $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$ állítással. Könnyű ellenőrizni, hogy éppen az $A \Leftrightarrow B$ logikai művelet tagadásáról van szó.

46. Bizonyítsa be, hogy $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$ logikailag ekvivalens a

$$\neg(\neg\neg(A \wedge B) \vee \neg(A \vee B))$$

állítással (az alternatív kapcsolás megvalósítása inverterekkel, NAND - és NOR - kapukkal).

2.2. Logikai függvények

47. Tekintsünk egy n - változós

$$F\colon \mathcal{A} \times \ldots \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

függvényt, ahol $\mathcal{A}$ az állítások halmaza és legyen I az a függvény, mely minden állításhoz az igazságértékét rendeli. A szokásos konvencióval élve: 0 (hamis), 1 (igaz). Az F leképezés ún. *logikai függvény*, ha

$$I(F(A_1, \ldots, A_n)) = I(F(B_1, \ldots, B_n)),$$

valahányszor $I(A_i) = I(B_i),\ i = 1, \ldots, n$. Ez azt jelenti, hogy az $F(A_1, \ldots, A_n)$ kimenet igazságértéke csak a bemeneti állítások igazságértékétől függ, azaz megadható olyan

$$f\colon \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\} \to \{0,1\}$$

n - változós függvény, melyre

$$I(F(A_1, \ldots, A_n)) = f(I(A_1), \ldots, I(A_n)).$$

A szakirodalomban gyakran az f típusú függvényt nevezik logikai függvénynek. Figyelembe véve, hogy egy logikai függvény megadásához a 0 és 1 elemek n - edrendű ismétléses variációin kell előírnunk a lehetséges 0 és 1 értékeket

a) határozza meg az összes kétváltozós logikai függvényt,

b) határozza meg az n - változós logikai függvények számát!

2.3. Szumma- és produktumjelek

48. Bizonyítsa be, hogy

a) bármely két szomszédos természetes szám szorzata osztható kettővel,

b) bármely három egymásra következő természetes szám szorzata osztható hárommal,

c) bármely m természetes szám esetén $\prod_{k=1}^{n}(m+k-1)$ osztható n-nel,

d) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

e) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

f) bármely m természetes szám esetén $s_m := \sum_{k=1}^{n} k^m$ kifejezhető

$$s_1 := \sum_{k=1}^{n} k, \quad s_2 := \sum_{k=1}^{n} k^2, \ldots, \ s_{m-1} := \sum_{k=1}^{n} k^{m-1}$$

polinomjaként,

g) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$,

h) $(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}$,

i) bármely $|q| < 1$ valós szám esetén $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

3. Ekvivalenciarelációk és osztályozás

49. Tekintsük az egész számok halmazát és legyen $p \in \mathbb{Z}$ egy rögzített, nullától különböző egész szám. Bizonyítsa be, hogy

$$x \; R \; y \;\Leftrightarrow\; x - y \text{ osztható } p \text{ - vel}$$

ekvivalenciareláció[2] az egész számok halmazán és az általa indukált ún. *maradékosztályok* száma p (ez pontosan annyi, ahány maradék felléphet egy egész szám p - vel való osztásakor).

50. Bizonyítsa be, hogy mind

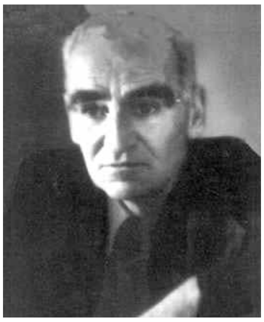
$$R_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z)\},$$

mind pedig

$$R_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, x)\}$$

ekvivalenciareláció az $A := \{x, y, z\}$ halmazon!

51. Legyen A egy háromelemű halmaz; adja meg az összes ekvivalenciarelációt az A halmazon!



2. ábra. Eric Temple Bell (1883-1960), skót matematikus.

A **50**. feladat kapcsán felmerül a kérdés, hogy vajon hány ekvivalenciareláció adható meg egy véges A alaphalmazon. Figyelembe véve, hogy egy ekvivalenciareláció az alaphalmaz elemeinek egy osztályozását (nemüres, páronként diszjunkt részhalmazokra bontását) jelenti és viszont, a kérdés tulajdonképpen az, hogy hány különböző osztályozás lehetséges egy n elemű alaphalmazon. Ezek számát B_n, az ún. *Bell - féle szám* jelöli a szakirodalomban. Kiszámítására érvényes a

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

[2]Egy H halmazon adott (binér) reláción a $H \times H$ Descartes-féle szorzat egy $R \subset H \times H$ részhalmazát értjük. Alkalmazzuk a következő jelölést

$$(x, y) \in R \;\Leftrightarrow\; x \; R \; y.$$

Ekvivalenciareláción a reflexív ($x \; R \; x$), szimmetrikus ($x \; R \; y \;\Rightarrow\; y \; R \; x$) és tranzitív ($x \; R \; y \wedge y \; R \; z \;\Rightarrow\; x \; R \; z$) tulajdonságokkal rendelkező relációkat értjük.

rekurziós formula, ahol $B_0 := 1$ és

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

az ún. *binomiális együttható.*

52. Bizonyítsa be, hogy

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,

b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$,

c) egy n elemű halmaz összes részhalmazainak száma 2^n,

d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,

e) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ (binomiális tétel).

53. A rekurziós formula segítségével állapítsa meg a B_6 Bell-féle szám értékét!

A Bell - féle számokat egy "háromszög" segítségével is generálhatjuk, hasonlóan a binomiális együtthatókhoz. A táblázatot 1 - gyel kezdjük, az új sorok pedig a megelőző sor utolsó számjegyével kezdődnek. A többi számot a tőle balra, illetve a bal oldali szomszéd fölött álló szám összegeként kapjuk:

1					
1	**2**				
2	3	**5**			
5	7	10	**15**		
15	20	27	37	**52**	
52	.	.	.	.	.

54. Tekintsük az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazt és értemezzük a természetes számokból képzett rendezett párok halmazán az

$$(m, n)\ R\ (m', n') \ \Leftrightarrow\ m + n' = m' + n$$

relációt. Bizonyítsa be, hogy ekvivalenciarelációról van szó. Az R reláció osztályait *egész számoknak* nevezzük. A számpárokat a koordinátasíkon ábrázolva, az egyes ekvivalenciaosztályok egymással párhuzamos egyenesek pontjaiként szemléltethetők. Legyen k tetszőleges természetes szám. Bevezetve a

$$-k := (m, m+k) \text{ által reprezentált ekvivalenciaosztály}$$

jelölést, bizonyítsa be, hogy a $-k$ szimbólum jóldefiniált, azaz független az m természetes szám választásától. Egy további kitüntetett szimbólum a

$$0 := (m, m) \text{ által reprezentált ekvivalenciaosztály},$$

ami szintén független az m választásától. A műveletek értelmezése is a reprezentánsok segítségével történik: az (m_1, n_1) és az (m_2, n_2) párok által reprezentált ekvivalencia-osztályok összege, illetve szorzata rendre az

$$(m_1 + m_2, n_1 + n_2) \text{ illetve az } (m_1 m_2 + n_1 n_2, m_1 n_2 + m_2 n_1)$$

elemek által reprezentált ekvivalenciaosztály. Ellenőrizze, hogy mindkét művelet jóldefiniált, azaz független a reprezentánsok választásától.

55. Legyen $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Tekintsük a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ halmazt és értemezzük az

$$(m, n) \; R \; (m', n') \;\Leftrightarrow\; mn' = m'n$$

relációt. Bizonyítsa be, hogy ekvivalenciarelációról van szó. Az R reláció osztályait *racionális számoknak* nevezzük. A számpárokat a koordinátasíkon ábrázolva, az egyes ekvivalenciaosztályok konkurrens (az origóra illeszkedő) egyenesek pontjaiként szemléltethetők. Legyen $k \neq 0$ tetszőleges egész szám. Bevezetve a

$$k^{-1} := (m, mk) \text{ által reprezentált ekvivalenciaosztály}$$

jelölést, bizonyítsa be, hogy a k^{-1} szimbólum jóldefiniált, azaz független az $m \neq 0$ egész szám választásától. A műveletek értelmezése is a reprezentánsok segítségével történik: az (m_1, n_1) és az (m_2, n_2) párok által reprezentált ekvivalenciaosztályok összege, illetve szorzata rendre az

$$(m_1 n_2 + n_1 m_2, n_1 n_2) \text{ illetve az } (m_1 m_2, n_1 n_2)$$

elemek által reprezentált ekvivalenciaosztály. Ellenőrizze, hogy mindkét művelet jóldefiniált, azaz független a reprezentánsok választásától.

3. ábra. Max August Zorn (1906-1993), német matematikus.

56. Legyen X egy halmaz és X részhalmazainak halmazán (hatványhalmaz) vezessük be az

$$A \; R \; B \;\Leftrightarrow\; A \subset B$$

relációt! Igaz-e, hogy

a) R reflexív,

b) R szimmetrikus,

c) R tranzitív,

d) R antiszimmetrikus, azaz $A\ R\ B$ és $B\ R\ A$ maga után vonja, hogy $A = B$?

A **54**. és **55**. feladatok illusztrálják, hogy az ekvivalenciareláció a fogalomalkotás egyik legfontosabb eszköze a modern matematikában. A teljesség kedvéért megemlítünk egy ugyancsak fontos reláció-típust, az ún. *féligrendezést*, melyet a reflexivitás, az antiszimmetria és a tranzitivitás tulajdonságaival definiálunk (ld. **56**. feladat). Ennek – többek között – a halmazelmélet axiomatikus megalapozása során van központi jelentősége (ld. kiválasztási axióma és ekvivalensei: Kuratowski-Zorn lemma).

4. ábra. Kazimierz Kuratowski (1896-1980), lengyel matematikus.

4. Szabadvektorok

57. Legyenek O, A, B, C és D komplanáris pontok és jelölje **a**, **b**, **c** és **d** rendre az (O, A), (O, B), (O, C) és (O, D) reprezentánsú vektorokat. Szerkessze meg az

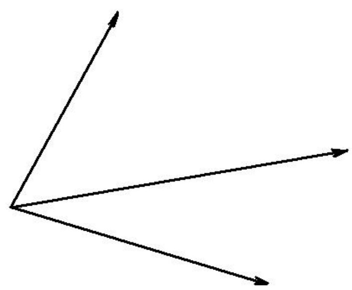
a) $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, $2\mathbf{a}-3\mathbf{b}$, $\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}$ és $\frac{2}{3}\mathbf{a}+\frac{1}{3}\mathbf{b}$,

b) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{a}-2\mathbf{c}+3\mathbf{b}$, $\frac{1}{5}\mathbf{b}+\frac{2}{3}\mathbf{a}-3\mathbf{c}$ és $5\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{c}-\mathbf{b}$,

c) $\mathbf{a}-2\mathbf{b}+3\mathbf{c}+\mathbf{d}$

vektorok egy-egy reprezentánsát!

58. A párhuzamos vetítés technikáját alkalmazva állítsa elő az ábrán reprezentált vektorok mindegyikét a másik kettővel párhuzamos vektorok összegeként!



5. ábra. **58**. feladat.

59. Legyen $ABCD$ egy tetszőleges paralelogramma. Bizonyítsa be[3], hogy

a) $\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}$,

b) $\vec{AC}+\vec{BD}=2\,\vec{AD}$,

c) $\vec{AD}+\vec{AC}=\vec{AB}+2\,\vec{BC}$.

60. Legyen $ABCDEF$ egy szabályos hatszög. Fejezze ki az (A, B), (C, D), (E, F), (A, D), (B, E) és (C, F) reprezentánsú vektorokat a $\vec{BC}$ és az $\vec{ED}$ vektorok segítségével!

[3]Legyen A és B a sík (vagy a tér) két pontja. Az írásmunkát egyszerűsítendő megállapodunk az

$$\vec{AB}: \quad \text{az } (A, B) \text{ reprezentánsú szabadvektor}$$

jelölésben. Világosan kell látnunk azonban, hogy a (szabad)vektorok az irányított szakaszok halmazán értelmezett ekvivalenciareláció osztályai, jóllehet alkalmazása válogatja az *ekvivalencia* kifejezés értelmét. Standard értelemben két irányított szakasz ekvivalens, ha egyenlő hosszúak és az általuk reprezentált félegyenesek egyirányúak (speciálisan bármely két nullszakasz ekvivalens). A szilárdtestfizikában azonban gyakori az erősebb, csak a *közös tartóegyenesű* irányított szakaszokra vonatkozó ekvivalencia.

61. Tekintsük az $ABCD$ négyszög AD, illetve BC oldalainak E, illetve F felezőpontját! Mutassa meg, hogy $\vec{EF}$ az $\vec{AB}$ és a $\vec{DC}$ vektorok összegének a fele.

62. Adottak egy háromszög oldalfelező pontjai; szerkessze meg a háromszöget!

63. Adottak egy ötszög oldalfelező pontjai; szerkessze meg az ötszöget!

64. Adottak egy hétszög oldalfelező pontjai; szerkessze meg a hétszöget!

65. Tükrözze a P pontot a C centrumra és igazolja, hogy az $\vec{OP}$ és az $\vec{OP'}$ helyvektorok összegének a fele a centrum helyvektora.

66. Egy tetszőleges P pontnak az $ABCD$ paralelogramma A csúcsára vonatkozó tükörképe legyen a P_1 pont, ennek a B csúcsra vonatkozó tükörképe a P_2 pont stb. Igazolja, hogy $P_4 = P$ (v.ö. **62.**, **63**. és **64**. feladatok - a $2k$ - szögek esete).

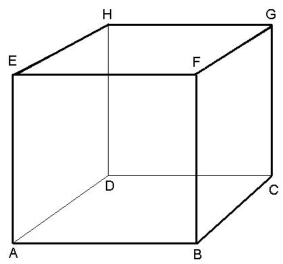
67. Bizonyítsa be, hogy bármely háromszögben a csúcsok helyvektorainak összege egyenlő az oldalfelező pontok helyvektorainak összegével.

68. Adott az ABC háromszög és egy O pont a háromszög síkjában. Igazolja, hogy $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ pontosan akkor zérus ha O egybeesik a háromszög súlypontjával (v.ö. **66**. feladat).

69. Szerkesszen háromszöget, ha adott a három súlyvonal.

70. Fejezze ki a háromszög súlypontjának helyvektorát csúcsai helyvektorainak segítségével.

71. Egy n elemű pontrendszer súlypontjának nevezzük azt az S pontot, melyre nézve a pontok helyvektorainak összege zérus. Bizonyítsa be, hogy ez a pont egyértelműen meghatározott és tetszőleges O kezdőpont rögzítése esetén $\vec{OS}$ éppen a csúcsokhoz tartozó helyvektorok összegének n - ed része.



6. ábra. **72**. feladat.

72. Legyen $ABCDEFGH$ egy kocka. Fejezze ki a (D, A), (D, C), (D, H), (A, H), (B, E) és a (D, F) reprezentánsú vektorokat a $\overrightarrow{BH}$, az $\overrightarrow{FC}$ és a $\overrightarrow{DG}$ vektorok[4] segítségével!

73. A *tetraéder súlyvonalának* nevezzük azokat a szakaszokat, amelyek összekötik a csúcsokat a szemközti lapok súlypontjával. Igazolja, hogy egy tetraéder súlyvonalai közös ponton, a tetraéder *súlypontján* haladnak át, mely a laphoz közelebb negyedeli a súlyvonalakat!

74. Fejezze ki a tetraéder súlypontjának helyvektorát csúcsai helyvektorainak segítségével.

75. Igazolja, hogy a tetraéder szemköztes (kitérő) éleinek felezőpontját összekötő szakaszok egy ponton haladnak át, mely valamennyi szakasznak a felezőpontja!

76. Igazolja, hogy egy paralelepipedon testátlói egy ponton haladnak át, mely valamennyi átlót felezi!

77. Igazolja, hogy

a) ha egy egyenes párhuzamos egy sík valamely egyenesével, akkor párhuzamos magával a síkkal is,

b) ha egy egyenes párhuzamos az S síkkal, akkor az egyenesre illeszkedő bármely további sík vagy párhuzamos S - sel, vagy az egyenessel párhuzamos egyenesben metszi az S síkot,

c) párhuzamos síkok transzverzális síkja a síkokat párhuzamos egyenesekben metszi.

78. Bizonyítsa be, hogy ha a tér a, b és c egyenesei páronként közös síkban vannak, de mindhárman nincsenek ugyanabban a síkban, akkor vagy párhuzamosak, vagy közös pontban metszik egymást.

4.1. Desargues-féle tételek I

79. Legyen $ABC\triangle$ és $A'B'C'\triangle$ a tér két, közös csúcs nélküli háromszöge és tegyük fel, hogy a megfelelő ($A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$) pontok összekötő egyenesei különbözőek és közös D pontban metszik egymást (pontra nézve perspektív háromszögek). Igazolja, hogy

a) ha a megfelelő oldalegyenesek metszők, akkor P, Q és R metszéspontjaik kollineárisak (axiálisan, azaz tengelyre nézve perspektív háromszögek),

b) ha két oldalegyenes párhuzamos a megfelelő oldalegyenesekkel, akkor a harmadik oldalegyenes is párhuzamos a megfelelő oldalegyenessel.

[4] Egy kocka csúcsai által reprezentált vektorok körében egyszerűen tájékozódhatunk például az A csúcsba futó élek által reprezentált vektorok segítségével. Első lépésként fejezzük ki a $\overrightarrow{BH}$, az $\overrightarrow{FC}$ és a $\overrightarrow{DG}$ vektorokat az élvektorok segítségével, majd az így kapott egyenleteket, mint egyenletrendszert oldjuk meg az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{AE}$ ismeretlenekre nézve!

Az állítás első része Desargues-tétel, második része pedig a Desargues-tétel affin alakja néven ismeretes. Az affin alak egy variánsát kis Desargues-tétel néven emlegeti a szakirodalom. A kis Desargues-tételben a megfelelő csúcsokat összekötő egyenesek metszése helyett párhuzamosságot követelnek meg. A Desargues-féle tételekben szereplő ún. záródási tulajdonságok kulcsszerepet játszanak a projektív geometriában. A projektív sík axiómáit figyelembe véve uniformizálhatjuk a Desargues-féle záródási tulajdonságokat, hiszen az egyenesek párhuzamossága (egybeesésüktől eltekintve) kizárt.

7. ábra. Gérard Desargues (1591-1662), francia matematikus, építész, mérnök.

5. Bázis, koordináták, osztóviszony

80. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ bázisra vonatkozóan legyenek a $\mathbf{d}$ vektor koordinátái (α, β, γ); mik az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és a $\mathbf{c}$ vektorok koordinátái a szóban forgó bázisra vonatkozóan? Mik lesznek a $\mathbf{d}$ vektor koordinátái a $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}$, illetve a $-\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok alkotta bázisban?

81. Legyen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ bázis és tekintsük az $(1, -2, 3)$ és a $(-2, 4-6)$ koordinátájú $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ vektorokat. Mutassa meg, hogy ezek a vektorok kollineárisak (közös egyenesen reprezentálhatók) és fogalmazza meg a kollinearitás szükséges és elegendő feltételét a koordináták segítségével.

82. Tudjuk, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és a $\mathbf{c}$ vektorok nem komplanárisak. Komplanárisak-e a $\mathbf{p} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{q} = \mathbf{a} - 3\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ és $\mathbf{r} = 3\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektorok!

83. Legyen $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -7\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$ és $\mathbf{c} = 21\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$. Számítsa ki a $3\mathbf{b} + 2\mathbf{c} - \mathbf{a}$, $-2\mathbf{a} + \frac{4}{7}\mathbf{c} + 3\mathbf{b}$ és $10\mathbf{c} - 5\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$ vektorok koordinátáit az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ bázisra vonatkozóan.

84. Legyen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ bázis. Lineárisan függő vagy független vektorrendszert alkotnak-e a következő vektorok?

a) $\mathbf{p} = -2\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ és $\mathbf{q} = \mathbf{a} + 3\mathbf{b}$,

b) $\mathbf{p} = \mathbf{a} + 4\mathbf{b}$, $\mathbf{q} = 5\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ és $\mathbf{r} = 4\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$,

c) $\mathbf{p} = -3\mathbf{a} + 8\mathbf{b} + 17\mathbf{c}$ és $\mathbf{q} = \mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 4\mathbf{c}$.

85. Legyen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ bázis. Lineárisan függő vagy független vektorrendszert alkotnak-e a következő vektorok?

a) $\mathbf{p} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$, $\mathbf{q} = -5\mathbf{a} + 5\mathbf{c}$ és $\mathbf{r} = 4\mathbf{a} + 4\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$,

b) $\mathbf{p} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{q} = -\mathbf{a} + \mathbf{b} + 5\mathbf{c}$ és $\mathbf{r} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$,

c) $\mathbf{p} = -2\mathbf{a} + \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$, $\mathbf{q} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 5\mathbf{c}$ és $\mathbf{r} = -5\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 14\mathbf{c}$.

Amennyiben a vektorrendszer lineárisan független, határozza meg a

$$\mathbf{d} = 4\mathbf{a} + 7\mathbf{b} - 5\mathbf{c}$$

vektornak a $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ és $\mathbf{r}$ bázisra vonatkozó koordinátáit!

86. Legyen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ tetszőleges bázis. Igazolja, hogy bármely λ valós szám esetén a

$$\mathbf{p} = \lambda\mathbf{a} + (\lambda + 1)\mathbf{b} + (\lambda + 2)\mathbf{c},$$

$$\mathbf{q} = (\lambda + 3)\mathbf{a} + (\lambda + 4)\mathbf{b} + (\lambda + 5)\mathbf{c},$$

$$\mathbf{r} = (\lambda + 6)\mathbf{a} + (\lambda + 7)\mathbf{b} + (\lambda + 8)\mathbf{c}$$

vektorok lineárisan függők!

87. Legyen A és B két különböző pont[5] és tegyük fel, hogy a P pont

a) $1:2$,

b) $2:5$,

c) $m:n$

arányban osztja az AB szakaszt! Mennyi a P pont A és B alappontokra vonatkozó osztóviszonya? Tetszőlegesen rögzített O kezdőpont esetén fejezze ki az $\vec{OA}$, illetve az $\vec{OB}$ vektorokkal az $\vec{OP}$ reprezentánsú vektort!

88. Adjon meg olyan vektort, mely párhuzamos a közös kezdőpontból reprezentált $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által alkotott szög szögfelezőjével.

5.1. A szögfelezőtétel

89. Bizonyítsa be a szögfelező-tételt!

Geometriai feladatok vektoralgebrai megoldásának első lépése az, hogy rögzítjük a tér (vagy a sík) egy O pontját és a pontokat helyvektoraikkal helyettesítjük: $A \leftrightarrow \vec{OA}$. Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ bázis, akkor az A pont helyvektorának

$$\vec{OA} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$$

előállításában szereplő λ, μ, ν a helyvektor koordinátái a rögzített bázisra vonakozóan (definíció szerint). Kapcsolatukat az $\vec{OA}\ (\lambda, \mu, \nu)$ jelölés fejezi ki. Közvetve azonban felfoghatók, az A pont ún. koordinátáinak is, hiszen a pont - helyvektor megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű. Kapcsolatukat az $A(\lambda, \mu, \nu)$ jelölés fejezi ki. Megállapodunk abban is, hogy $A(\lambda, \mu) := A(\lambda, \mu, 0)$. A kezdőpont rögzítését követően egy bázis, mint koordinátarendszer funkcionál (ld. szabad, illetve kötött vektorok) és a problémák mind a vektorkoordináták, mind pedig a pontkoordináták szerepeltetésével megfogalmazhatók. Az egyszerűség kedvéért a feladatok kitűzése során eltekintünk a kezdőpont és a bázis feltüntetésétől.

90. Számítsa ki az AB szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha

$$A(2, 5, -3) \text{ és } B(22, 44, -2).$$

91. Írja fel az AB szakasz harmadolópontjainak koordinátáit, ha

$$A(-7, 8, 2) \text{ és } B(-1, 2, -5)!$$

92. Írja fel az AB szakasz ötödölőpontjainak koordinátáit, ha

$$A(-3, 45, 33) \text{ és } B(9, -15, 4).$$

[5] Megállapodunk abban, hogy az AB szakasz $m:n$ arányú darabolásánál az m súly értéke az A, az n súly értéke pedig a B pontra vonatkozik.

93. Ossza fel az AB szakaszt

a) $6 : 4$,
b) $2 : 11$,
c) $3 : 7$

arányban, ha $A(5, -6, 13)$ és $B(4, -9, -22)$.

94. Bizonyítsa be, hogy

a) a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást!
b) az ABC és az EDF háromszögek súlypontja akkor és csakis akkor esik egybe, ha az (A, D), a (B, E) és a (C, D) reprezentánsú vektorok összege nulla!

95. Az ABC háromszög AB, BC, illetve CA oldalegyenesein vegyük fel a P, Q és az R pontokat úgy, hogy $(PBA) = (QCB) = (RAC)$. Mutassa meg, hogy az ABC és a PQR háromszögek súlypontjai egybeesnek!

96. Tekintsük az $ABCD$ paralelogramma BC oldalának F felezőpontját, az AF és a BD szakaszok metszéspontja pedig legyen M. Határozza meg az (AFM) és a (DBM) osztóviszonyok értékét!

97. Az $A(-2, -1, 2)$ és $B(3, 2, -1)$ pontok által meghatározott szakaszt mindkét végponton túl meghoszszabbítjuk a saját hosszával. Határozza meg a végpontok koordinátáit!

98. Legyen $A(3, -1, 5)$ és $B(2, 1, -3)$. Határozza meg az A pontnak B-re vonatkozó A_1 és a B pontnak A-ra vonatkozó B_1 tükörképét!

99. Legyen $A(6, 4)$, $B(-2, 5)$, $C(-6, -3)$ és $D(1, -8)$. Számítsa ki az $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{BA}$ vektor koordinátáit!

100. Az ABC háromszög csúcsai $A(1, -3)$, $B(3, -5)$ és $C(-5, 7)$. Határozza meg az oldalak felezőpontjainak a koordinátáit!

101. Az $A(1, 3)$ és $B(5, -2)$ pontokat összekötő szakaszt harmadoljuk. Határozza meg az A ponthoz közelebb fekvő harmadolópont koordinátáit!

102. Ossza fel az $A(5, 0)$ és $B(4, 3)$ pontokat összekötő szakaszt 3:4, illetve 4:3 arányban!

103. Milyen arányban osztja a $P(3, 4)$ pont az AB szakaszt, ha $A(5, 6)$ és $B(0, 1)$?

104. Bizonyítsa be, hogy ha O, A és B három nem kollineáris pont, akkor az A és B pontokra illeszkedő egyenes bármely P pontja esetén

$$\vec{OP} = (1 - \mu)\,\vec{OA} + \mu\,\vec{OB},$$

ahol $\mu \in \mathbb{R}$. Milyen további feltétel jellemzi az A kezdőpontú, B - t tartalmazó félegyenes, illetve az AB szakasz pontjainak helyvektorait? Fejezze ki és ábrázolja a μ koordináta értékét az (ABP) osztóviszony függvényében és az osztóviszony értéke alapján döntse el, hogy

a) az AB szakasznak,

b) az A kezdőpontú, B - t tartalmazó félegyenes kiegészítő félegyenesének,

c) a B kezdőpontú, A - t tartalmazó félegyenes kiegészítő félegyenesének

a pontjáról van-e szó?

5.2. Desargues-féle tételek II

105. Igazolja vektoralgebrai eszközökkel a Desargues-féle tételeket (ld **79**. feladat)

6. Trigonometria I

106. Számítsa ki a következő kifejezések pontos értékét:

a) $2\sin 30^\circ + 3\cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$,

b) $3\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ - 2\operatorname{tg} 45^\circ + 2\cos 60^\circ$,

c) $\operatorname{tg}^2 45^\circ - \sin^2 30^\circ - \cos^2 60^\circ$,

d) $\cos^2 30^\circ - \sin^2 45^\circ$,

e) $\dfrac{\sin 60^\circ - \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ + \sin 30^\circ}$.

107. Bizonyítsa be a következő állításokat:

a) $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$,

b) $2(1 + \sin\alpha) \cdot (1 + \cos\alpha) = (1 + \sin\alpha + \cos\alpha)^2$,

c) $\dfrac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha}$,

d) $\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta} = \operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\beta - 1$,

e) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$,

f) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$,

g) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$,

h) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha \cdot \cos\beta$,

i) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$,

j) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\,\alpha \cdot \sin\beta$,

k) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$,

l) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\,\cos\alpha \cdot \cos\beta$,

m) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$,

n) $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$,

o) $\sin\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta) + \cos\alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \cos\beta$,

p) $\cos\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin\beta$,

q) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot \cos\beta$,

r) $\sin^4\alpha - \cos^4\,\alpha = \sin^2\,\alpha - \cos^2\,\alpha$,

s) $\sin 2\alpha = \dfrac{2\,\operatorname{ctg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$,

t) $\cos 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}$.

108. Igaz-e, hogy $\sin 45° = \sin 75° - \sin 15°$?

109. Az egységsugarú körbe írt szabályos tízszög segítségével határozza meg a 18°-os és a 72°-os szögek szögfüggvény-értékeit!

110. Bizonyítsa be, hogy $\cos 36° - \sin 18° = \frac{1}{2}$.

111. Számítsa ki a 15°, 75°, 105°, 135°-os szögek szögfüggvényeit!

112. Bizonyítsa be, hogy $4\sin 54° = 1 + 4\sin 36° \cos 18°$.

113. Fejezze ki $\sin 3\alpha$ és $\cos 3\alpha$ értékét az α szög szinusza és koszinusza segítségével!

114. Ábrázolja a következő függvényeket függvénytranszformáció segítségével!

a) $x \mapsto 1 + \sin 2x$,

b) $x \mapsto 2 + \sin \dfrac{1}{2}x$,

c) $x \mapsto -2 + \sin 4x$,

d) $x \mapsto 3 + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$,

e) $x \mapsto -3 + \sin\left(4x - \dfrac{\pi}{2}\right)$,

f) $x \mapsto 2 - \sin(x + \pi)$,

g) $x \mapsto -1 + \cos 3x$,

h) $x \mapsto 2 + \cos \dfrac{1}{2}x$,

i) $x \mapsto 4 + \cos 4x$,

j) $x \mapsto 3 + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$,

k) $x \mapsto -3 + \cos\left(\dfrac{1}{4}x + \dfrac{\pi}{2}\right)$,

l) $x \mapsto -5 - \cos(x + \pi)$,

m) $x \mapsto 1 + \operatorname{tg} 2x$,

n) $x \mapsto 2 + \operatorname{tg} \dfrac{1}{3}x$,

o) $x \mapsto -2 + \operatorname{tg} x$,

p) $x \mapsto 4 - \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$,

q) $x \mapsto 5 + \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{4}x - \dfrac{\pi}{2}\right)$,

r) $x \mapsto -2 - \operatorname{tg}(x + \pi)$,

s) $x \mapsto 1 + \operatorname{ctg} 2x$,

t) $x \mapsto 2 + \operatorname{ctg} \frac{1}{2}x$,

u) $x \mapsto -3 + \operatorname{ctg} x$,

v) $x \mapsto -1 + \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,

w) $x \mapsto \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{4}x - \frac{\pi}{2}\right)$,

x) $x \mapsto 2 - \operatorname{ctg}(x + \pi)$,

y) $x \mapsto |\sin x| + 1$,

z) $x \mapsto |\cos x - 1|$.

115. Bizonyítsa be, hogy az arcsin és az arctg páratlan függvények!

116. Bizonyítsa be, hogy

a) $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$,

b) $\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg}(-x) = \pi$.

117. Bizonyítsa be, hogy

a) $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$,

b) $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$.

118. Ábrázolja a trigonometrikus függvények inverzeit!

119. Bizonyítsa be, hogy

a) $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

b) $\arccos x = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

c) $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

d) $\operatorname{arcctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

6.1. Csebisev - polinomok

120. Legyen bármely n természetes szám esetén

$$\cos(n \arccos x) = T_n(x),$$

ahol $-1 \le x \le 1$. Igazolja, hogy $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ és

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

bármely $n \ge 2$ természetes szám esetén.

8. ábra. Pafnutyij Lvovics Csebisev (1821-1894) orosz matematikus.

121. A rekurziós formula segítségével igazolja, hogy $T_n(x)$ n - edfokú polinomja x - nek és határozza meg a $T_5(x)$ Csebisev - polinomot!

122. Bizonyítsa be, hogy a $T_n(x)$ polinomnak pontosan n gyöke van a $[-1, 1]$ intervallumon.

123. Bizonyítsa be, hogy a $T_n(x)$ polinomnak pontosan $n + 1$ valós extrémális pontja van a $[-1, 1]$ intervallumon, azaz

$$T_n(x_l) = (-1)^l \quad (l = 0, 1, \ldots, n).$$

6.2. Komplex számok

124. Felhasználva az $\mathbf{i}^2 = -1$ azonosságot, számítsa ki a $(1 + 2\mathbf{i})(3 - \mathbf{i})$ szorzat értékét.

a) Igazolja, hogy $(1 + 2\mathbf{i})(1 - 2\mathbf{i}) = 5$ és végezze el az $\dfrac{3 - \mathbf{i}}{1 + 2\mathbf{i}}$,,osztást" a

$$\frac{3 - \mathbf{i}}{1 + 2\mathbf{i}} = \frac{3 - \mathbf{i}}{1 + 2\mathbf{i}} \cdot \frac{1 - 2\mathbf{i}}{1 - 2\mathbf{i}}$$

bővítés segítségével.

b) A trigonometrikus függvényekre vonatkozó addíciós tételek segítségével igazolja, hogy

$$(\cos x + \mathbf{i} \sin x)^n = \cos(n \cdot x) + \mathbf{i} \sin(n \cdot x).$$

c) Bizonyítsa be az $x = n \arccos x$ és $x = -n \arccos x$ helyettesítések segítségével, hogy

$$T_n(x) = \frac{(x + \mathbf{i}\sqrt{1 - x^2})^n + (x - \mathbf{i}\sqrt{1 - x^2})^n}{2}.$$

7. Trigonometria II

125. Oldja meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\sin x = \dfrac{1}{2}$,

b) $\sin x + 0,66 = 0$,

c) $\cos x + 0,95 = 0$,

d) $7 \sin x = 3$,

e) $2 \cos x = \sqrt{2}$,

f) $\operatorname{tg} x = 1$,

g) $\operatorname{tg} x = -1$,

h) $\operatorname{ctg} x = 1$

i) $\operatorname{ctg} x = -1$

j) $\sin 2x = -\dfrac{1}{2}$,

k) $\cos 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

l) $\sin 5x = \sin x$,

m) $\sin 4x = \sin \dfrac{x}{2}$,

n) $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} x$,

o) $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$,

p) $2 \sin\ x = \operatorname{tg} x$,

q) $\sin x \cdot \cos x = \dfrac{1}{2}$,

r) $\sin x \cdot \cos x \cdot \operatorname{ctg} x = 0$,

s) $\sin x - \cos x = 0$,

t) $\sin x + \cos x = 0$.

126. Oldja meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $3 \sin x = 4 \cos x$,

b) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$,

c) $4 \sin^2\ x + 2 \sin x - 1 = 0$,

d) $4 \cos^2 2x - 8 \cos 2x - 5 = 0$,

e) $\cos^2 x - \cos x = \sin^2 x$,

f) $\cos x - \sin^2 x = -\frac{2}{5}$,

g) $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$,

h) $\operatorname{tg}^2 x - 5 = \dfrac{1}{\cos x}$,

i) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$,

j) $\sin 4x + \sin 2x = 0$,

k) $\sin x + \cos x = \sin(2x) + \dfrac{1}{2}$,

l) $\cos 2x + \cos x + 1 = \sin x + \sin 2x$,

m) $\cos 5x \cdot \sin(\frac{\pi}{10} + x) - 1 = 0$,

n) $\sin(7x + \frac{\pi}{3}) = \cos(5x + \frac{\pi}{12})$,

o) $\cos 3x - \sin 3x = 0$,

p) $\cos x + \sin x = 1$,

q) $\sin 5x - \cos 5x = 1$,

r) $\sin nx - \cos nx = 0$, ahol n rögzített természetes szám,

s) $\cos x = \sin nx$, ahol n rögzített természetes szám,

t) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 3$,

u) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$,

v) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$,

w) $\sin 3x \cos(\frac{\pi}{3} - 4x) + 1 = 0$,

x) $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$,

y) $\cos^n x - \sin^n x = 1$, ahol n rögzített természetes szám,

z) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$.

127. Igazolja, hogy a

$$\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)\sin 4x = 2$$

egyenletnek nincs gyöke a valós számok halmazán!

128. Milyen r valós paraméter mellett van megoldása a

a) $(r-1)\sin x + 2\sqrt{2}\cos x = r$,

b) $\sin^6 x + \cos^6 x + r(\sin^4 x + \cos^4 x) = 0$

trigonometrikus egyenletnek?

129. Az m valós paraméter értékétől függően, hány megoldása van a

$$\cos 2x = m(\cos x - \sin x)$$

trigonometrikus egyenletnek a $[0, 2\pi]$ intervallumon?

130. Oldja meg a

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\left(3x - \sqrt{9x^2 - 16x - 80}\right)\right) = 1$$

egyenletet az egész számok halmazán!

131. Oldja meg a
$$\pi \sin x = \left|x - \frac{\pi}{4}\right| - \left|x - \frac{3\pi}{4}\right|$$
egyenletet a valós számok halmazán!

132. Oldja meg az
$$125 \cdot 5^{|4\sin^2 x - 1|} = 25^{2\cos^2 x}$$
egyenletet a valós számok halmazán!

133. Oldja meg az

a) $16x^2 - 8x\cos y + 1 = 0$,

b) $x^2 + 2x\sin(xy) + 1 = 0$,

c) $(\sin(x-y)+1)(2\cos(2x-y)+1) = 6$

egyenleteket a valós számpárok halmazán!

134. Oldja meg a következő trigonometrikus egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

a) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$,

b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{2}$,

c) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$,

d) $\cos^2 x - \cos x - 2 < 0$,

e) $\sin x + \sqrt{3}\cos x > 1$,

f) $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 \geqq 0$,

g) $4\sin^2 x + 4\cos x - 1 > 0$,

h) $2\cos^2 2x < 1$,

i) $\sqrt{3}\sin x + \cos x < 1$,

j) $5\sin^2 x + \sin^2 2x > 4\cos 2x$,

k) $|\sin x| < |\cos x|$.

135. Oldja meg a következő egyenletrendszereket:

a) $\left.\begin{array}{rcl} \sin x + \cos y &=& 0 \\ \sin x \cdot \sin y &=& -\frac{1}{2} \end{array}\right\}$,

b) $\left.\begin{array}{rcl} \cos^2 x - \sin y &=& 1 \\ \cos^2 x + \sin y &=& 1 \end{array}\right\}$,

c) $\left.\begin{array}{rcl} \sin^2 x - \cos y &=& 1 \\ \sin^2 x + \cos y &=& 0 \end{array}\right\}$,

d) $\left.\begin{array}{rcl} x + y &=& 2\pi/3 \\ \sin x + \sin y - 1,5 &=& 0 \end{array}\right\}$,

e) $\left.\begin{array}{lcl} \cos x \cdot \sin y & = & 0 \\ (\cos x + \sin^2 x) \cos^2 y & = & 1/2 \end{array}\right\},$

f) $\left.\begin{array}{lcl} \sin x + \cos y & = & 0 \\ \sin x \cdot \sin y & = & 0 \end{array}\right\},$

g) $\left.\begin{array}{lcl} x - y & = & \pi/3 \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y & = & \sqrt{3} \end{array}\right\},$

h) $\left.\begin{array}{lcl} \sin x + \sin y & = & 7/12 \\ \sin x \cdot \sin y & = & 1/12 \end{array}\right\},$

i) $\left.\begin{array}{lcl} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y & = & 2\sqrt{3} \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y & = & 3 \end{array}\right\},$

j) $\left.\begin{array}{lcl} \sin x \cdot \cos y & = & 3/4 \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y & = & 3 \end{array}\right\}.$

8. Skaláris szorzat

136. Igazolja, hogy $|\mathbf{ab}| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$ (Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség)! Milyen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorokra teljesül, hogy $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$?

137. Milyen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorokra teljesül, hogy

a) $\mathbf{ab} > 0$,

b) $\mathbf{ab} < 0$,

c) $\mathbf{ab} = 0$?

138. Végezze el a $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})\mathbf{c}$ skaláris szorzást!

139. Végezze el a $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})(2\mathbf{c} - \mathbf{d})$ skaláris szorzást!

140. Végezze el a $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c})(2\mathbf{d} - \mathbf{e} + 6\mathbf{f})$ skaláris szorzást!

141. Számítsa ki az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzatát, ha

a) $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 3$ és $\alpha = 60°$,

b) $|\mathbf{a}| = 10$, $|\mathbf{b}| = 2$ és $\alpha = 180°$,

c) $|\mathbf{a}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{b}| = 5$ és $\alpha = \frac{3}{4}\pi$,

d) $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 10$ és $\mathbf{a} \,||\, \mathbf{b}$.

142. Számítsa ki az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszögét, ha

a) $\mathbf{ab} = 12$, $|\mathbf{a}| = 8$ és $|\mathbf{b}| = 20$,

b) $\mathbf{ab} = -1$, $|\mathbf{a}| = 2$ és $|\mathbf{b}| = \frac{1}{2}$,

c) $\mathbf{ab} = -20$, $|\mathbf{a}| = 12$ és $|\mathbf{b}| = 10$,

d) $\mathbf{ab} = \sqrt{3}$, $|\mathbf{a}| = 2$ és $|\mathbf{b}| = \frac{1}{4}$,

e) $\mathbf{ab} = 15$, $|\mathbf{a}| = 5$ és $|\mathbf{b}| = 3$.

143. Számítsa ki az $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ és $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ vektorok skaláris szorzatát, hosszát, hajlásszögét és az

a) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b})$,

b) $(\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b})$,

c) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$,

d) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$

szorzatok értékét.

144. Legyen $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$ és $\alpha = \frac{\pi}{3}$; hogyan kell a λ paraméter értékét megválasztani ahhoz, hogy a $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}$ és a $\mathbf{d} = \mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra?

145. Igazolja, hogy két nemzérus vektor összegének a hossza akkor és csak akkor egyenlő a vektorok hosszának összegével, ha a vektorok egymás pozitív skalárszorosai!

146. Számítsa ki az összeg és a különbségvektor hosszát, ha $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 5$ és $\alpha = \dfrac{2}{3}\pi$!

147. Az ABC szabályos háromszöget alapul véve, legyen $\mathbf{a} = \vec{BC}, \mathbf{b} = \vec{CA}$ és $\mathbf{c} = \vec{AB}$. Határozza meg az $\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca}$ értékét!

148. Legyenek $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ egymásra merőleges egységvektorok. Határozza meg $\mathbf{ab}$ értékét, ha

a) $\mathbf{a}(7, 2)$ és $\mathbf{b}(-5, 1)$,
b) $\mathbf{a}(-2, -18)$ és $\mathbf{b}(92, 10)$,
c) $\mathbf{a}(9, -11)$ és $\mathbf{b}(7, 18)$.

149. Legyen $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ egymásra páronként merőleges egységvektorokból álló bázis. Határozza meg $\mathbf{ab}$ értékét, ha

a) $\mathbf{a}(7, 2, 0)$ és $\mathbf{b}(-5, 1, 0)$,
b) $\mathbf{a}(-2, -18, 0)$ és $\mathbf{b}(92, 10, 0)$,
c) $\mathbf{a}(9, -11, 0)$ és $\mathbf{b}(7, 18, 0)$,
d) $\mathbf{a}(1, 2, 5)$ és $\mathbf{b}(-1, 3, -7)$,
e) $\mathbf{a}(0, 2, 3)$ és $\mathbf{b}(-2, 1, 3)$,
f) $\mathbf{a}(2, 3, 4)$ és $\mathbf{b}(5, 7, -1)$,
g) $\mathbf{a}(12, 25, -9)$ és $\mathbf{b}(-11, 29, -33)$,
h) $\mathbf{a}(112, 25, 0)$ és $\mathbf{b}(1, -2, 98)$,
i) $\mathbf{a}(32, -8, 16)$ és $\mathbf{b}(-2, 0, 5)$,
j) $\mathbf{a}(13, -4, 19)$ és $\mathbf{b}(-1, -2, -3)$,

150. Végezze el az $(\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c})(3\mathbf{a} + 10\mathbf{b} - 7\mathbf{c})$ műveleteket!

151. Legyen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ bázis, ahol

$$|\mathbf{a}| = 1,\ |\mathbf{b}| = 2,\ |\mathbf{c}| = 3;$$

az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szöge 30° - os, a $\mathbf{c}$ vektor pedig 60° - os szöget zár be az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok síkjával.

a) Határozza meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$, illetve a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok szögét!
b) Legyen $\mathbf{e}(1, 2, 5)$ és $\mathbf{f}(-1, 3, -7)$, azaz

$$\mathbf{e} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 5\mathbf{c}, \quad \mathbf{f} = -\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 7\mathbf{c}.$$

Számítsa ki $\mathbf{ef}$ értékét, az $\mathbf{e}$ és az $\mathbf{f}$ vektor hosszát, továbbá határozza meg a vektorok szögét!

152. Legyen
$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$
ahol $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ egymásra páronként merőleges egységvektorokból álló bázis. Számítsa ki $\mathbf{ef}$ értékét, az $\mathbf{e}$ és az $\mathbf{f}$ vektor hosszát, továbbá határozza meg a vektorok szögét, ha
$$\mathbf{e} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 5\mathbf{c}, \quad \mathbf{f} = -\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 7\mathbf{c}.$$

153. Mekkora szöget zárnak be egymással az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok, ha

a) $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ és $\mathbf{v} = 12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$,

b) $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} - 11\mathbf{j}$ és $\mathbf{v} = 8\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$,

c) $\mathbf{u} = 23\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ és $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 21\mathbf{j}$,

d) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ és $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$,

e) $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ és $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$,

f) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ és $\mathbf{v} = 14\mathbf{i} - 24\mathbf{j} - 13\mathbf{k}$,

g) $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ és $\mathbf{v} = 9\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$

az egymásra páronként merőleges egységvektorokból álló $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ bázisra vonatkozóan[6].

154. Mekkorák az ABC háromszög szögei és oldalai, ha csúcsainak koordinátái $A(-4, 1)$, $B(1, 3)$, $C(0, -2)$?

155. Adja meg az alábbi vektorokkal egyirányú egységvektorok koordinátáit:

a) $\mathbf{a}(-5, 12)$,

b) $\mathbf{b}(1, 0)$,

c) $\mathbf{c}(-1, 8, 4)$,

d) $\mathbf{d}(6, 2, -1)$,

e) $\mathbf{e}(7, -2, 11)$,

f) $\mathbf{f}(9, 32, 20)$,

g) $\mathbf{g}(1, -5)$,

h) $\mathbf{h}(4, -9, 5)$,

i) $\mathbf{i}(32, 144, -96)$,

j) $\mathbf{j}(-92, 520, 24)$.

156. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}(-3, 4)$ és a $\mathbf{b}(1, \mu)$ vektorok merőlegesek egymásra. Mekkora a μ értéke?

[6] A továbbiakban, hacsak mást nem mondunk, a vektorok koordinátáit ilyen bázisra vonatkozóan értjük, megállapodva abban, hogy
$$\mathbf{a}(\lambda, \mu) := \mathbf{a}(\lambda, \mu, 0).$$

157. Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két nemzérus vektor. Mekkora szöget zárnak be egymással, ha az $\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ vektor merőleges a $7\mathbf{a}-5\mathbf{b}$ vektorra és az $\mathbf{a}-4\mathbf{b}$ vektor merőleges a $7\mathbf{a}-2\mathbf{b}$ vektorra.

158. Határozza meg az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ egységvektorok szögét, ha tudjuk, hogy az $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ vektor merőleges az $5\mathbf{a}-4\mathbf{b}$ vektorra!

159. Állítsa elő az $\mathbf{a}=\mathbf{i}+4\mathbf{j}+8\mathbf{k}$ vektort a $\mathbf{b}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ vektorral párhuzamos, illetve $\mathbf{b}$ - re merőleges vektorok összegeként!

160. Számítsa ki az $\mathbf{a}(1,4,8)$ vektor $\mathbf{b}(1,-2,3)$ vektorra merőleges komponensét!

161. Adottak az $\mathbf{a}(1,0,-1)$ és a $\mathbf{b}(1,1,-1)$ vektorok. Tudjuk, hogy a $\mathbf{c}$ vektor hossza 1 egység, az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által bezárt szög $45°$, valamint a $\mathbf{b}$ és a $\mathbf{c}$ vektorok által közbe zárt szög koszinusza $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Számítsa ki a $\mathbf{c}$ vektor koordinátáit!

162. Igazolja, hogy

a) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2+(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2=2|\mathbf{a}|^2+2|\mathbf{b}|^2$,

b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2-(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2=4\mathbf{a}\mathbf{b}$,

c) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})=|\mathbf{a}|^2-|\mathbf{b}|^2$.

Mi a levezetett összefüggések geometriai jelentése?

163. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{a}$ akkor és csak akkor merőleges $\mathbf{b}$-re, ha $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2$!

9. Vektoriális és vegyes szorzat

164. Igazolja, hogy párhuzamos vektorok vektoriális szorzata a nullvektor!

165. Igazolja, hogy ha $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ és $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, akkor $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ a vektorok által kifeszített paralelogramma területével egyenlő!

166. Fejezze ki az $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-2\mathbf{b})$ vektort az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzata segítségével!

167. Határozza meg a $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ és a $\mathbf{a}-3\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét, ha tudjuk, hogy $|\mathbf{a}|=5$, $|\mathbf{b}|=3$ és $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

168. Fejezze ki az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területének segítségével a $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ és a $4\mathbf{a}-2\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét!

169. Az ABC háromszögben $AB=10$ cm, $BC=7$ cm, $CA=5$ cm. Számítsa ki az $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}$ vektor hosszát!

170. Legyen $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ jobbsodrású alaprendszer a térben, $\mathbf{a}(a_1,a_2,a_3)$ és $\mathbf{b}(b_1,b_2,b_3)$. Igazolja, hogy

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k}.$$

171. Legyen $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ jobbsodrású alaprendszer a térben. Határozza meg az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ vektort, ha

a) $\mathbf{a}(1,2,1)$ és $\mathbf{b}(2,3,-2)$,

b) $\mathbf{a}(2,0,1)$ és $\mathbf{b}(0,0,1)$,

c) $\mathbf{a}(5,7,-3)$ és $\mathbf{b}(-1,-2,5)$,

d) $\mathbf{a}(2,-23,-34)$ és $\mathbf{b}(-11,35,-5)$,

e) $\mathbf{a}(-4,24,-13)$ és $\mathbf{b}(-15,-21,9)$.

Mennyi az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ vektor hossza az egyes esetekben?

172. Legyen $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ jobbsodrású alaprendszer a térben. Határozza meg az $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ vektort, ha

a) $\mathbf{a}(3,8,-2)$, $\mathbf{b}(5,9,6)$ és $\mathbf{c}(4,0,-1)$,

b) $\mathbf{a}(2,-8,-3)$, $\mathbf{b}(-7,10,0)$ és $\mathbf{c}(-5,1,1)$,

c) $\mathbf{a}(0,1,-6)$, $\mathbf{b}(-5,4,3)$ és $\mathbf{c}(2,0,-2)$,

d) $\mathbf{a}(10,-2,6)$, $\mathbf{b}(9,-5,1)$ és $\mathbf{c}(1,0,2)$,

e) $\mathbf{a}(5,-9,-1)$, $\mathbf{b}(4,6,-7)$ és $\mathbf{c}(-3,10,1)$!

173. Számítsa ki az $ABCD$ paralelogramma területét, ha

a) $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$ és $C(1,1,1)$,

b) $A(1,2,3)$, $B(2,-1,3)$ és $C(5,-2,-3)$,

c) $A(4,-7,8)$, $B(3,-4,0)$ és $C(1,2,1)$,

d) $A(-12,30,24)$, $B(21,46,34)$ és $C(11,15,33)$,

e) $A(43,12,75)$, $B(12,14,76)$ és $C(1,10,41)$!

174. Legyen $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ jobbsodrású alaprendszer a térben. Számítsa ki $\mathbf{abc}$ értékét, ha

a) $\mathbf{a}(0,1,-1)$, $\mathbf{b}(1,1,1)$ és $\mathbf{c}(1,2,3)$,

b) $\mathbf{a}(1,2,3)$, $\mathbf{b}(-1,2,-5)$ és $\mathbf{c}(5,7,2)$,

c) $\mathbf{a}(23,-20,22)$, $\mathbf{b}(9,54,-14)$ és $\mathbf{c}(-70,32,25)$,

d) $\mathbf{a}(11,0,-3)$, $\mathbf{b}(-4,-2,-7)$ és $\mathbf{c}(1,3,9)$,

e) $\mathbf{a}(-1,4,-4)$, $\mathbf{b}(-2,-4,-5)$ és $\mathbf{c}(0,-2,1)$!

175. Határozza meg a paralelepipedon átlóinak a hosszát, ha ismerjük az egy csúcsból kiinduló oldalainak a hosszát és ezek hajlásszögét!

176. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és a $\mathbf{c}$ vektorok milyen helyzeténél lesz az általuk kifeszített paralelepipedon térfogata maximális?

177. Legyen $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}$, és $\mathbf{c} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$; határozza meg a vektorok skaláris, vektoriális és vegyes szorzatát az összes lehetséges módon!

a) Az elvégzett számítások alapján döntse el, hogy komplanárisak-e a szóban forgó vektorok!

b) Határozza meg a vektorok által kifeszített paralelepipedon éleinek hosszát, ezek hajlásszögét, a paralelepipedon felszínét és térfogatát!

178. Számítsa ki a paralelepipedon térfogatát, ha OA, OB, OC egy csúcsból induló élei és $\vec{OA}$ $(2,-1,3)$, $\vec{OB}$ $(0,-2,-1)$ és $\vec{OC}$ $(3;2;1)$!

179. Mennyi az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata? Döntse el, hogy jobb- vagy balrendszert alkotnak-e az

a) $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + \mathbf{k}$,

b) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 11\mathbf{i} - \mathbf{j} + 10\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$,

c) $\mathbf{a} = -35\mathbf{i} + 27\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -8\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 46\mathbf{i} - 25\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$!

vektorok.

180. Lineárisan függő vagy független vektorrendszert alkotnak a következő vektorok:

a) $\mathbf{a}(3,2,4)$, $\mathbf{b}(1,1,1)$ és $\mathbf{c}(5,2,3)$,

b) $\mathbf{a}(1,4,1)$, $\mathbf{b}(0,4,2)$ és $\mathbf{c}(1,3,1)$,

c) $\mathbf{a}(4,-5,2)$, $\mathbf{b}(6,-7,4)$ és $\mathbf{c}(2,-3,0)$,

d) $\mathbf{a}(3,1,1)$, $\mathbf{b}(2,1,3)$ és $\mathbf{c}(1,1,1)$,

e) $\mathbf{a}(0,2,-4)$, $\mathbf{b}(1,1,1)$ és $\mathbf{c}(1,2,3)$,

f) $\mathbf{a}(11,-13,2)$, $\mathbf{b}(3,-1,2)$ és $\mathbf{c}(-1,5,2)$,

g) $\mathbf{a}(8,-4,2)$, $\mathbf{b}(3,-5,-10)$ és $\mathbf{c}(10,-12,-19)$,

h) $\mathbf{a}(1,2,-3)$, $\mathbf{b}(-4,1,-5)$ és $\mathbf{c}(6,-2,1)$.

181. Legyen $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ jobbsodrású alaprendszer a térben. Döntse el, hogy egy síkban reprezentálhatók-e az

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \quad \text{és} \quad \mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k},$$

illetve

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \quad \text{és} \quad \mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

vektorok!

182. Bizonyítsa be a következő azonosságokat:

a) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + (\mathbf{ab})^2 = |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2$,

b) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{ac} \cdot \mathbf{bd} - \mathbf{ad} \cdot \mathbf{bc}$,

c) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{abd})\mathbf{c} - (\mathbf{abc})\mathbf{d}$,

d) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,(\mathbf{b} \times \mathbf{c})\,(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{abc})^2$,

e) Jacobi azonosság: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = 0$.

9. ábra. Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) porosz matematikus, fizikus, csillagász.

183. Legyen $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ jobbsodrású alaprendszer a térben és tekintsük az $\vec{OA}\ (4,3,0)$, $\vec{OB}\ (2,1,2)$ és $\vec{OC}\ (-3,-2,5)$ vektorok által kifeszített paralelepipedont!

a) Mekkora a paralelepipedon térfogata?

b) Határozza meg az OAB alaphoz tartozó magasságot!

c) Számítsa ki a paralelepipedon él - és lapszögeit!

10. ábra. William Rowan Hamilton (1805-1865) ír matematikus, fizikus, csillagász.

9.1. Kvaterniók

184. Felhasználva az

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1,\ \mathbf{ij} = \mathbf{k},\ \mathbf{jk} = \mathbf{i},\ \mathbf{ki} = \mathbf{j}\ \text{ és }\ \mathbf{ji} = -\mathbf{k},\ \mathbf{kj} = -\mathbf{i},\ \mathbf{ik} = -\mathbf{j}$$

azonosságokat, számítsa ki a $(1 - 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k})(3 - \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$ szorzat értékét. Igazolja, hogy $(1 - 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k})(1 + 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}) = 15$ és végezze el az

$$\frac{3 - \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}}{1 - 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}}$$

„osztást" a

$$\frac{3 - \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}}{1 - 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}} \cdot \frac{1 + 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}}{1 + 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}}$$

bővítés segítségével.

10. Koordinátageometria a síkon

185. Legyen O, P és Q három nemkollineáris pont; szerkessze meg annak az O kezdőpontú affin koordinátarendszernek a tengelypontjait, melyre $P(1,2)$ és $Q(3,5)$.

A továbbiakban, hacsak mást nem mondunk, a megadott koordináták egy Descartes - féle koordinátarendszerre vonatkozóan értendők.

186. Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái $A(-2,0), B(4,-4)$ és $C(1,5)$. Számítsa ki a háromszög kerületét és területét!

187. Mekkora annak a háromszögnek a kerülete és területe, melynek csúcsai $A(3,4)$, $B(-1,2)$ és $C(8,-3)$.

188. Egy ötszög csúcsai $A(8,2)$, $B(2,7)$, $C(-4,9)$, $D(-7,-5)$ és $E(3,-3)$. Számítsa ki az ötszög kerületét, valamint a

$$\vec{BA} + \vec{AC} - 2\,\vec{CE} - \frac{2}{3}\,\vec{ED}$$

vektor koordinátáit!

189. Igazolja, hogy az $A(1,1)$, $B(2,3)$ és $C(5,-1)$ pontok által meghatározott háromszög derékszögű.

190. Ábrázolja a koordinátasíkon az

a) $|x| + |y| = 3$,

b) $2|x| + 3|y| = 12$

egyenletű ponthalmazokat!

191. Alapul véve egy Descartes - féle koordinátarendszert a síkon, töltse ki a táblázat hiányzó adatait.

P	Q	$\mathbf{v}$	$\mathbf{n}$	m	b	$Ax + By + C = 0$
$(9,6)$	$(4,3)$					
$(3,1)$	$(1,0)$					
$(1,2)$		$\mathbf{i} - \mathbf{j}$				
	$(1,6)$		$\mathbf{i} + \mathbf{j}$			
	$(4,1)$			-1		
		$3\mathbf{i}+2\mathbf{j}$			3	
						$3x + 4y - 1 = 0$
$(-2,5)$			$2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$			
$(-1,3)$		$3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$				
$(-4,1)$			$4\mathbf{i} + \mathbf{j}$			
	$(3,-2)$					$Ax + 5y - 2 = 0$

192. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, melynek normálvektora $\mathbf{n}(4,-5)$ és áthalad az $A(11,-3)$ és $B(5,9)$ pontok felezőpontján.

193. Adja meg annak az egyenesnek az egyenletét, mely illeszkedik a $P(-6, 1)$ pontra és párhuzamos az x tengellyel.

194. Írja fel a $P(5, -2)$ ponton átmenő, a $Q(3, 8)$ és $R(-4, 7)$ pontokat összekötő egyenesre merőleges egyenes egyenletét!

195. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, mely illeszkedik a $P(-4, 1)$ pontra és párhuzamos a $2x + 3y = -4$ egyenletű egyenessel.

196. Töltse ki a táblázat hiányzó adatait és állapítsa meg, hogy a paraméterek mely értékeinél van megoldása a feladatnak!

P	Q	$\mathbf{v}$	$\mathbf{n}$	m	b	$Ax + By + C = 0$
(x_1, y_1)	$(4, -1)$					
(x_1, y_1)	(x_2, y_2)					
(x_1, y_1)		$3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$				
(x_1, y_1)		$v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$				
(x_1, y_1)			$4\mathbf{i} + \mathbf{j}$			
(x_1, y_1)			$n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j}$			
(x_1, y_1)				$-3/2$		
(x_1, y_1)					5	
						$Ax + By + C = 0$

197. Kollineárisak-e a

a) $(3, 8)$, $(5, 4)$ és $(6; 2)$,

b) $(-2, -8)$, $(1, -7)$ és $(10, -4)$,

c) $(12, -30)$, $(-5, 43)$ és $(2, -5)$.

ponthármasok?

198. Határozza meg a következő egyenesek kölcsönös helyzetét és közös pontját (ha van)!

a) $x + 5y = 35$ és $3x + 2y = 27$,

b) $2x - 4y = -3$ és $x - 2y = 0$,

c) $3x + 5y = 4$ és $6x + 10y - 8 = 0$,

d) $y + 3 = 0$ és $5y - 7 = 0$,

e) $2x - 1 = 0$ és $x + 3 = 0$,

f) $2x - 3y = 0$ és $3x + y = 2$.

199. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $x - 3y - 6 = 0$ és a $4x + y = 0$ egyenesek metszéspontján és irányvektora $\mathbf{v}(1, -3)$.

200. Van-e közös pontja az

a) $3x - y = 1$, $2x - y = -3$ és $x - y = -7$,

b) $4x - 2y = 13$, $3x - 8x = 11$ és $-7x + y = 10$,

c) $5x - 3y = 15$, $x + 5y = 3$ és $3x + y = -5$,

d) $x - 3y = -1$, $7x - 5y = 41$ és $2x + 17y = 67$

egyeneseknek?

201. Egy háromszög oldalegyeneseinek egyenlete $5x-3y = 1$, $5x+y = 13$ és $15x-y = 67$. Számítsa ki a háromszög kerületét és területét!

202. Határozza meg a értékét úgy, hogy az

$$(3a + 2)x + (1 - 4a)y + 8 = 0\,,\ (5a - 2)x + (a + 4)y - 7 = 0.$$

egyenesek merőlegesek legyenek egymásra!

203. Határozza meg annak a háromszögnek a területét, melyet a $3x - 4y = 12$ egyenes a koordináta-tengelyekkel bezár!

204. Határozza meg azon pontok mértani helyét, amelyek a $3x - y = 7$ és $3x - y = -3$ egyenesektől egyenlő távolságra vannak!

205. Milyen messze van

a) az $(1, 2)$ pont az $y = -2x + 2$ egyenestől,

b) a $(4, -2)$ pont a $8x - 15y - 11 = 0$ egyenestől,

c) a $(2, -6)$ pont a $(7, 3)$ és $(5, 4)$ pontokon áthaladó egyenestől?

206. Egy háromszög oldalegyeneseinek az egyenlete:

$$5x + 2y - 29 = 0,\ 9x - y - 43 = 0,\ 14x + y - 49 = 0.$$

Milyen messze van a háromszög súlypontja a háromszög oldalaitól?

207. Számítsa ki a

a) $3x - y = 6$ és $3x - y = 8$,

b) $x + 2y + 5 = 0$ és $x + 2y - 3 = 0$,

c) $x - 2y = 5$ és $-\dfrac{3}{2}x + 3y = -7$

egyenesek távolságát!

208. Milyen helyzetűek az $x^2 + y^2 = 36$ körhöz viszonyítva az

a) $3x - 4y = -30$,

b) $x - 2y = -5$,

c) $x + y = 17$,

d) $-3x + 2y = 10$.

egyenesek?

209. Milyen hosszúságú húrt vág ki az $y = 2x + 1$ egyenletű egyenesből az $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ egyenletű kör?

210. Az abcissza tengelyen határozza meg azt a P pontot, amely az $A(2, -3)$ ponttól 5 egység távolságra van!

211. Az $(x-5)^2+(y-12)^2 = 169$ egyenletű körhöz a $P(10, 24)$ pontjában érintőt húzunk. Írja fel az érintő egyenletét!

212. Írja fel az $x^2 + y^2 = 5$ kör $P(1, -2)$ pontjához tartozó érintő egyenletét!

213. Írja fel az $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ kör $P(5, 5)$ pontjához tartozó érintő egyenletét!

214. Írja fel a $P(8, 4)$ pontból az $x^2 + y^2 = 8$ körhöz húzható érintők egyenletét!

215. Írja fel az origóból az $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 2$ körhöz húzható érintők egyenletét!

216. Határozza meg az $A(1, 2)$, $B(4, 0)$ és a $C(3, 4)$ csúcspontokkal rendelkező háromszög

a) oldalainak hosszát és szögeinek nagyságát,

b) súlypontjának, magasságpontjának és a körülírt kör középpontjának a koordinátáit – ld. Euler - féle egyenes.

217. Alapul véve egy Descartes - féle koordinátarendszert a síkon, határozza meg az

$$x^2 + y^2 = 16 \quad \text{és az} \quad x^2 + y^2 - 16x - 12y + 96 = 0$$

körök közös belső érintőegyeneseinek a meredekségét.

10.1. Kúpszeletek I

218. Irja fel

a) az $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$ kanonikus egyenletű ellipszis $P(2, -3)$,

b) az $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ kanonikus egyenletű hiperbola $P(5, -4)$,

c) az $y^2 = 18x$ kanonikus egyenletű parabola $P(2, -6)$

pontjában vont érintőegyenesének egyenletét.

219. Irja fel az $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ ellipszishez a $P(5, 1)$ pontból vont érintők egyenletét!

220. Bizonyítsa be koordinátageometriai eszközökkel, hogy

a) az ellipszishez bármely külső pontból pontosan két érintő vonható,

b) a hiperbolához a centrumból egy sem, az aszimptotaegyenesek további pontjaiból pontosan egy, míg a többi külső pontból pontosan két érintő vonható,

c) a parabolához bármely külső pontból pontosan két érintő vonható.

221. Igazolja, hogy a sík pontjainak

$$P(x,y) \mapsto P'(x, \frac{b}{a}y)$$

transzformációja az $x^2 + y^2 = a^2$ egyenletű körhöz, az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kanonikus egyenletű ellipszist rendeli.

222. Adott

a) az ellipszis nagytengelye és egy a tengelypontoktól különböző P pontja. Szerkessze meg a P - beli érintőt!

b) az ellipszis F_1, F_2 fókusza és a nagytengely $2a$ hossza. Szerkessze meg az ellipszis egy adott külső pontjára illeszkedő érintőit!

c) az ellipszis F_1, F_2 fókusza és a nagytengely $2a$ hossza. Szerkessze meg az ellipszis egy adott egyenessel párhuzamos érintőit!

d) az ellipszis F_1, F_2 fókusza és a nagytengely $2a$ hossza. Szerkessze meg az ellipszis egy adott egyenessel vett metszéspontjait!

11. Síkgeometriai feladatok

223. Egy 8 m hosszú deszkából feljárót készítenek, mely a vízszintessel 10°-os szöget zár be. Milyen magas az emelvény?

224. Jelölje a egy egyenlő szárú háromszög alapját, b a szárát, α az alappal szemközti, β az alapon fekvő szögét, m_a az alaphoz, m_b a szárhoz tartozó magasságát. Töltse ki a táblázat hiányzó adatait!

a	b	α	β	m_a	m_b
6	5				
88				117	
	7			4,115	
	5	72°			
100			72°		
	397		$35°3'$		
10					10
			68°	8,415	

225. Egy egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága 25 m, az alapvonal felezőpontjából a szárra húzott merőleges pedig 12 m. Mekkorák a háromszög szögei?

226. Mekkorák az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei, ha az alaphoz tartozó magasság 15 m, a szárhoz tartozó magasság pedig 8 m?

227. Tekintsük az AB szakasz felező merőlegesét és legyen X az A - t tartalmazó félsík egy tetszőleges, de az AB egyenesre nem illeszkedő pontja. Igazolja, hogy az AXB szög szögfelezője az AB szakaszt egy A - val egyező félsíkban lévő pontban metszi!

228. Egy rombusz átlói 54,4 m és 18,6 m hosszúak. Mekkora az oldala és mekkorák a szögei?

229. Egy háromszög kerülete 15 cm, szögeinek aránya 3:4:5. Határozza meg a háromszög oldalait és szögeit!

230. Olyan háromszöget keresünk, melynek két oldala 5 és 6 cm, a nagyobbik oldallal szemközti szöge pedig $60°40'$. Mekkorák a háromszög ismeretlen szögei és oldala?

231. Egy általános trapéznak ismerjük a hosszabbik párhuzamos oldalát (48 cm), a két szárát (24 és 36 cm), valamint az alap és a 24 cm-es oldalak által bezárt szögét $(63,8°)$. Mekkora a trapéz negyedik oldala, mekkorák az ismeretlen szögei?

232. Egy paralelogramma szomszédos oldalai 24 dm és 16 dm hosszúak, az általuk bezárt szög $48°26'$. Milyen hosszú a két átló?

233. Egy háromszög két oldala 9 cm és 15 cm hosszú. A nagyobbik oldalt felező súlyvonal 12 cm hosszú. Mekkora a háromszög harmadik oldala?

234. Egy konvex négyszög oldalai sorban 7 cm, 3 cm, 5 cm és 6 cm hosszúak. A 6 cm-es és a 7 cm-es oldalak által bezárt szög $41°54'$. Számítsa ki a négyszög ismeretlen szögeit!

235. Egy egyenlő szárú trapéz egyik alapja 30 cm, átlója 22 cm hosszú. Az alap az átlóval $34,2°$-os szöget zár be. Mekkorák a trapéz ismeretlen oldalai és szögei?

236. Egy háromszög egyik oldala 18 cm. A hozzá tartozó magasság a szemközti szöget $20°33'$ és $36°$-os szögekre bontja. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

237. Egy szabályos tizennégyszög köré írt kör sugara 18 cm. Milyen hosszú az oldala, és mekkora a területe?

238. Mekkora a területe annak az egyenlő szárú háromszögnek, amelynek alapja 12 cm, a szárak szöge pedig $40°$?

239. Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai 15 m és 25 m hosszúak, az egyik szöge $100°$. Mekkora a trapéz területe?

240. Az ABC háromszögben $AB = 12$ cm, az A csúcsnál lévő szög $74°$. A háromszög C csúcsából kiinduló súlyvonala $CD = 7$ cm. Mekkorák a háromszög oldalai?

241. Jelölje a, b és c egy háromszög oldalait, továbbá α, β és γ pedig rendre az oldalakkal szemközti szögeket. Töltse ki a táblázat hiányzó adatait és az eredményt vesse össze a háromszögek egybevágóságának alapeseteivel!

a	b	c	α	β	γ
12	20				40°
	13,4	18,5	110°		
24	25	30			
19	12	9			
8	10	20			
10				35°	125°
	20	25			60°
	20	25		60°	

11.1. Hozzáférhetelen távolság meghatározása

242. Sík terepen az A és B megközelíthetetlen pontok távolságának kiszámítására kijelölünk egy mérhető CD szakaszt és megmérjük, hogy az AB szakasz hány fokos szögben látszik a C, illetve a D pontból (α, illetve β szögek), továbbá hány fokos szögben látszik a BD szakasz a C, illetve az AC szakasz a D pontból (γ, illetve δ szögek).

a) Fejezze ki az AB szakasz hosszát a CD szakasz hosszának, illetve a látószögeknek a függvényében!

b) Határozza meg az AB szakasz hosszát, ha $d = 40$ a CD szakasz hossza, továbbá

$$\alpha = 35,3°, \quad \beta = 29,5°, \quad \gamma = 53,5° \quad \text{és} \quad \delta = 62°.$$

11.2. Gerendaúsztatási feladat

243. Egy 2 méter széles csatornán farönköket úsztatnak. Mekkora lehet a farönk maximális hossza, ha elakadásmentesen be kívánjuk fordítani az 1 méter széles, derékszögben elágazó csatornába?

244. Egy A méter széles csatornán farönköket úsztatnak. Mekkora lehet a farönk maximális hossza, ha elakadásmentesen be kívánjuk fordítani a B méter széles, α szögben elágazó csatornába?

11.3. Kúpszeletek II

245. Igazolja, hogy

a) az ellipszis azon pontok mértani helye a síkban, melyek körül az egyik fókuszon áthaladó és a másik fókusz körüli vezérkört érintő kör írható,

b) a hiperbola azon pontok mértani helye a síkban, melyek körül az egyik fókuszon áthaladó és a másik fókusz körüli vezérkört érintő kör írható,

c) a parabola azon pontok mértani helye a síkban, melyek körül a fókuszon áthaladó és a vezéregyenest érintő kör írható.

246. Adott egy ellipszis F_1 fókusza, P_1 és P_2 pontjai, továbbá a nagytengely $2a$ hossza. Szerkessze meg az ellipszis F_2 fókuszát!

247. Adott egy hiperbola F_1 fókusza, P_1 és P_2 pontjai, továbbá a valós tengely $2a$ hossza. Szerkessze meg a hiperbola F_2 fókuszát!

248. Adott egy parabola vezéregyenese, P_1 és P_2 pontjai. Szerkessze meg a fókuszt!

249. Adott egy parabola fókusza, P_1 és P_2 pontjai. Szerkessze meg a vezéregyenest!

250. Adott

a) az ellipszis két fókusza és egy érintője. Szerkessze meg a tengelypontokat!

b) a hiperbola két fókusza és egy érintője. Szerkessze meg a (valós) tengelypontokat!

c) a parabola fókusza, egy érintője és az érintési pont. Szerkessze meg a vezéregyenest!

d) a parabola vezéregyenese, egy érintője és az érintési pont. Szerkessze meg a fókuszt!

e) a parabola vezéregyenese, egy érintője és egy P pontja. Szerkessze meg a fókuszt!

12. Koordinátageometria a térben

251. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét a térben, mely

a) illeszkedik a $P(2, -1, 3)$ pontra és párhuzamos a $\mathbf{v}(1 - 2, 5)$ vektorral,

b) illeszkedik a $P(-4, 5, 2)$ pontra és párhuzamos a $\mathbf{v}(0, 1, 3)$ vektorral,

c) illeszkedik a $P(3, -5, 6)$ pontra és párhuzamos a $\mathbf{v}(2, 4, 1)$ vektorral

252. Irja fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, mely illeszkedik az

a) $A(-1, 2, -2)$ és $B(1, 3, 7)$,

b) $A(0, -3, 5)$ és $B(6, -2, 1)$

pontokra.

A továbbiakban - hacsak mást nem mondunk - a koordináták Descartes-féle koordinátarendszerre vonatkozóan értendők.

253. Írja fel annak a síknak az egyenletét, mely

a) illeszkedik a $P(-2, 5, 4)$ pontra és merőleges az $\mathbf{n}(3, 7, -2)$ vektorra,

b) illeszkedik a $P(11, 7, -2)$ pontra és merőleges az $\mathbf{n}(0, -2, 3)$ vektorra!

254. Irja fel annak a síknak az egyenletét, mely illeszkedik az

a) $A(-2, 5, 7)$, $B(1, -1, 2)$ és $C(2, 3, 5)$,

b) $A(3, 4, 1)$, $B(-2, 0, 5)$ és $C(6, -3, -1)$

pontokra.

255. Töltse ki a táblázat hiányzó adatait.

P	Q	R	$\mathbf{n}$	$Ax + By + Cz + D = 0$
$(-2, 1, 1)$	$(6, 4, 1)$	$(-1, 0, 0)$		
$(-1, 3, 2)$			$5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$	
				$6x + 4y - 3z + 1 = 0$

256. Metszi-e a $3x - 4y - 2z = -5$ sík az $A(3, -2, 1)$ és $B(-2, 5, 2)$ pontokon áthaladó egyenest? Ha igen, mi a metszéspont?

257. Határozza meg az $5x - 4y - 2z = 5$ és $x + 2z = 2$ síkok metszésvonalát!

258. Határozza meg a $P(2, -1, 3)$ pont merőleges vetületét az $x + 2y - z = 1$ síkon és számítsa ki a pontnak a síktól való távolságát!

259. Határozza meg $P(2, -1, 3)$ pont merőleges vetületét az $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y + 7}{5} = \dfrac{z - 2}{2}$ egyenesen és számítsa ki a pontnak az egyenestől való távolságát!

260. Határozza meg az $x = y - 1 = z + 1$ egyenes merőleges vetületét az $x + 2y - z = 1$ síkon!

261. Adottak a következő pontok: $A(-1, 2, -3)$, $B(5, 2, 0)$ és $C(3, 2, -2)$. Határozza meg C távolságát az A és B pontokra illeszkedő egyenestől!

262. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $A(2, -1, 3)$, $B(3, 2, 1)$ pontokra és párhuzamos a $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ vektorral.

263. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, mely párhuzamos az $x+y-z = 2$ és $2x - y = -1$ síkokkal és illeszkedik a $P(-1, 2, 3)$ pontra.

264. Írja fel annak a síknak az egyenletét, mely illeszkedik az $M(1, 2, -1)$ pontra és párhuzamos az $x = \dfrac{y}{2} = z - 1$ és $\dfrac{x+1}{2} = y = z + 1$ egyenesekkel.

265. Mekkora az $\dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z+1}{3}$ és $x + 2 = \dfrac{y-1}{2} = z$ egyenesek távolsága?

266. Határozza meg az $A(1, 2, 0)$, $B(4, 0, 0)$, $C(3, 4, 0)$ és $D(0, 0, 1)$ csúcspontokkal rendelkező tetraéder

a) élegyeneseinek egyenletrendszerét,

b) lapsíkjainak egyenletét,

c) él - és lapszögeit, illetve az élek és a lapok által bezárt szögeket.

267. Irja fel a $C(1, -2, 3)$ középpontú, $\sqrt{6}$ sugarú gömb $P(2, -1, 5)$ pontjában vont érintősíkjának az egyenletét.

268. Határozza meg annak a forgáskúpfelületnek az egyenletét, melynek csúcsa $P(1, 2, 3)$ és alkotói érintik az origó középpontú egységsugarú gömbfelületet!

269. Határozza meg annak a forgáskúpfelületnek az egyenletét, melynek csúcsa $P(-1, 2, 3)$ és alkotói érintik a $C(1, -2, 3)$ középpontú, $\sqrt{6}$ sugarú gömbfelületet!

270. Határozza meg annak a forgáshengernek az egyenletét, melynek alkotói párhuzamosak a $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ vektorral és érintik az origó középpontú egységsugarú gömbfelületet.

12.1. Kúpszeletek III

271. Egy forgáskúp félnyílásszöge $30°$, a kúpot metsző sík a kúptengellyel $60°$ - os szöget zár be és nem halad át a kúp csúcsán. Mekkora a Dandelin gömbök sugara, ha a kimetszett ellipszis nagytengelye $2a$.

272. A forgáskúp tengelyével párhuzamos (a kúp csúcspontjára nem illeszkedő) sík a kúpfelületből egy hiperbolát metsz ki. A valós féltengely és a lineáris excentricitás segítségével fejezze ki a Dandelin gömbök sugarát!

273. Hol helyezkednek el azoknak a forgáskúpoknak a csúcspontjai, melyek az xy - koordinátasíkból az

11. ábra. Germinal Pierre Dandelin (1794-1847), francia mérnök.

a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ kanonikus egyenletű ellipszist,

b) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ kanonikus egyenletű hiperbolát,

c) $y^2 = 2px$ kanonikus egyenletű parabolát

metszik ki?

Hivatkozások

[1] Dragálin Albert és Buzási Szvetlána: Bevezetés a matematikai logikába, Kossuth Egyetemi kiadó, Debrecen, 1986.

[2] Gimes Györgyné (szerk.): Összefoglaló feladatgyűjtemény Matematikából, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.

[3] Horvay Katalin - Riemann István: Geometriai feladatok gyűjteménye I. - II., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.

[4] Kántor Sándorné: Felvételi feladatok, Studium 96 BT, Debrecen, 1997.

[5] Kovács Zoltán (szerk.): Feladatgyűjtemény lineáris algebra gyakorlatokhoz. Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2003.

[6] Pogáts Ferenc: Vektorok, koordinátageometria, trigonometria, TYPOTEX, Budapest, 1998.

[7] Rábai Imre: Elemi matematikai példatár I. Trigonometria - Koordináta-geometria, Gondolat, Budapest, 1972.

[8] Strohmayer János: Geometria példatár I-IV, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

[9] Vincze Csaba: Trigonometria és koordinátageometria, Kossuth Egyetemi Kiadó Debreceni Egyetem, Debrecen, 2008.