Trigonometria és koordinátageometria

Vincze Csaba

Debrecen, 2008

Lektorok:
Dr. Kovács Zoltán
Paulovits György
Vinczéné Varga Adrienn

Ábrák:
Vincze Katalin

Köszönetet mondok a jegyzet lektorainak és Dr. Szilasi Józsefnek, aki előadásai kéziratanyagával segítette munkámat.

Bevezetés

> A matematikában, csakúgy, mint minden tudományos kutatásban, kétféle irányzattal találkozunk: az elvonatkoztatásra való törekvéssel – mely megkísérli a sokféle anyagból a logikai szempontokat kimunkálni és azokat rendszeres összefüggésbe hozni –, és a másik irányzattal, a szemléletesség irányzatával, mely inkább a tárgyak és azok tartalmi vonatkozásainak eleven megértésére törekszik.
>
> David Hilbert

A Trigonometria és Koordinátageometria tantárgy a matematika alapképzési szak bevezető kurzusainak egyike, s mint ilyen, új a képzési palettán. Két másik tantárggyal együtt célja, hogy átmenetet biztosítson a hallgatóság számára a középiskolában oktatott matematikai törzsanyag és a differenciáltabb szakmai kurzusok között, módszertanilag a matematika szigorú formalizmusával tekintse át a már meglévő ismereteket, tartalmilag pedig, hogy

– geometriai úton értelmezze a szögfüggvényeket és vizsgálja tulajdonságaikat;

– megalkossa a szabadvektor fogalmát, a hozzá kapcsolódó szorzatok kifejtésével bővítse a középiskolás ismeretanyagot;

– alapozza meg az analitikus geometriát, tárgyalja az egyenesek, síkok és kúpszeletek analitikus geometriáját.

A rendszerező ismétlés mellett tehát meg kell tennünk az első lépéseket a matematikai nyelv és beszédmód elsajátítása felé, miközben az ismeretek bővítésének igényéről sem mondhatunk le. A jegyzet célja ezeknek a szempontoknak az összehangolása.

A bevezető fejezetekben az axiomatikus módszerről, a logika és a halmazelmélet elemeiről van szó. Természetesen nem cél sem a matematikai logika, sem pedig a halmazelmélet precíz kidolgozása – a naív fogalomalkotás keretein belül maradunk.

Központi fogalom a tananyagban a vektor. Ezt az elnevezést irányított szakaszok olyan családjára fogjuk alkalmazni, melynek tagjai között – jól meghatározott szempontok alapján – már nem teszünk különbséget. A vektor, mint irányított szakasz sztereotípiáját fel kell számolnunk. Kapcsolatukat a reláció, ezen belül pedig az ekvivalenciareláció segítségével lehet precízen leírni. Ez talán az egyetlen mély matematikai fogalom, ami a jegyzetben szerepel.

A középiskolai tanulmányok szintjét ugyan nem haladja meg, de a törzsanyaghoz képest újdonság a kúpszeletek koordinátageometriája és a térbeli koordinátageometria. A fellépő technikai nehézségeken túl világosan kell látnunk, hogy az egyenletek és az egyenletrendszerek valójában nagyon is speciális példák a sík, illetve a tér részhalmazait leíró relációkra. Az általánosabb fogalomalkotás segítségével egy sokkal gazdagabb világba pillanthatunk be.

A jegyzetben található feladatok – bár nem pótolnak egy teljes feladatgyűjteményt – kiindulópontként szolgálnak a tantárgy gyakorlataihoz. A szintfelmérő feladatsorok pedig a matematika alapképzési szak elsőéves hallgatói számára készültek a 2006/2007 - es, illetve a 2007/2008 - as tanévben.

A témakörök elmélyült és részletes tanulmányozásához ajánljuk a [2], [4] és a [6] szakirodalmat. Az [1] cikk csupán érdekesség, míg a továbbiakra konkrét utalás történik a szövegben.

Dr. Vincze Csaba

Debrecen, 2008 május

Tartalomjegyzék

1. Elemek

A modern matematikai elméletek kiindulópontja a *nem definiált fogalmak* és az *axiómák* rögzítése. A nem definiált fogalmak körébe az *alapfogalmak* és a köztük fennáló *alapkapcsolatok* – szaknyelven: relációk – tartoznak. Az axiómák pedig az alapkapcsolatokra vonatkozó, igaznak elfogadott állítások. Összességük képezi az elmélet axiómarendszerét. Mindezek rögzítése után egy matematikai elmélet kifejtésére *definíciók* és *tételek* formájában kerül sor. A definíciók – logikai szempontból – pusztán rövidítések; a tárgyalást tömörebbé, áttekinthetőbbé teszik. Definíciók formájában vezetünk be újabb fogalmakat az alapfogalmak és a már definiált fogalmak segítségével. A tételek pedig az axiómarendszer logikai következményei. A tétel kifejezéssel logikailag egyenértékű az *állítás* és a *lemma* (segédtétel), jóllehet az elnevezések utalnak egyfajta rangsorolásra is: tételként az elmélet legfontosabb eredményeit igyekszünk rögzíteni, a lemmák többnyire segédszerepet játszanak a tételekhez vezető úton, míg az állítások valahol a kettő között helyezkednek el. A *következmények* a már igazolt eredmények összevetéséből, specializálásából adódó megállapítások.

Duncan Gregory (1813-1844), aki úttörő szerepet játszott a modern algebra létrehozásában, így fogalmaz: „*a szimbolikus algebrát annak fényében tekintem, hogy az a műveletek kombinációinak a tudománya, nem annak természete által, hogy azok mik és mit eredményeznek, hanem azok által a törvények által, amiknek engedelmeskednek*". Történetileg azonban a geometria volt az első, melynek axiomatikus felépítésmódját kidolgozták. Ezt a felépítési módot a későbbiek során a matematika minden ága átvette, de mintául szolgált sok más tudomány megalapozására is. Prékopa András [7] szavaival élve a görög *Euklidész* i.e. 300 környékére datálható *Elemek* című munkája „*olyan mestermű, mely kétezer éven át forrása volt a geometriai ismereteknek. Legnagyobb érdeme, hogy ezeket egységes logikai rendszerbe foglalta,* *melyben kevés számú adott állításból, logikusan, egymásra épülve következnek az újabb és újabb állítások*". Akadnak persze olyan mozzanatok is a Műben, melyek – több mint két évezred távlatából – erősen kifogásolhatók. Ilyen például a pont, vagyis *az, aminek nincs része* és az egyenes, vagyis a *kiterjedés nélküli hosszúság* definíciója. Ahogy a tételláncok sora sem végtelen, úgy a matematikai fogalmak egymásra épülésének lánca sem. A pont és az egyenes például tipikusan nem definiált fogalmak a geometria modern, axiomatikus felépítésében. Az axiómák pedig a köztük fennálló, *illeszkedésnek* nevezett alapkapcsolatra vonatkoznak:

(i) bármely két különböző pontra illeszkedik egy és csak egy egyenes,

(ii) bármely egyenesre illeszkedik legalább két különböző pont,

(iii) létezik legalább három különböző pont, melyek nem illeszkednek egy egyenesre.

1.1. Definíció. *Azokat a geometriai struktúrákat, melyek pontjai és egyenesei között fennálló illeszkedési reláció eleget tesz ezeknek az axiómáknak,* Hilbert-féle illeszkedési síknak *nevezzük.*

1.1. Példa. A Hilbert - féle illeszkedési sík minimális modellje. *Legyen* $\mathbb{E}$ *egy háromelemű halmaz, melynek* A_1*,* A_2 *és* A_3 *elemeit* pontoknak *nevezzük. Az* egyenesek *pedig legyenek a pontok halmazának kételemű részhalmazai, azaz*

$$a_1 = \{A_2, A_3\}, \quad a_2 = \{A_1, A_3\}, \quad a_3 = \{A_1, A_2\}.$$

Az illeszkedési reláció megegyezik a halmazelméleti eleme *relációval: egy pont illeszkedik egy egyenesre, ha az egyenes, mint ponthalmaz, tartalmazza a pontot.*

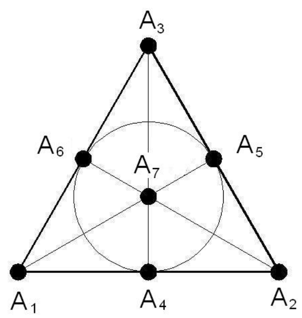
Egyáltalán nem szükségszerű azonban, hogy az egyenesek a szó szoros értelmében pontokból álló részhalmazok legyenek. Hilbert tárgyalásában például ez a két alapfogalom egyszerűen két halmaz elemeire vonatkozó elnevezés, melyek között az *illeszkedési reláció* teremt kapcsolatot. A modellalkotás legfontosabb lépése tehát az illeszkedési reláció megadása. A pontok és az egyenesek között fennálló illeszkedési reláció leírására használják az ún. *illeszkedési mátrixot.* Ez a tárgyalt minimális modellben az

	a_1	a_2	a_3
A_1	0	1	1
A_2	1	0	1
A_3	1	1	0

alakot ölti, ahol az 1 szimbólum jelentése a megfelelő sorban, illetve oszlopban álló pont, illetve egyenes illeszkedése, a 0 szimbólum pedig ennek ellenkezőjét jelöli. Az illeszkedési mátrix sorai és oszlopai természetesen nem tölthetők ki tetszőlegesen. Az axiómákra, mint a kitöltés szabályaira, tekintettel kell lennünk: bármely sor, illetve oszlop tartalmaz legalább két 1 - est, de nincs olyan oszlop, mely csupa 1 - est tartalmaz. Végül rámutatunk arra, hogy a harmadik axióma szerint a pontok halmaza legalább három elemből áll, ami azt jelenti, hogy a minimális modell valóban minimális. Egy további nevezetes példa a hét pontot és hét egyenest tartalmazó modell. A pontok és az egyenesek között fennálló illeszkedési relációt a

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
A_1	0	1	1	0	1	0	0
A_2	1	0	1	0	0	1	0
A_3	1	1	0	1	0	0	0
A_4	0	0	1	1	0	0	1
A_5	1	0	0	0	1	0	1
A_6	0	1	0	0	0	1	1
A_7	0	0	0	1	1	1	0

mátrix írja le. A memorizálást megkönnyíti, ha az A_1, A_2 és az A_3 pontokat egy szabályos háromszög csúcsainak, az A_4, A_5 és az A_6 pontokat az oldalfelező pontoknak, míg az A_7 pontot a beírt kör középpontjának tekintjük. Ebben a megközelítésben az egyenesek a háromszög oldalainak, magasságainak, illetve beírt körének feleltethetők meg.



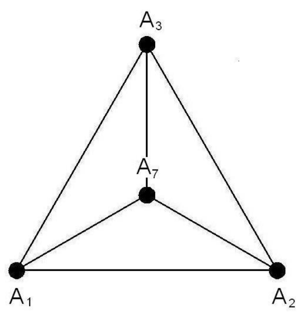
1. ábra. A hét pont - hét egyenes modell.

1.1. Feladat. *Ellenőrizze, hogy a modell Hilbert - féle illeszkedési sík.*

A példák sorát lezárandó tekintsük azt a modellt, mely a hét pont - hét egyenes modellből úgy keletkezik, hogy a hét egyenes közül eltávolítjuk az egyiket. Ezzel összhangban a pontok halmazát is megfosztjuk a tekintett egyenes pontjaitól. A megmaradt négy pontra és hat egyenesre vonatkozó illeszkedési mátrix az eredeti illeszkedési mátrix utolsó oszlopának, azaz az a_7 egyenesnek, illetve negyedik, ötödik és hatodik sorának, azaz az A_4, A_5 és az A_6 pontoknak a törlése után az

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
A_1	0	1	1	0	1	0
A_2	1	0	1	0	0	1
A_3	1	1	0	1	0	0
A_7	0	0	0	1	1	1

alakra redukálódik. Ezt a modellt megkülönbözteti az eddigiektől az a tulajdonsága, hogy bármely egyenesét és az egyenesre nem illeszkedő pontját megadva, létezik egy és csak egy olyan egyenes, mely illeszkedik az adott pontra és az adott egyenessel nincs közös pontja – a síkgeometriában ez a *párhuzamosság* szokásos definíciója. Vegyük észre például, hogy az a_1 egyenes és a rá nem illeszkedő A_1 pont esetén éppen a_5 a kívánt tulajdonságú, azaz az A_1 pontra illeszkedő és az a_1 egyenessel párhuzamos egyenes.



2. ábra. A négy pont - hat egyenes modell.

Tekintettel arra, hogy az elsőként tárgyalt két modellben bármely két egyenes metsző, azt mondhatjuk, hogy a párhuzamosság kérdése független az illeszkedési axiómáktól. Párhuzamos egyenesek létezését további axiómával garantálhatjuk, vagy – természetesen – le is mondhatunk róluk. Az euklideszi geometria párhuzamossági axiómája hosszú időn át foglalkoztatta a matematikusokat. Bolyai János (1802 - 1860) és Nyikolaj Lobacsevszkij (1792 - 1856) munkásságának köszönhetően ma már tudjuk, hogy ez az axióma nem csupán az illeszkedési axiómáktól, hanem az euklideszi geometria axiómarendszerének többi tagjától is *független*, azaz segítségükkel se nem igazolható, se nem cáfolható.

Noha Euklidész óta a geometria sokat fejlődött, az euklideszi megalapozás sokáig változatlan maradt. Mai igényeknek megfelelő axiómarendszert elsőként David Hilbert (1862 - 1943) adott az 1899 - ben napvilágot látott *Die Grundlagen der Geometrie* (A geometria alapjai) című művében. Hilbert tárgyalásában három alapfogalom, a pont, az egyenes és a sík fordul elő és három alapviszony, az illeszkedés, a közrefogás és a kongruencia (egybevágóság). Az öt csoportban felsorolt axiómák pedig az illeszkedéssel, a rendezéssel, a kongruenciával, a párhuzamossággal és a folytonossággal kapcsolatos követelményeket fogalmazzák meg. Segítségükkel rangsorolni lehet a geometriai tulajdonságokat és rendet teremthetünk az egymással különböző logikai kapcsolatokban álló tételek sokaságában.

Hilbert sokat tett az euklideszi geometria (általában: az axiomatikus rendszerek) ellentmondásmentességgel kapcsolatos problémáinak tisztázása érdekében is. Az axiómarendszer akkor ellentmondásos, ha egy állítás és annak tagadása egyaránt levezethető belőle; a részleteket illetően ld. [5]. Ilyen jellegű vizsgálatok azonban csak fejlett logikai apparátus segítségével végezhetők, hiszen alapkövetelmény az elmélet formalizálása, azaz lefordítása egy precíz matematikai - logikai nyelvre. A matematikai logika eszközeinek segítségével pontosan megfogalmazhatjuk, hogy mit értünk *állításon*, *bizonyításon*, illetve *ellentmondáson*, mit is jelent az, hogy egy állítás más állítások *logikai következménye*, illetve hogy egy állítás egy másik állítás *tagadása*. Egy természetes nyelv önmagában nem alkalmas matematikai elmélet kifejtésére. A magyar nyelv kifejezéseit ezért egy formális nyelv szimbólumaival fogjuk kombinálni, lehetőség szerint előnyben részesítve a természetes nyelven való megfogalmazásokat.

2. Logikai összekötőjelek és kvantorok

Minden ember halandó. Szókratész ember. Szókratész tehát halandó. Mindenki látja, hogy ez egy helyes gondolatmenet; de vajon tisztában vagyunk - e az okfejtésben szereplő minden fogalommal? Ez legalábbis kérdéses, ami azonban nem befolyásolja azt a tényt, hogy helyesen következtettünk. Egy következtetés helyessége tehát anélkül is eldönthető, hogy pontosan ismernénk minden, az okfejtésben szereplő fogalmat. A magyarázat abban rejlik, hogy a harmadik állítás az első kettő logikai következménye, azaz a fellépő fogalmak tetszőleges értelmezése mellett igaz, feltéve, hogy az első kettő igaz.

Néhány további példa a [3] szakirodalom alapján.

(i) Ádámnak nincs autója. Éva csak olyan fiúkkal áll szóba, akiknek van autója. Tehát Éva nem áll szóba Ádámmal.

(ii) Néhány republikánus kedvel minden demokratát, de egyetlen republikánus sem szereti a szocialistákat. Tehát egyetlen demokrata sem szocialista.

(iii) Ha a lóversenyek eredményeit a politikusok előre eldöntik, vagy a játéktermeket ellenőrzésük alatt tartják a szerencselovagok, akkor kevesebb a turista, ami árt a lakosságnak. Ha kevesebb a turista, akkor a rendőrség elégedett. A rendőrség sohasem elégedett. Tehát a lóversenyek eredményét nem a politikusok döntik el.

Emlékeztetünk rá, hogy állításon olyan kijelentő mondatot értünk, melyről kétséget kizáróan eldönthető, hogy igaz, vagy hamis. Ha p és q állítások szimbólumai, akkor az ismert logikai összekötőjelek, nevezetesen

($\wedge$) a *konjunkció* (és),

($\vee$) a *diszjunkció* (vagy),

($\neg$) a *negáció* (tagadás)

segítségével újabb állítások szimbólumait alkothatjuk meg. Az alábbi

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$p * q$
1	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1	0

táblázat mutatja a logikai összekötőjelek segítségével felépített állítások igazságértékét a p és a q állítás igazságértékének függvényében. Az írásmunkát egyszerűsítendő számos olyan logikai összekötőjelet használunk, mely kifejezhető a már ismertetett összekötők kombinációjaként. Ilyen például

($\Rightarrow$) az *implikáció* (ha..., akkor...),

($\Leftrightarrow$) az *ekvivalencia* (...akkor és csak akkor, ha..., ...pontosan akkor, ha...).

A diszjunkció logikai művelete kapcsán felhívjuk a figyelmet a köznyelvben is létező *megengedő vagy*, illetve *kizáró vagy* közötti különbségre: *kolbászt, vagy szalonnát eszem* (esetleg mindkettőt), illetve *vagy bort, vagy vizet iszom* (de semmiképp sem mindkettőt). Természetesen nincs akadálya olyan logikai összekötőjel bevezetésének sem, melynek igazságtáblázata a kizáró vagy köznyelvi értelmét tükrözi: a $p*q$ állítás pontosan akkor igaz, ha p és q közül pontosan az egyik igaz.

A *Quine - féle táblázat* összetett állítások igazságértékének meghatározására szolgál. Illusztrációképpen tekintsük a

$$(p \wedge (\neg q)) \vee ((\neg p) \wedge q)$$

állítást.

(i) Az első lépésben a részállítások alatt kiírjuk a 0 és az 1 összes lehetséges kombinációját:

p	$\wedge$	$\neg q$	$\vee$	$\neg p$	$\wedge$	q
1						1
1						0
0						1
0						0

(ii) Utána elvégezzük a műveleteket és a kapott igazságértéket feltüntetjük az aktuális logikai összekötőjel alatt:

p	$\wedge$	$\neg q$	$\vee$	$\neg p$	$\wedge$	q
1		0		0		1
1		1		0		0
0		0		1		1
0		1		1		0

p	$\wedge$	$\neg q$	$\vee$	$\neg p$	$\wedge$	q
1	0	0		0	0	1
1	1	1		0	0	0
0	0	0		1	1	1
0	0	1		1	0	0

(iii) A táblázat utolsó oszlopa a fő logikai összekötőjel, esetünkben a diszjunkció alatt keletkezik:

p	$\wedge$	$\neg q$	$\vee$	$\neg p$	$\wedge$	q
1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0

2.1. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az utolsó oszlop értékei megfelelnek a kizáró vagy igazságtáblázatában szereplő értékeknek a részállítások ugyanazon igazságértékei mellett (ld. logikailag ekvivalens állítások).

Különösen érdekesek azok az állítások, melyek főoszlopa csupa 1 - esből áll, mint a következő példa is mutatja.

p	$\Rightarrow$	q	$\Leftrightarrow$	$\neg p$	$\vee$	q
0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1

A $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$ állítás tehát a p és a q állítások igazságértékétől függetlenül mindig igaz – szaknyelven: *propozícionális tautológia*, vagy *logikai törvény*. Ha a fő összekötőjel az ekvivalencia, akkor azt mondjuk, hogy a bal, illetve a jobb oldalon szereplő állítások *logikailag ekvivalensek*. Ilyen szempontból a $p \Rightarrow q$ állítás nem más, mint a $(\neg p) \vee q$ állítás rövidítése és hasonlóan igazolható, hogy $p \Leftrightarrow q$ logikailag ekvivalens a $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ állítással. Mind az implikáció, mind az ekvivalencia (mind pedig a kizáró vagy) kifejezhető tehát a konjunkció, a diszjunkció és a negáció segítségével. A matematikai érvelés során a logikailag ekvivalens állítások egyenértékűek, ami azt jelenti, hogy az okfejtés helyes marad, ha valamely állítást egy vele logikailag ekvivalens állítással helyettesítünk.

2.1. Feladat. *Az állítás Quine - féle táblázata segítségével igazolja, hogy a*

$$(p \Rightarrow q) \;\Leftrightarrow\; ((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$$

állítás logikai törvény.

A $(p \Rightarrow q) \ \Leftrightarrow \ ((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$ logikai törvény a *kontrapozíció elve*, amit sűrűn alkalmazunk az ún. indirekt bizonyítás során: a konklúzió tagadása ellentmond a feltételeknek.

Néhány további logikai törvény:

(i) az *asszociativitás*

$$(p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r) \ \text{ és } \ (p \vee (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \vee r),$$

(ii) a *kommutativitás*

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p) \ \text{ és } \ (p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p),$$

(iii) a *disztributivitás*

$$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \ \text{ és } \ (p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)),$$

(iv) az *idempotencia*

$$(p \wedge p) \Leftrightarrow p \ \text{ és } \ (p \vee p) \Leftrightarrow p,$$

(v) a *De Morgan - féle törvények*

$$(\neg(p \vee q)) \Leftrightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q)) \ \text{ és } \ (\neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q)),$$

(vi) *a kétszeres tagadás törvénye*

$$(\neg(\neg p)) \Leftrightarrow p.$$

Mindezek birtokában a kontrapozíció elvének levezetéséhez felhasználhatjuk a

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$$

logikai törvényt, amit a $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ állításra alkalmazva

$$((\neg q) \Rightarrow (\neg p)) \Leftrightarrow ((\neg(\neg q)) \vee (\neg p)) \Leftrightarrow (q \vee (\neg p)) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$$

következik, figyelembe véve a kétszeres tagadás törvényét és a diszjunkció műveletének kommutativitását.

2.2. Megjegyzés. A matematikai logika szabályainak egy érdekes alkalmazási területe az elektromos áramkörök tervezése. A kapcsolókat állítások szimbólumaival jelölve, az igazságérték megfeleltethető a kapcsoló nyitott, illetve zárt állásának. Két kapcsoló soros, illetve párhuzamos kapcsolásával a gyakorlatban is találkozhatunk a konjunkció, illetve a diszjunkció logikai műveletével [1]. A műveletek közötti kapcsolatokat felhasználva pedig megtervezhetjük a céljainknak megfelelő legegyszerűbb áramkört.

2.1. Definíció. *A* $p \Rightarrow q$ *állítás* megfordításán *a* $q \Rightarrow p$*,* kontrapontáltján *pedig a* $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ *állítást értjük. Ha a* $p \Rightarrow q$ *állítás igaz, akkor azt mondjuk, hogy* p elegendő feltétele q *- nak, vagy – a kontrapozíció elvére való tekintettel –* q szükséges feltétele p *- nek. Ha a* $p \Leftrightarrow q$ *állítás igaz, akkor* p szükséges és elegendő feltétele q *- nak és viszont.*

2.2. Feladat. *Állapítsa meg, hogy melyik igaz, illetve hamis az alábbi állítások közül.*

(i) *Ha egy egész szám osztható kilenccel, akkor osztható hárommal is.*

(ii) *A kilenccel való oszthatóság elegendő feltétele a hárommal való oszthatóságnak.*

[1] Az ún. *alternatív kapcsolás* olyan kétkapcsolós áramkör, mely a kapcsolók bármelyikével be -, illetve kikapcsolható. Ez megfelel a $p \Leftrightarrow q$ ekvivalenciának.

(iii) *A kilenccel való oszthatóság szükséges feltétele a hárommal való oszthatóságnak.*

Kvantorok. Ha megkíséreljük a feladatban szereplő első állítás formalizálását, akkor – legalábbis egyelőre – áthatolhatatlan nehézségekbe ütközünk, hiszen az *egy* határozatlan névelő lehetetlenné teszi, hogy az állítást konkrét objektumra vonatkoztassuk; az egész számok közül bármelyik szóba jöhet. A matematikai logika szabályai szerint azonban képezhetünk állításokat az ún. *univerzális kvantor* $\forall$ (jelentése: minden, bármely) és az *egzisztenciális kvantor* $\exists$ (jelentése: létezik, van olyan) segítségével is. Alapul véve egy $p(x)$ nyitott mondatot, azaz olyan kifejezést, mely állítást eredményez, ha az x szimbólumot egy rögzített objektumtartomány elemeivel helyettesítjük, a $\forall x : p(x)$ állítás olvasata *bármely x esetén teljesül* $p(x)$, míg a $\exists x : p(x)$ állításé *létezik x úgy, hogy $p(x)$ teljesül.* Az univerzális kvantor segítségével most már könnyen formalizálhatjuk a szóban forgó állítást. Rögzítsük először is az $x, y, \dots$ változók objektum - tartományaként az egész számok halmazát és jelentse $p(x)$ az x *osztható kilenccel*, $q(x)$ pedig az *x osztható hárommal* nyitott mondatot. A $\forall x : p(x) \Rightarrow q(x)$ formula éppen a *ha egy egész szám osztható kilenccel, akkor osztható hárommal is* állítás lefordítása a logika nyelvére.

2.1. Példa.

$\neg$	$\Big(\exists x : \neg p(x)\Big)$	$\Rightarrow$	$\forall x : p(x)$
0	1	1	1
0	1	1	0
1	0	1	1
1	0	0	0

2.3. Megjegyzés. A példában szereplő formula kvantoros felépítését figyelembe véve bizonyítható, hogy a formula logikai törvény, de – a

Quine - féle táblázat alapján – nem propozícionális tautológia [2].

2.3. Feladat. *Írja fel a $\forall x : p(x) \Rightarrow q(x)$ állítás megfordítását, kontraponáltját és tagadását.*

2.1. Állítás. *Ha egy természetes szám nem négyzetszám, akkor a négyzetgyöke irracionális.*

Bizonyítás. Jelölje n a szóban forgó természetes számot. Indirekt módon tegyük fel, hogy a négyzetgyöke racionális, azaz előáll a k és az l egészek hányadosaként. Négyzetre emelve és rendezve

$$nl^2 = k^2,$$

ahol a jobb oldal prímbontásában minden tényező páros hatványon szerepel. A bal oldalon l^2 prímbontása ugyancsak páros hatványon tartalmazza a tényezőket, ezért arra következtethetünk, hogy n prímbontásában is minden tényező hatványa páros. Ez azonban ellentmond annak, hogy n nem négyzetszám. ∎

2.4. Feladat. *Igaz-e, hogy ha egy természetes szám nem köbszám, akkor a köbgyöke irracionális; speciálisan $\sqrt[3]{2}$ irracionális.*

2.5. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy egy racionális és egy irracionális szám összege irracionális.*

Szumma- és produktumjelek. A matematikai szakirodalomban gyakran találkozunk sok -, vagy határozatlan tagú

$$\sum_{k=1}^{10} a_k := a_1 + \ldots + a_{10}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + \ldots + a_n$$

[2] A matematikai logikában a tautológia és a logikai törvény valójában nem szinoníma. Minden tautológia logikai törvény, de nem minden logikai törvény tautológia; a finomabb megkülönböztetést illetően ld. [3].

összegeket, illetve

$$\prod_{k=1}^{10} a_k := a_1 \cdot \ldots \cdot a_{10}, \quad \prod_{k=1}^{n} a_k := a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

szorzatokat rövidítő szimbólumokkal.

2.2. Példa. *Bármely n természetes szám esetén* $n! := \prod_{k=1}^{n} k$.

2.6. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy bármely n természetes szám esetén*

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

A feladatban szereplő összefüggés bizonyítását kézenfekvő a teljes indukció módszerével végezni. Eljárhatunk azonban a Gauss - módszerrel is. A számokat növekvő, majd pedig csökkenő sorrendben összeadva

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & \ldots & + & n & = & x \\ n & + & (n-1) & + & \ldots & + & 1 & = & x \end{array}$$

vegyük észre, hogy az egymás alatt szereplők összege rendre $(n+1)$. Innen

$$n(n+1) = 2x$$

következik és átrendezéssel éppen a kívánt összefüggéshez jutunk. Egy további – jelentős mértékben általánosítható – módszer a következő. Bármely k természetes számra

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1.$$

Mindkét oldalon összegezve

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k + n,$$

ahonnan

$$(n+1)^2 = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} k + n.$$

következik és átrendezéssel éppen a kívánt összefüggéshez jutunk.

2.7. Feladat. *Figyelembe véve, hogy bármely k természetes szám e-setén*

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1,$$

bizonyítsa be, hogy

$$(n+1)^3 = 1 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + n$$

és írja fel zárt alakban az $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ kifejezést.

A gondolatmenetet egyre növekvő hatványkitevőkre általánosítva azt kapjuk, hogy az

$$s(n,m) := 1^m + 2^m + \ldots + n^m$$

kifejezés mindig felírható zárt alakban, mégpedig

$$s(n,1),\ s(n,2), \ldots, s(n,m-1)$$

polinomjaként.

2.8. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy bármely n természetes szám esetén*

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

3. Halmazok és relációk

3.1. Definíció. *Legyen H és K két nemüres halmaz. A halmazok* Descartes - szorzatán *a*

$$H \times K := \Big\{ (h,k) \mid h \in H \text{ és } k \in K \Big\}$$

halmazt értjük. A szorzathalmaz elemei az ún. rendezett párok*.*

3.1. Megállapodás. $(h,k) = (h',k') \;\Leftrightarrow\; h = h' \;\wedge\; k = k'$.

3.2. Definíció. *A H halmazon adott binér* reláción *a $H \times H$ szorzathalmaz egy R részhalmazát értjük: $R \subset H \times H$. Azt mondjuk, hogy* a halmaz a és b eleme relációban áll egymással*, ha a belőlük képzett (a,b) rendezett pár eleme az R halmaznak. Az írásmunkát egyszerűsítendő használjuk az $a\ R\ b$ jelölést is a relációban álló elemek feltüntetésére. Egy reláció*

(i) reflexív*, ha bármely H - beli elem relációban áll önmagával:*

$$\forall a \in H : a\ R\ a,$$

(ii) szimmetrikus*, ha $a\ R\ b$ maga után vonja, hogy $b\ R\ a$:*

$$a\ R\ b \quad \Rightarrow \quad b\ R\ a,$$

(iii) tranzitív*, ha $a\ R\ b$ és $b\ R\ c$ maga után vonja, hogy $a\ R\ c$:*

$$a\ R\ b \quad \wedge \quad b\ R\ c \quad \Rightarrow \quad a\ R\ c.$$

A reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációkat ekvivalenciarelációnak *nevezzük, az*

$$R(a) := \{\ b \in H \mid a\ R\ b\ \}$$

halmaz pedig az a elem által reprezentált ekvivalenciaosztály*.*

3.1. Lemma. *Bármely ekvivalenciareláció esetén*

(i) $a \in R(a)$,

(ii) $b \in R(a)$ *akkor és csak akkor, ha* $a \in R(b)$,

(iii) $R(a) = R(b)$ *akkor és csak akkor, ha* $b \in R(a)$.

Bizonyítás. Az első két észrevétel nyilvánvaló a reflexivitás és a szimmetria alapján. A harmadik állítás bizonyítására rátérve tételezzük fel először is, hogy $R(a) = R(b)$. Ha az első megállapítást a b elem által reprezentált ekvivalenciaosztályra alkalmazzuk, akkor $b \in R(b)$ és az $R(a) = R(b)$ egyenlőség triviálisan maga után vonja, hogy $b \in R(a)$. A megfordítást igazolandó tegyük fel, hogy $b \in R(a)$ és legyen c az $R(b)$ ekvivalenciaosztály egy tetszőleges eleme. A tranzitivitásra tekintettel $a\ R\ b$ és $b\ R\ c$ maga után vonja, hogy $a\ R\ c$, ahonnan $c \in R(a)$ következik. A második észrevétel szerint azonban a és b szerepe felcserélhető, ezért bármely $c \in R(a)$ esetén $c \in R(b)$. A kölcsönös tartalmazás pedig a halmazok egyenlőségét jelenti. ∎

3.1. Következmény. *Egy ekvivalenciaosztály bármely eleme az illető osztály reprezentánsa.*

3.1. Tétel. *Egy ekvivalenciareláció osztályai nemüres, páronként diszjunkt halmazok, melyek uniója maga az alaphalmaz.*

Bizonyítás. A reflexivitásra tekintettel egyetlen ekvivalenciaosztály sem üres. Másfelől pedig, ha például

$$x \in R(a) \cap R(b),$$

akkor

$$R(a) = R(x) = R(b)$$

következik, azaz ha két ekvivalenciaosztály nem diszjunkt, akkor szükségképpen egybeesik. ∎

3.1. Megjegyzés. Jóllehet a 3.1. Tétel is nyilvánvaló következménye a lemmának, mégis kiemeltük, mert rávilágít az ekvivalenciarelációk szemléletes tartalmára. Ez nem más, mint az alaphalmaz *osztályozása*, vagyis előállítása nemüres, páronként diszjunkt részhalmazok uniójaként. Megfordítva, az alaphalmaz bármely osztályozása esetén ekvivalenciarelációhoz jutunk, ha a részhalmazok elemeit relációban állónak tekintjük. Egy ekvivalenciareláció megadása tehát *ekvivalens* az alaphalmaz egy osztályozásának kijelölésével.

3.1. Példa. *Tekintsük az egész számok halmazát és legyen $p \in \mathbb{Z}$ egy rögzített, nullától különböző egész szám. Könnyen látható, hogy az*

$$x \; R \; y \;\Leftrightarrow\; x - y \text{ osztható } p \text{ - vel}$$

reláció ekvivalenciareláció és az általa indukált osztályok száma p. Ez pontosan annyi, ahány maradék lelléphet egy egész szám p - vel való osztásakor. A szóban forgó reláció osztályait maradékosztályoknak *nevezzük.*

3.1. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy mind*

$$R_1 = \{(x,x),(y,y),(z,z)\},$$

mind pedig

$$R_2 = \{(x,x),(y,y),(z,z),(x,y),(y,x)\}$$

ekvivalenciareláció az $A := \{x,y,z\}$ halmazon!

A feladat kapcsán természetes módon merül fel a kérdés, hogy vajon hány különböző ekvivalenciareláció adható meg az A halmazon. Tételünk szerint egy ekvivalenciareláció megadása ekvivalens az alaphalmaz egy osztályozásának kijelölésével. Alapul véve egy n elemű halmazt, az osztályozások lehetséges számát B_n jelöli a [9] szakirodalomban – ez az ún. *Bell - féle szám*. Kiszámítására érvényes a

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

rekurziós formula, ahol $B_0 := 1$ és

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

az ún. *binomiális együttható*. Emlékeztetünk rá, hogy $0! := 1$.

A rekurziós formula helyességéről könnyen meggyőződhetünk, ha a binomiális együtthatók szerepére gondolunk a kombinatorikában: a binomiális együttható értéke a k elemet tartalmazó részhalmazok száma. Ez nyilván megegyezik az $n-k$ elemet tartalmazó részhalmazok számával, amit az

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

összefüggés is kifejez. Egy $(n-k)$ - elemű részhalmaz (azaz egy osztály) kiválasztása után, a maradék k elemet B_k - féleképpen osztályozhatjuk. Ezért azoknak az osztályozásoknak a lehetséges száma, melyeknek egyik tagja egy $(n-k)$ - elemű részhalmaz

$$\binom{n}{n-k} B_k = \binom{n}{k} B_k.$$

Miközben k végigfut a lehetséges értékeken, megkapjuk a rekurziós formulát.

A Bell - féle számokat egy "háromszög" segítségével is generálhatjuk, hasonlóan a binomiális együtthatókhoz. A táblázatot 1 - gyel kezdjük, az új sorok pedig a megelőző sor utolsó számjegyével kezdődnek. A többi számot a tőle balra, illetve a bal oldali szomszéd fölött álló szám összegeként kapjuk:

$$\begin{array}{cccccc}
\mathbf{1} & & & & & \\
1 & \mathbf{2} & & & & \\
2 & 3 & \mathbf{5} & & & \\
5 & 7 & 10 & \mathbf{15} & & \\
15 & 20 & 27 & 37 & \mathbf{52} & \\
52 & . & . & . & . & .
\end{array}$$

3.2. Feladat. *A rekurziós formula segítségével állapítsa meg a B_6 szám értékét.*

3.3. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy*

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

3.4. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy egy n elemű halmaz összes részhalmazainak a száma éppen 2^n.*

3.5. Feladat. *Bizonyítsa be a binomiális tételt:*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

3.6. Feladat. *Az előző feladatok eredményét felhasználva konstruálja meg a Pascal - háromszöget.*

Tekintsük a $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazt és értemezzük a természetes számokból képzett rendezett párok halmazán az

$$(m, n)\ R\ (m', n') \ \Leftrightarrow\ m + n' = m' + n$$

relációt. Könnyen ellenőrizhető, hogy ekvivalenciarelációról van szó, melynek osztályait *egész számoknak* nevezzük. A számpárokat a koordinátasíkon ábrázolva, az egyes ekvivalenciaosztályok egymással párhuzamos egyenesek pontjaiként szemléltethetők. Legyen k tetszőleges természetes szám. Bevezetve a

$$-k := (m, m+k) \text{ \ által reprezentált ekvivalenciaosztály}$$

jelölést, vegyük észre, hogy a $-k$ szimbólum jóldefiniált, azaz független az m természetes szám választásától. Ez nyilvánvaló, hiszen bármely m, m' természetes számra

$$m + m' + k = m' + m + k,$$

ami azt jelenti, hogy

$$(m, m+k) \; R \; (m', m'+k).$$

Egy további kitüntetett szimbólum a

$$0 := (m, m) \text{ \ által reprezentált ekvivalenciaosztály,}$$

ami szintén független az m választásától. A műveleteket értelmezése is a reprezentánsok segítségével történik: az (m, n) és az (m', n') párok által reprezentált ekvivalenciaosztályok összege, illetve szorzata rendre az

$$(m + m', n + n') \text{ \ illetve az \ } (mm' + nn', mn' + m'n)$$

elemek által reprezentált ekvivalenciaosztály.

3.7. Feladat. *Ellenőrizze, hogy az egész számok összeadása és szorzása jóldefiniált, azaz független a reprezentánsok választásától.*

4. A vektoralgebra elemei

4.1. Megállapodás. Jelölje $\mathbb{E}$ a geometriai tér pontjainak halmazát. A pontokat latin nagybetűkkel, az egyeneseket pedig latin kisbetűkkel fogjuk jelölni. A síkok jelölésére ugyancsak latin nagybetűket fogunk használni, fokozott figyelemmel a szövegkörnyezetre. A tér egyeneseit és síkjait is ponthalmazoknak tekintjük és alkalmazni fogjuk a szokásos halmazelméleti terminológiát és jelölésrendszert: metszet, unió, részhalmaz stb. A tárgyalás során támaszkodni fogunk a szemlélet alapján magától értetődő ismereteinkre. Igaznak fogadjuk el például, hogy egy egyenest bármely pontja két félegyenesre, egy síkot bármely egyenese két félsíkra bont, míg a teret bármely síkja két féltérre bontja. Ezeknek az előfeltevéseknek a rendszerezésével és egymáshoz való viszonyával a geometria axiomatikus felépítése során fogunk megismerkedni.

4.1. Definíció. *A tér A és B pontját összekötő* szakasz *az A kezdőpontú és a B pontot tartalmazó, valamint a B kezdőpontú és az A pontot tartalmazó félegyenes metszete.*

4.2. Definíció. *A tér két egyenese*

(i) metsző*, ha van közös pontjuk és nem esnek egybe,*

(ii) párhuzamos*, ha egy síkban vannak és nincs közös pontjuk, vagy ha egybeesnek,*

(iii) kitérő*, ha nincsenek egy síkban.*

A tér két síkja

(i) metsző*, ha van közös pontjuk és nem esnek egybe,*

(ii) párhuzamos*, ha nincs közös pontjuk, vagy ha egybeesnek.*

A tér egy egyenese és egy síkja

(i) metsző, *ha van közös pontjuk és az egyenes nem illeszkedik a síkra,*

(ii) párhuzamos, *ha nincs közös pontjuk, vagy ha az egyenes illeszkedik a síkra.*

Párhuzamos térelemek *közös* transzverzálisán *olyan egyenest, vagy síkot értünk, mely a térelemek mindegyikét metszi. Két félegyenest, vagy két szakaszt* párhuzamosnak *mondunk, ha tartóegyeneseik párhuzamosak.*

4.1. Feladat. *Igazolja logikailag ekvivalens átalakításokkal, hogy a* két egyenes metsző, vagy kitérő *állítás tagadása a* két egyenes párhuzamos *állítás, azaz kölcsönös helyzetük áttekintése teljes.*

4.2. Megállapodás. A továbbiakban érvényesnek tekintjük a következő *párhuzamossági axiómát*: megadva egy egyenest és egy rá nem illeszkedő pontot egy és csak egy olyan egyenes létezik, mely illeszkedik az adott pontra és párhuzamos az adott egyenessel.

4.2. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy*

(i) *ha egy egyenes párhuzamos egy sík valamely egyenesével, akkor párhuzamos magával a síkkal is,*

(ii) *ha egy egyenes párhuzamos az S síkkal, akkor az egyenesre illeszkedő bármely további sík vagy párhuzamos S - sel, vagy az egyenessel párhuzamos egyenesben metszi az S síkot,*

(iii) *párhuzamos síkok transzverzális síkja a síkokat párhuzamos egyenesekben metszi*

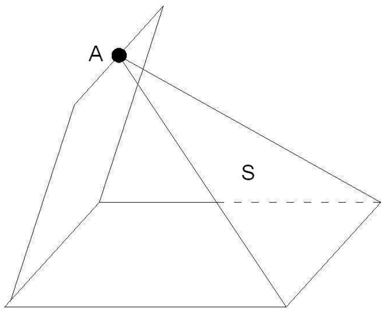
és formalizálja az állításokat. Melyiknek felel meg a

$$\forall\ a,\ b,\ S:\ \Big((a \mid\mid b) \wedge (b\ \subset\ S)\Big)\ \Rightarrow\ a \mid\mid S$$

állítás?

4.1. Tétel. *A párhuzamosság ekvivalenciareláció a tér egyeneseinek halmazán, melynek osztályait* irányoknak *nevezzük.*

Bizonyítás. A reflexivitás és a szimmetria nyilvánvaló a párhuzamosság definíciója alapján. A tranzitivitást ellenőrizendő tegyük fel, hogy a tér egy a egyenese párhuzamos a b egyenessel, a b egyenes pedig párhuzamos a c egyenessel. Mivel egybeeső térelemek esetén a tranzitivitás automatikusan teljesül, ezért páronként különböző egyenesek vizsgálatára szorítkozunk. Az a és a c egyenesek diszjunktak, hiszen ellenkező esetben a metszéspontra két, a b egyenessel párhuzamos egyenes illeszkedne, ami ellentmond a párhuzamossági axiómának. Megmutatjuk azt is, hogy az a és a c egyenesek közös síkban vannak. Tudjuk, hogy az egymással párhuzamos a és b, illetve b és c egyenesek egy - egy közös síkban vannak. Ha ezek egybeesenek, akkor nincs mit bizonyítanunk. Ellenkező esetben pedig válasszunk egy tetszőleges $A \in a$ pontot és tekintsük az A pont és a c egyenes által meghatározott S síkot.



3. ábra. A 4.1. Tétel bizonyítása.

Mivel b párhuzamos a sík egy egyenesével, nevezetesen c - vel, ezért a 4.2. Feladat eredménye szerint párhuzamos magával a síkkal is. Az egymással párhuzamos a és b egyenesek közös síkja tehát egy olyan egyenesben metszi az S síkot, mely illeszkedik az A pontra és – ismételt hivatkozással a 4.2. Feladatra – párhuzamos a b egyenessel. A párhuzamossági axióma szerint viszont a metszésvonal nem lehet más, mint az a egyenes. Ez azt jelenti, hogy S az a és a c egyenesek közös síkja. ■

4.3. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy ha a tér a, b és c egyenesei páronként közös síkban vannak, de mindhárman nincsenek ugyanabban a síkban, akkor vagy párhuzamosak, vagy közös pontban metszik egymást.*

A térelemek kölcsönös helyzetének áttekintése után a geometriai tér metrikus viszonyaival foglalkozunk. Elfogadjuk, hogy a szakaszok hosszának mérését lehetővé teszi néhány természetes elvárásnak megfelelő

$$d\colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$$

leképezés, az ún. *távolságfüggvény*. A szóban forgó kívánalmak a *nemnegativitás*, a *szimmetria* és a *háromszög - egyenlőtlenség*, azaz

(i) $d(A, B) \geq 0$ és $d(A, B) = 0$ akkor és csak akkor, ha $A = B$,

(ii) $d(A, B) = d(B, A)$,

(iii) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$

a tér bármely A, B és C pontja esetén. A harmadik tulajdonság azt a szemléletes tényt tükrözi, hogy két pont között legrövidebb út az egyenes. Hasonlóan járunk el a közös kezdőpontú félegyenesek uniójaként értelmezett *szögvonalak* esetében. Ha a szögvonal *valódi*, azaz nem egyenes (egyenesszög), vagy félegyenes (nullszög), akkor felbontja az általa meghatározott síkot egy *konvex*, illetve egy *konkáv* szögtartományra. Elfogadjuk, hogy ezek mérését lehetővé teszi a tér szögvonalainak halmazán értelmezett leképezés. A konvex szögtartományok mértéke egy 0 és π közé eső valós szám, míg egy konkáv szögtartomány mértékén a $2\pi - \alpha$ valós számot értjük, ahol α jelöli a megfelelő konvex szögtartomány mértékét. Az egyenesszög mértéke π, míg a nullszög mértéke nulla. Az *ívmérték* (radián) használata azonban esetleges – gyakran szerepeltetjük a *fokmértéket* is.

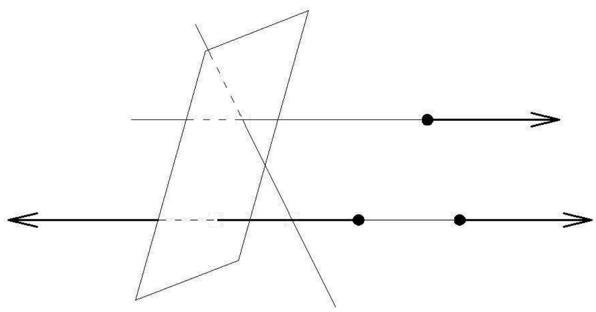
4.1. Megjegyzés. A szakaszok, illetve a szögek mérését a geometria axiomatikus rendszerében a folytonossági axiómák alapozzák meg.

4.3. Definíció. *Két félegyenest* azonosan irányítottnak *mondunk, ha eleget tesznek a következő feltételeknek:*

(i) *párhuzamosak,*

(ii) *tartóegyeneseik transzverzálisai között van olyan, melynek ugyanazon oldalán fekszenek.*

Ha két félegyenes párhuzamos, de a (ii) *feltétel nem teljesül, akkor* ellentétesen irányítottnak *nevezzük őket.*



4. ábra. Azonosan, illetve ellentétesen irányított félegyenesek.

4.2. Megjegyzés. Ha a szóban forgó transzverzális egy egyenes, akkor oldalain a tartóegyenesekkel közös síkban meghatározott félsíkokat értjük. Egy sík oldalai pedig az általa meghatározott félterek.

4.2. Tétel. *Az egyirányúság ekvivalenciareláció a tér félegyeneseinek halmazán.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 4.1. Tételt. ■

4.4. Definíció. *A tér pontjaiból képzett rendezett párokat* irányított szakasznak *nevezzük. Az (A, B) rendezett pár* kezdőpontja *az A,* végpontja *pedig a B pont. Egy irányított szakasz* hosszán *kezdő - és végpontjának távolságát értjük. Ha a kezdő - és a végpont különböző, akkor az A kezdőpontú és a B pontot tartalmazó félegyenest tekintjük az* irányított szakasz által meghatározott félegyenesnek*. A közös kezdő - és végpontú irányított szakaszok neve* irányított nullszakasz*, vagy* triviális irányított szakasz*. Két nemtriviális irányított szakasz* azonosan (ellentétesen) irányított*, ha az általuk meghatározott félegyenesek azonosan (ellentétesen) irányítottak.*

4.5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy két nemtriviális irányított szakasz* ekvivalens*, ha azonosan irányítottak és a hosszuk megegyezik. Speciálisan: bármely két triviális irányított szakasz ekvivalens. Az egymással ekvivalens irányított szakaszok halmazát* szabadvektornak*, vagy egyszerűen* vektornak *nevezzük. A vektort alkotó irányított szakaszok a vektor* reprezentánsai*. A triviális irányított szakaszok halmazának neve* null -*, vagy* zérusvektor*.*

4.3. Tétel. *Az irányított szakaszok ekvivalenciája ekvivalenciareláció, melynek osztályai a szabadvektorok.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 4.1. és a 4.2. Tételeket. ■

4.3. Megjegyzés. A vektoralgebra elmélete az egymással ekvivalens irányított szakaszok közötti különbségre érzéketlen; a vektorokkal végzett bármely művelet független kell legyen a vektorokat reprezentáló irányított szakaszok megválasztásától. A továbbiakra nézve ezt alapkövetelménynek tekintjük.

4.6. Definíció. *Egy vektor* hosszán*, vagy* abszolút értékén *– szaknyelven:* normáján *– valamely reprezentánsának a hosszát értjük.*

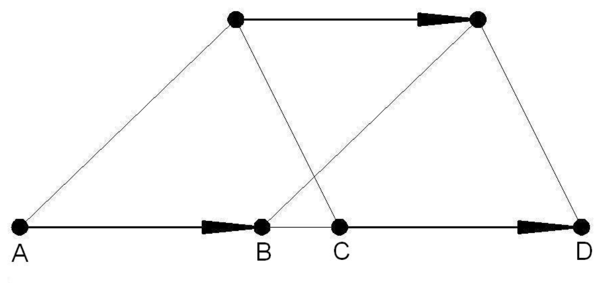
4.4. Megjegyzés. Egy vektor hossza nyilvánvalóan független a reprezentáns megválasztásától, v.ö. 4.3. Megjegyzés.

4.1. Állítás. *Bármely vektor bármely pontból reprezentálható; a kezdőpont rögzítését követően egy vektor reprezentánsának végpontja egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás. A zérusvektor esetében az állítás nyilvánvaló; tekintsünk most egy nemtriviális (A, B) irányított szakasszal reprezentált vektort és legyen C a tér egy A - tól különböző pontja. Két esetet különböztetünk meg:

(i) ha C nem illeszkedik az (A, B) irányított szakasz tartóegyenesére, akkor egészítsük ki az ABC háromszöget egy $ABCD$ paralelogrammává úgy, hogy az (A, B) és a (C, D) irányított szakaszok által meghatározott félegyenesek irányítása azonos legyen. A (C, D) irányított szakasz nyilvánvalóan a vektor C kezdőpontú reprezentánsa.

(ii) Ha a C pont illeszkedik az (A, B) irányított szakasz tartóegyenesére, akkor az első lépésben reprezentáljuk a vektort egy a tartóegyenesre nem illeszkedő pontból, majd alkalmazzuk ismét az (i) - ben látott eljárást a C kezdőpontú reprezentáns előállításához.



5. ábra. Reprezentánsok.

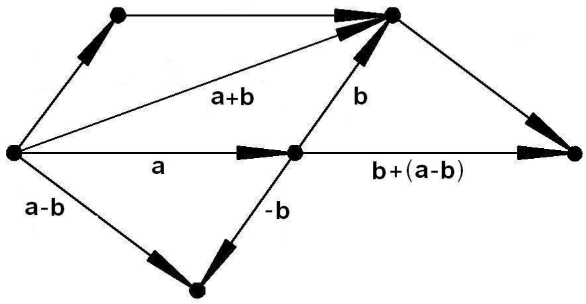
Mivel az irányított szakaszok ekvivalenciája tranzitív, a második esetben is a kívánt C kezdőpontú reprezentánst kapjuk. ■

4.7. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy vektor* párhuzamos *egy egyenessel, vagy egy síkkal, ha valamely – s ezért bármely – reprezentánsának tartóegyenese párhuzamos az egyenessel, vagy a síkkal.* Kollineáris (párhuzamos)*, illetve* komplanáris *vektorokon közös egyenesen, illetve közös síkban reprezentálható vektorokat értünk.*

Az összefűzési eljárás. Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két tetszőleges vektor. A 4.1. Állításra tekintettel a vektorokat reprezentálhatjuk úgy, hogy az $\mathbf{a}$ vektor reprezentánsának végpontja egybeessen a $\mathbf{b}$ vektor reprezentánsának kezdőpontjával. A szóban forgó reprezentációt *összefűzési eljárásnak* nevezzük és a vektorok összegzésére szolgál.

4.8. Definíció. *Legyen A a tér egy tetszőleges pontja és reprezentáljuk az* $\mathbf{a}$*, illetve a* $\mathbf{b}$ *vektorokat rendre az (A, B), illetve a (B, C) irányított szakaszokkal. Az (A, C) reprezentánsú vektor az* $\mathbf{a}$ *és a* $\mathbf{b}$ *vektorok* összszege. *Az* $\mathbf{a}$ *vektor* ellentettje *a (B, A) irányított szakasszal reprezentált vektor, míg az* $\mathbf{a}$ *és a* $\mathbf{b}$ *vektorok* különbségén *az* $\mathbf{a} - \mathbf{b} := \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$

összefüggéssel definiált vektort értjük, ahol $-\mathbf{b}$ *jelöli a* $\mathbf{b}$ *vektor ellentettjét.*



6. ábra. Műveletek vektorokkal.

4.5. Megjegyzés. Úgy is fogalmazhatunk, hogy az $\mathbf{a}$ vektor ellentettje az az egyértelműen meghatározott $\mathbf{x}$ vektor, melyre $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

A paralelogramma - módszer. Az összefűzési eljárással ekvivalens az ún. *paralelogramma - módszer*, melynek során az összeadandó vektorokat közös kezdőpontból reprezentáljuk. Legyen például az (O, A) és az (O, B) irányított szakasz az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektor egy - egy reprezentánsa. Ha a vektorok nem kollineárisak, akkor az (A, O, B) rendezett ponthármas által meghatározott paralelogramma negyedik csúcsát C - vel jelölve, az (O, C) átló az összegvektor reprezentánsa lesz. Kollineáris vektorok esetében szokás *elfajuló paralelogrammáról* beszélni – az elfajuló paralelogramma a paralelogramma „határesete”.

4.4. Tétel. *Az összegvektor független a reprezentánsok megválasztásától.*

Bizonyítás. Reprezentáljuk az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorokat rendre az (A, B), illetve a (B, C) és az (A', B'), illetve a (B', C') irányított szakaszokkal. Az irányított szakaszok ekvivalenciájára tekintettel az $ABA'B'$ és a $BCB'C'$ négyszögek mindegyike egy – esetleg elfajuló – paralelogramma, ahonnan az következik, hogy az AA' egyenes a BB' - vel, a BB' egyenes pedig a CC' - vel párhuzamos. Mivel a párhuzamosság tranzitív reláció, ezért az AA' egyenes párhuzamos a CC' egyenessel. Másfelől

$$d(A, A') = d(B, B') = d(C, C'),$$

hiszen paralelogrammákról van szó. Kapjuk tehát, hogy az $ACA'C'$ négyszög két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő hosszú, azaz a négyszög paralelogramma. Ez azt jelenti, hogy az (A, C) és az (A', C') szakaszok ugyanazt a vektort reprezentálják. ■

Műveleti tulajdonságok. Az összefűzési eljárás egyszerű következménye, hogy a vektorok összeadásának művelete asszociatív, azaz

(i) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$,

továbbá a zérusvektor értelmezése és a 4.8. Definíció alapján

(ii) $\mathbf{a}+\mathbf{0} = \mathbf{a}$ és $\mathbf{a}+(-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$,

ahol $-\mathbf{a}$ jelöli az $\mathbf{a}$ vektor ellentettjét. Végül rámutatunk arra, hogy a vektorösszeadás kommutatív művelet, azaz

(iii) $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$,

ami a paralelogramma - módszer segítségével könnyen ellenőrizhető – legalábbis nemkollineáris vektorok esetében. Ha a vektorok kollineárisak, akkor tekintsünk egy olyan $\mathbf{c}$ vektort, mely sem az $\mathbf{a}$, sem pedig a $\mathbf{b}$ vektorral nem kollineáris. Ekkor

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}+(\mathbf{c}+\mathbf{b}) = (\mathbf{c}+\mathbf{b})+\mathbf{a} = \mathbf{c}+(\mathbf{b}+\mathbf{a}) =$$

$$= (\mathbf{b} + \mathbf{a}) + \mathbf{c},$$

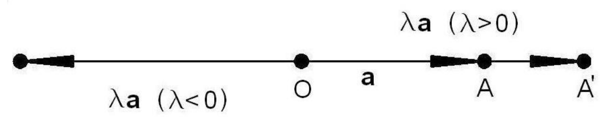
ahonnan következik a kommutativitás az egymással kollineáris vektorok esetében is. A levezetés során felhasználtuk az összeadás asszociativitását és azt, hogy a nemkollineáris $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$, illetve $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}+\mathbf{b}$ vektorok összegzésénél a sorrend közömbös. Ugyanez áll a nemkollineáris $\mathbf{c}$ és $\mathbf{b} + \mathbf{a}$ vektorokra is.

4.4. Feladat. *Az* $\mathbf{a}$ *és a* $\mathbf{b}$ *vektorokat közös kezdőpontból reprezentálva határozza meg a különbségvektor reprezentánsát.*

4.9. Definíció. *Legyen λ egy nemnegatív valós szám és O a tér egy rögzített pontja. Ha $\mathbf{a}$ az (O, A) irányított szakasszal reprezentált nemzérus vektor, akkor a $\lambda\mathbf{a}$ vektor reprezentánsa az (O, A') irányított szakasz, ahol A' az O kezdőpontú, A - t tartalmazó félegyenesnek a*

$$d(O, A') = \lambda d(O, A)$$

összefüggéssel definiált pontja. A negatív számmal vett skalárszorost a



7. ábra. Műveletek vektorokkal.

$$(-\lambda)\mathbf{a} := -(\lambda\mathbf{a}) \tag{1}$$

előírással értelmezzük, ahol a jobb oldalon az $\mathbf{a}$ vektor λ - szorosának ellentettje áll. Speciálisan $\lambda\mathbf{0} := \mathbf{0}$ bármely λ valós szám esetén.

4.5. Feladat. *Ellenőrizze, hogy a vektorok skalárral való szorzása jól-definiált, azaz a* $\lambda\mathbf{a}$ *vektor független az* O *kezdőpont megválasztásától.*

4.2. Állítás. *A vektorok skalárral való szorzása rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

(i) $(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$,

(ii) $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$,

(iii) $(\lambda+\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$,

(iv) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

bármely λ*,* μ *valós szám és* $\mathbf{a}$*,* $\mathbf{b}$ *vektor esetén.*

Bizonyítás. Mind az (i), mind pedig a (iv) tulajdonság nyilvánvaló az értelmezés alapján. Az első esetben például világos, hogy az egyenlet két oldalán szereplő vektorok párhuzamosak, hiszen mindkettő párhuzamos az $\mathbf{a}$ vektorral. Vegyük észre azt is, hogy egy vektor skalárszorosának a hosszát úgy kapjuk, hogy a vektor hosszát felszorozzuk a skalár abszolút értékével. Ezért a bal és a jobb oldalon álló vektor hossza megegyezik. A $\lambda\mu$ szorzat előjele pedig eldönti, hogy a vektorok (reprezentánsainak) irányítása az $\mathbf{a}$, vagy pedig a $-\mathbf{a}$ vektor (reprezentánsainak) irányításával lesz - e azonos.

A skalárral való szorzás (ii) tulajdonságát a $\lambda > 0$ esetben látjuk be. Ha ugyanis $\lambda = 0$, akkor nincs mit bizonyítanunk, míg negatív skalárszorzó esetén a bizonyítás hasonló. Tekintsük a vektorokat reprezentáló (A, B), illetve (B, C) irányított szakaszokat. Legyen továbbá (A, B'), illetve (B', C') rendre a $\lambda\mathbf{a}$, illetve a $\lambda\mathbf{b}$ vektorok egy - egy reprezentánsa. Két esetet különböztetünk meg:

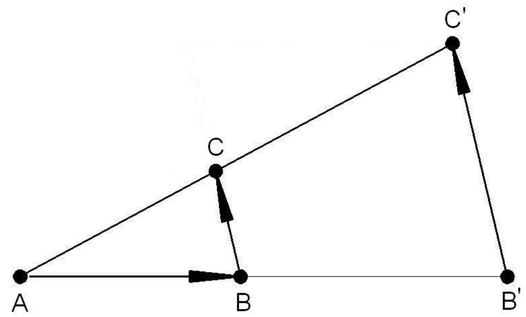
(i) ha a szóban forgó vektorok nem kollineárisak, akkor a

$$d(A, B') = \lambda d(A, B)$$

összefüggést, továbbá a $\mathbf{b}$, illetve $\lambda\mathbf{b}$ vektorok párhuzamosságát figyelembe véve

$$d(A, C') = \lambda d(A, C)$$

következik a párhuzamos szelők tételei szerint.



8. ábra. Műveleti tulajdonságok.

Ez azt jelenti, hogy az (A, C') irányított szakasz a $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ vektort reprezentálja, míg az összefűzési eljárás alapján ez a $\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$ összegvektor reprezentánsa is.

(ii) Tételezzük most fel, hogy a vektorok közös egyenesen reprezentálhatók és válasszunk egy a közös egyenessel nem párhuzamos $\mathbf{c}$ vektort. Az első eset alapján

$$\lambda((\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + \lambda\mathbf{c},$$

másfelől

$$\lambda((\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})) = \lambda\mathbf{a}+\lambda(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}+\lambda\mathbf{c}.$$

A formulák összevetése mutatja, hogy a szóban forgó tulajdonság ebben az esetben is áll.

A (iii) részállítás bizonyításához vegyük észre, hogy az egyenlet két oldalán szereplő vektorok párhuzamosak, hiszen mindkettő párhuzamos az **a** vektorral. A

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} - (-\mu)\mathbf{a}$$

átalakítással a jobb oldalon álló vektor hosszának a kiszámítására alkalmazhatjuk a 4.4. Feladat eredményét: különbségvektor hossza a közös kezdőpontú reprezentánsok végpontjainak a távolsága. Esetünkben egy olyan számegyenes λ, illetve $-\mu$ koordinátájú pontjainak a távolságáról van szó, melyen az egység éppen az **a** vektor hosszával egyezik meg. A pontok távolsága tehát

$$|\lambda - (-\mu)| = |\lambda + \mu| \text{ egységnyi,}$$

azaz **a** hosszát fel kell szoroznunk a $\lambda+\mu$ valós szám abszolút értékével, ahogyan a bal oldali vektor esetében is. Az összeg előjele pedig eldönti, hogy a vektorok (reprezentánsainak) irányítása az **a**, vagy pedig a $-\mathbf{a}$ vektor (reprezentánsainak) irányításával lesz - e azonos. ∎

4.6. Megjegyzés. Figyelembe véve az összeadás és a skalárral való szorzás kapcsán összefoglalt műveleti tulajdonságokat, azt mondhatjuk, hogy a szabadvektorok egy *valós vektorteret* alkotnak. Az absztrakt vektortér - és vektorfogalom kialakításánál ugyanis éppen ezek a tulajdonságok szolgálnak az absztrakció alapjául: a *vektor* csupán egy halmaz elemeire vonatkozó elnevezés, ha értelmezve van az *összeadás*, illetve a *skalárral való szorzás* művelete és ezek rendelkeznek az említett tulajdonságokkal. A továbbiakban a vektorterek elméletének alapjait tekintjük át: lineáris függőség, függetlenség, bázis, dimenzió stb. Érdemes megfigyelni, hogy a szerepeltetett fogalmak és bizonyított összefüggések közül melyik kötődik szigorúan a geometriai és melyik az absztrakt szemléletmódhoz (is).

4.10. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $\mathbf{b}$ *vektor az* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *vektorok* lineáris kombinációja*, ha léteznek* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *skalárok úgy, hogy*

$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{a}_n.$$

Az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *vektorokat* lineárisan függetlennek *nevezzük, ha a zérusvektor csak triviálisan, azaz csupa nulla együtthatóval állítható elő a vektorok lineáris kombinációjaként. Ellenkező esetben a vektorrendszer* lineárisan függő*.*

4.7. Megjegyzés. Egyszerűen átgondolható, hogy

(i) egytagú vektorrendszer pontosan akkor lineárisan függő, ha a zérusvektorból áll,

(ii) a zérusvektort tartalmazó bármely vektorrendszer lineárisan függő,

(iii) ha egy vektorrendszernek van lineárisan függő részrendszere, akkor maga is lineárisan függő;

vegyük észre, hogy a második észrevétel – az elsőre tekintettel – a harmadik speciális esete.

Geometriai szempontból a vektorok lineáris függősége egy olyan nemtriviális, azaz nem egypontú zárt töröttvonal létezésével ekvivalens, melynek oldalai párhuzamosak a vektorokkal (reprezentáljuk a zérusvektort előállító összeg tagjait a tér egy tetszőleges pontjából kiindulva az összefűzési szabály szerint és vegyük figyelembe, hogy a zérusvektor reprezentánsainak kezdő - és végpontja azonos).

4.3. Állítás. *Egy nem egytagú vektorrendszer pontosan akkor lineárisan függő, ha valamelyik tagja előáll a többi lineáris kombinációjaként.*

Bizonyítás. Mivel az $\mathbf{a}_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j \mathbf{a}_j$ összefüggés átrendezése a zérusvektor

$$\mathbf{0} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \mathbf{a}_{i-1} - \mathbf{a}_i + \lambda_{i+1} \mathbf{a}_{i+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{a}_n$$

nemtriviális előállításához vezet, a feltétel elegendősége nyilvánvaló. Megfordítva tegyük fel, hogy a vektorrendszer lineárisan függő. Ekkor – definíció szerint – a zérusvektor nem csak triviálisan állítható elő a vektorok lineáris kombinációjaként és az egyenlet a rendszer bármely nemzérus együtthatójú vektorára átrendezhető:

$$\mathbf{a}_i = \frac{1}{\lambda_i} \sum_{j \neq i} \lambda_j \mathbf{a}_j,$$

ahol – feltétel szerint – $\lambda_i \neq 0$. ■

4.5. Tétel. (A lineáris függőség geometriai jellemzése)

(i) *az* **a** *vektor pontosan akkor lineárisan függő, ha a zérusvektor,*

(ii) *az* **a** *és a* **b** *vektorok pontosan akkor lineárisan függők, ha kollineárisak, azaz egy egyenesen reprezentálhatók,*

(iii) *az* **a**, **b** *és a* **c** *vektorok pontosan akkor lineárisan függők, ha komplanárisak, azaz közös síkban reprezentálhatók,*

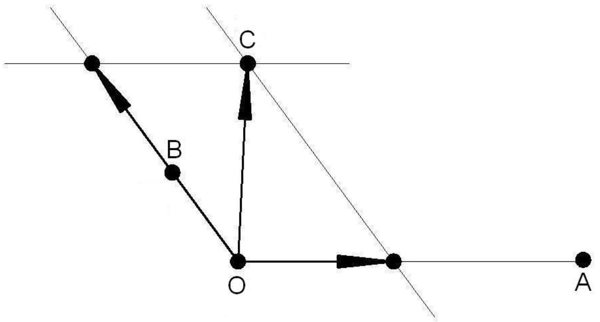
(iv) *bármely négy vektor lineárisan függő.*

Bizonyítás. A tétel (i) része csupán a 4.7. Megjegyzés felelevenítése. A további észrevételeket ellenőrizendő, legyen O a tér egy tetszőlegesen rögzített pontja és tekintsük az (O, A), (O, B), (O, C) és az (O, D) irányított szakaszokkal reprezentált **a**, **b**, **c** és **d** vektorokat.

Ha az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok lineárisan függők, akkor a 4.3. Állítás szerint például $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ teljesül, ami – a skalárszorzó előjelétől függően – azt jelenti, hogy a $\mathbf{b}$ vektor O kezdőpontú reprezentánsának végpontja vagy az O kezdőpontú, A - t tartalmazó félegyenesen, vagy pedig a kiegészítő félegyenesen van. Ennélfogva az O, A és a B pontok kollineárisak (egy egyenesre illeszkednek). Megfordítva tegyük fel, hogy a vektorok egy egyenesen reprezentálhatók, azaz az O, A és a B pontok kollineárisak. Ha $O = A$, akkor $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ és a 4.7. Megjegyzés értelmében a vektorrendszer lineárisan függő. Ellenkező esetben $\mathbf{b} = \pm\lambda\mathbf{a}$, ahol λ az OB és az OA szakaszok hosszának a hányadosa és a lineáris kombináció előjele attól függ, hogy az O pont elválasztja - e közös egyenesükön a reprezentánsok végpontjait, vagy sem.

A harmadik észrevétel bizonyítása érdekében tekintsük a lineárisan függő $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ szabadvektorokat és a határozottság kedvéért tegyük föl, hogy $\mathbf{c}$ előáll az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$. Mivel sem az összegvektor reprezentánsát előállító összefűzési szabály, sem pedig a skalárral való szorzás nem vezet ki az összeadandó és a skalárral szorzandó $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok reprezentánsainak síkjából, ezért a C pont is szükségképpen eleme ennek a síknak. Megfordítva tegyük fel, hogy az O, A, B és a C pontok egy síkban vannak. Ha az első három pont kollineáris, akkor a tétel (ii) része miatt már az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok is lineárisan függő rendszert alkotnak. Ez pedig maga után vonja a $\mathbf{c}$ - vel kiegészített vektorrendszer függőségét is. Feltehető ezért, hogy a szóban forgó három pont az egyértelműen meghatározott S síkot feszíti ki. Vetítsük a sík C pontját egyrészt az OA egyenesre az OB egyenessel párhuzamosan, másrészt pedig az OB egyenesre az OA egyenessel párhuzamosan. Az O pont és a vetületi pontok által meghatározott irányított szakaszok rendre egy $\lambda\mathbf{a}$, illetve egy $\mu\mathbf{b}$ alakú vektort reprezentálnak, melyek összege éppen a $\mathbf{c}$ vektor, azaz

$$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}.$$



9. ábra. A 4.5. Tétel (iii) bizonyítása.

A 4.3. Állítást figyelembe véve ez azt jelenti, hogy a vektorrendszer lineárisan függő.

Az utolsó észrevétel bizonyítására rátérve tekintsük először az általános esetet. Tegyük fel, hogy az O, A, B és a C pontok *általános helyzetűek*, azaz a C pont nem illeszkedik az első három által kifeszített S síkra. Alkalmazzuk ezek után a párhuzamos vetítés technikáját úgy, hogy a D pontot egyrészt az S síkra vetítjük az OC egyenessel párhuzamosan, másrészt pedig az S síkkal párhuzamosan az OC egyenesre. Az eljárást az S síkban is folytatva, az O pont és a vetületi pontok által meghatározott irányított szakaszok rendre egy $\lambda\mathbf{a}$, egy $\mu\mathbf{b}$, illetve egy $\nu\mathbf{c}$ alakú vektort reprezentálnak, melyek összege éppen a $\mathbf{d}$ vektor, azaz

$$\mathbf{d} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}.$$

A 4.3. Állítást figyelembe véve ez azt jelenti, hogy a vektorrendszer lineárisan függő. Ha O, A és B kollineáris, vagy ha nem kollineárisak ugyan, de a C pont illeszkedik az általuk kifeszített síkra, akkor a tétel (ii), illetve (iii) része miatt már az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$, illetve az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és a $\mathbf{c}$ vektorok is lineárisan függő rendszert alkotnak. Ez pedig maga után vonja a $\mathbf{d}$ - vel kiegészített vektorrendszer függőségét is. ■

4.11. Definíció. *Egy háromtagú, lineárisan független vektorrendszert* bázisnak *nevezünk.*

4.8. Megjegyzés. Az előző tétel (iii) részére tekintettel egy háromtagú vektorrendszer pontosan akkor bázis, ha közös kezdőpontból reprezentálva őket, a kezdőpont és a reprezentánsok végpontjai nem esnek egy síkba. Egy bázis kijelölése tehát ekvivalens egy általános helyzetű, azaz nemkomplanáris pontnégyes megadásával, megállapodva a pontok státuszát illetően is: kezdőpont, illetve végpontok. A bázis fogalma kitüntetett szerepet játszik a vektorterek elméletében. A bázist alkotó vektorok számát a vektortér *dimenziójának* nevezzük. Vizsgálataink alapján tehát azt mondhatjuk, hogy a szabadvektorok vektortere – áttételesen pedig a geometriai tér – háromdimenziós.

4.4. Állítás. *A tagok sorrendjétől eltekintve bármely vektor egyértelműen állítható elő egy bázis tagjainak lineáris kombinációjaként. A kombináló együtthatók a vektor adott bázisra vonatkozó* koordinátái.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ a tér bázisa. A 4.5. Tétel (iv) szerint bármely $\mathbf{d}$ vektor előáll a

$$\mathbf{d} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$$

alakban – az előállítás módszere a párhuzamos vetítés technikája. Ha egyidejűleg

$$\mathbf{d} = \lambda'\mathbf{a} + \mu'\mathbf{b} + \nu'\mathbf{c},$$

akkor átrendezéssel

$$\mathbf{0} = (\lambda - \lambda')\mathbf{a} + (\mu - \mu')\mathbf{b} + (\nu - \nu')\mathbf{c}$$

következik, ami a jobb oldalon szereplő vektorok függetlenségére tekintettel maga után vonja, hogy

$$\lambda - \lambda' = 0, \quad \text{azaz} \quad \lambda = \lambda',$$

továbbá

$$\mu - \mu' = 0, \quad \text{azaz} \quad \mu = \mu' \quad \text{és} \quad \nu - \nu' = 0, \quad \text{azaz} \quad \nu = \nu'.$$

Ennélfogva a $\mathbf{d}$ vektor adott bázisra vonatkozó koordinátái egyértelműen meghatározottak. ■

Vektorkoordináták és vektorműveletek. A vektorok körében értelmezett összeadás és skalárral való szorzás tulajdonságait figyelembe véve egyszerűen látható, hogy összegvektor koordinátáit a koordináták összegzésével, a skalárszoros koordinátáit pedig a koordináták skalárszorosaként kapjuk. Legyen ugyanis

$$\mathbf{d}_1 = \lambda_1\mathbf{a} + \mu_1\mathbf{b} + \nu_1\mathbf{c} \quad \text{és} \quad \mathbf{d}_2 = \lambda_2\mathbf{a} + \mu_2\mathbf{b} + \nu_2\mathbf{c}.$$

Ekkor

$$\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{a} + (\mu_1 + \mu_2)\mathbf{b} + (\nu_1 + \nu_2)\mathbf{c},$$

továbbá

$$\lambda\mathbf{d}_1 = (\lambda\lambda_1)\mathbf{a} + (\lambda\mu_1)\mathbf{b} + (\lambda\nu_1)\mathbf{c}$$

teljesül bármely λ valós szám esetén.

4.6. Feladat. *Tekintsük a rendezett valós számhármasok halmazát és definiáljuk az összeadás*

$$(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) + (\lambda_2, \mu_2, \nu_2) := (\lambda_1 + \lambda_2, \mu_1 + \mu_2, \nu_1 + \nu_2)$$

műveletét és a valós számmal való szorzást:

$$\lambda(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) := (\lambda\lambda_1, \lambda\mu_1, \lambda\nu_1).$$

Bizonyítsa be, hogy érvényesek a szabadvektorok összeadása és skalárral való szorzása kapcsán összefoglalt műveleti tulajdonságok.

Az előző feladat eredménye alapján azt mondhatjuk, hogy a rendezett valós számhármasok valós vektorteret alkotnak, mely – az **a**, **b** és **c** vektorokból álló bázis rögzítését követően – természetes módon beazonosítható a szabadvektorok vektorterével:

$$(\lambda, \mu, \nu) \;\mapsto\; \mathbf{d} := \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}.$$

Ez a vektortér tehát ugyancsak háromdimenziós. Az ún. *kanonikus bázis* tagjai pedig az

$$(1,0,0), \quad (0,1,0) \text{ és } (0,0,1)$$

vektorok.

4.7. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy bármely λ valós szám esetén a*

$$\mathbf{p} = (\lambda, \lambda+1, \lambda+2), \quad \mathbf{q} = (\lambda+3, \lambda+4, \lambda+5), \quad \mathbf{r} = (\lambda+6, \lambda+7, \lambda+8)$$

vektorok lineárisan függők. A számhármasoknak szabadvektorokat megfeleltetve, mit mondhatunk a közös kezdőpontú reprezentánsok végpontjairól?

Alkalmazás. A vektorokkal kapcsolatos ismeretek felhasználhatók számos geometriai feladat megoldása során. Illusztrációképpen tekintsük a következő problémát: *szerkesszünk ötszöget, ha adottak az ötszög oldalfelező pontjai.*

A feladat megoldásához rögzítsünk egy O kezdőpontot és legyenek $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{f}_4$ és $\mathbf{f}_5$ rendre az (O, F_1), (O, F_2), (O, F_3), (O, F_4) és (O, F_5) reprezentánsú vektorok, ahol F_1, F_2, F_3, F_4 és F_5 az adott oldalfelező pontok. Ezeket a vektorokat a szóban forgó pontok *helyvektoraként* is említjük az O kezdőpontra vonatkozóan. Ha $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_4$ és $\mathbf{x}_5$ a szerkesztendő ötszög csúcsainak helyvektorai, akkor

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2), \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3), \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4),$$

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_5) \text{ és } \mathbf{f}_5 = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_5 + \mathbf{x}_1).$$

Az összefüggéseket váltakozó előjellel összeadva

$$\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_4 + \mathbf{f}_5 = \mathbf{x}_1,$$

ahol a bal oldal O kezdőpontú reprezentánsának végpontja – az ötszög egyik csúcsaként – szerkeszthető.

4.8. Feladat. *Diszkutálja a hétszög esetét – általánosítható - e a gondolatmenet tetszőleges sokszögre?*

4.9. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy az O pont pontosan akkor esik egybe az ABC háromszög súlypontjával, ha az (O,A), (O,B) és az (O,C) reprezentánsú vektorok összege a zérusvektor.*

4.9. Megjegyzés. A súlypont definíciója is lehetne a bizonyított összefüggés: az ABC háromszög *súlypontja* az az egyértelműen meghatározott O pont, melyre az (O,A), (O,B) és az (O,C) reprezentánsú vektorok összege a zérusvektor. Ennek a megfogalmazásnak az előnye, hogy kézenfekvő módon általánosítható háromnál több – de véges – tagszámú pontrendszerekre.

Legyen A és B két különböző pont és tekintsük az általuk meghatározott egyenes egy tetszőleges P pontját. A P pont helyzetét az (A,P) reprezentánsú $\mathbf{p}$ helyvektor egyértelműen meghatározza. Vektoralgebrai ismereteink alapján pedig

$$\mathbf{p} = r\mathbf{a}$$

írható valamely r valós szám mellett, ahol $\mathbf{a}$ az (A, B) reprezentánsú vektor. Ez az eljárás lehetővé teszi, hogy az egyenes pontjait valós számok segítségével adjuk meg, az egyenest pedig koordinátázzuk. Szemléletesen szólva egy olyan számegyenest konstruáltunk, melynek kezdőpontja az A pont, egységpontja pedig a B. Az r koordináta értéke alapján könnyen eldönthető, hogy a P pont

(i) az AB szakasznak,

(ii) az A kezdőpontú, B - t tartalmazó félegyenes kiegészítő félegyenesének,

(iii) a B kezdőpontú, A - t tartalmazó félegyenes kiegészítő félegyenesének

a pontja - e.

4.10. Feladat. *A szakasz definícióját figyelembe véve igazolja, hogy a P pont lehetséges helyzeteinek az áttekintése teljes.*

Egy másik lehetőség az egyenes pontjainak mennyiségi jellemzésére az *osztóviszony* fogalmán alapul. Tekintsünk egy a B - től különböző P pontot az egyenesen. Ha $\mathbf{x}$ az (A, P), $\mathbf{y}$ pedig a (P, B) irányított szakasz által reprezentált vektor, akkor az

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$$

összefüggés segítségével definiált λ valós számot a P pont A és B alappontokra vonatkozó *osztóviszonyának* nevezzük. Az osztóviszony jelölésére az (ABP) szimbólumot használjuk. Vegyük észre, hogy a $\lambda = -1$ esetben $A = B$ *ellentmondás* következik, azaz az osztóviszony lehetséges értéke csak egy ettől különböző valós szám lehet.

4.1. Következmény. *Ha* $(ABP) = \lambda$, *akkor*

$$\mathbf{x} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\mathbf{a},$$

ahol $\mathbf{a}$ *az* (A, B) *reprezentánsú vektor.*

Bizonyítás. Az összefűzési szabályra tekintettel $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{a}$, ahonnan λ - val való szorzás után

$$(\lambda + 1)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a},$$

s végül a bizonyítandó összefüggés következik. ■

Eredményünket kissé átfogalmazva, az

$$f(\lambda) := \frac{\lambda}{1+\lambda} \qquad (\lambda \neq -1)$$

függvény megadja a P pont r koordinátáját az osztóviszony értékének függvényében.

4.11. Feladat. *Figyelembe véve, hogy*

$$\frac{\lambda}{1+\lambda} = 1 - \frac{1}{1+\lambda},$$

ábrázolja az f *függvényt és az osztóviszony értéke alapján döntse el, hogy a* P *pont*

(i) *az* AB *szakasznak,*

(ii) *az* A *kezdőpontú,* B *- t tartalmazó félegyenes kiegészítő félegyenesének,*

(iii) *a* B *kezdőpontú,* A *- t tartalmazó félegyenes kiegészítő félegyenesének*

a pontja - e.

5. Szögfüggvények

Térbeli meggondolásainkat most a tér egy rögzített S síkját alapul véve specializáljuk. Jelölje $V(S)$ a síkkal párhuzamos vektorok halmazát. Mivel sem az összegvektor reprezentánsát előállító összefűzési szabály, sem pedig a skalárral való szorzás szabálya nem vezet ki az összeadandó és a skalárral szorzandó vektorok reprezentánsainak síkjából, ezért a $V(S)$ halmaz maga is vektortér a szóban forgó műveletekkel. A 4.5. Tétel alapján a $V(S)$ vektortér bármely háromtagú vektorrendszere lineárisan függő. A kéttagú, lineárisan független rendszereket *bázisnak* nevezzük. $V(S)$ dimenziója tehát kettő és áttételesen kétdimenziós alakzatok a tér síkjai is. Hasonlóan: a tér egyenesei egydimenziós alakzatok – v.ö. az egyenes koordinátázása.

5.1. Definíció. Egybevágósági transzformáción *a sík olyan önmagára való leképezését értjük, mely távolságtartó.*

Könnyen igazolható, hogy minden egybevágósági transzformáció kölcsönösen egyértelmű: a távolságtartás maga után vonja, hogy különböző pontok képe különböző, hiszen két pont között a távolság akkor és csak akkor nulla, ha a szóban forgó két pont egybeesik.

5.1. Példa. *Rögzítsük a sík egy l egyenesét és a*

$$\rho\colon S \to S, \quad P \mapsto \rho(P) = P'$$

transzformációt értelmezzük a következő előírásokkal:

(i) *ha P illeszkedik az l egyenesre, akkor $P' := P$,*

(ii) *ha P nem illeszkedik az l egyenesre, akkor P' legyen az az egyértelműen meghatározott pont, melyre l a PP' szakasz felező merőlegese.*

Ezt a transzformációt nevezzük az l egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözésnek.

5.2. Definíció. *Legyen* $\mathbf{v}$ *az* S *síkban reprezentálható vektor. Azt a transzformációt, mely minden* P *ponthoz a vektor* P *kezdőpontú reprezentánsának végpontját rendeli a* $\mathbf{v}$ *vektorral történő* párhuzamos eltolásnak, *röviden* eltolásnak *nevezzük.*

5.1. Következmény. *Az eltolások egybevágósági transzformációk.*

A *forgások* olyan egybevágósági transzformációk, melyeknek egy és csak egy fixpontja van, az ún. *forgáscentrum.* Egy forgás „mennyiségi" leírásához további két adatra van szükség: a *forgásszögre* és a *forgásirányra.* Többnyire azt a konvenciót szokás követni, hogy az óramutató járásával ellentétes forgásirány a pozitív – mi is ehhez tartjuk magunkat. A forgásszög és a forgásirány szintézise a forgások előjeles mértéke: a forgásszöget negatív előjellel látjuk el, ha a forgásirány negatív. A szemlélettel összhangban a forgások előjeles mértéke felett a teljesszög többszöröseinek erejéig szabadon rendelkezünk. Egy forgás előjeles mértékeként tehát az α és a β valós számok ugyanazt jelentik, ha $\alpha - \beta = 2k\pi$ teljesül valamely k egész szám esetén. Speciálisan a sík pontjai helyben hagyó *identikus transzformációt* is forgásnak tekintjük. Ebben az esetben a forgáscentrum tetszőleges, míg az előjeles mérték a teljesszög bármely többszöröse.

Emlékeztetünk rá, hogy a szögvonalakat közös kezdőpontú félegyenesek uniójaként értelmeztük. Ha a szárak sorrendjét is megadjuk, akkor *irányított szögvonalat* kapunk. Egy irányított szögvonal tehát közös kezdőpontú félegyenesekből alkotott rendezett pár. Megállapodunk abban, hogy az $\angle AOB$ jelölés mellett a szögvonal első szára az O kezdőpontú, A - t tartalmazó félegyenes, míg a második szár az O kezdőpontú, B - t tartalmazó félegyenes.

5.3. Definíció. *Egy irányított szögvonal mértékén azoknak a forgások nak az előjeles mértékét értjük, melyek a szög első szárát a második szárába viszik át.*

5.2. Következmény. *Ha egy irányított szögvonal radiánban kifejezett mértéke α, akkor bármely mértéke $\alpha + 2k\pi$ alakú, ahol k tetszőleges egész szám.*

5.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $\mathbf{b}$ *vektor α előjeles mértékű forgatással származtatható az* $\mathbf{a}$ *vektorból, ha a vektorok egyenlő hosszúak és közös kezdőpontú (O, B), illetve (O, A) reprezentánsaik esetén az $\angle AOB$ irányított szögvonal mértéke α.*

Alaprendszerek. Tekintsünk egy tetszőleges $\mathbf{i}$ egységvektort és egészítsük ki bázissá $+90°$ - os, illetve $-90°$ - os elforgatottja segítségével. Az így kapott $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ egységvektorokból álló bázist *pozitív*, vagy *jobbsodrású*, illetve *negatív*, vagy *balsodrású alaprendszernek*, tagjait pedig *alapvektoroknak* nevezzük.

A továbbiakban fontos szerepet játszik majd az a tény, hogy *forgatással bármely két egyező sodrású alaprendszer egymásba vihető*. Tegyük fel ugyanis, hogy az $\mathbf{i}$ és a $\mathbf{j}$, illetve az $\mathbf{i}'$ és a $\mathbf{j}'$ vektorok egy - egy alaprendszert alkotnak és tekintsük az $\mathbf{e} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ vektort, ahol x és y tetszőleges valós számok. Az alaprendszer változtatása egy vektor - vektor hozzárendelést definiál az

$$\mathbf{e} \to \mathbf{e}' := x\mathbf{i}' + y\mathbf{j}' \tag{2}$$

előírás szerint.

5.1. Tétel. *A* (2) *típusú vektortranszformáció a forgás, vagy a tengelyes tükrözés vektoralgebrai megfelelője attól függően, hogy az alaprendszerek sodrása megegyezik - e, vagy sem.*

Bizonyítás. Ha a vektorokat a sík egy rögzített O pontjából reprezentáljuk az (O, E) és az (O, E') irányított szakaszokkal, akkor végpontjaik $E \to E'$ megfeleltetése a (2) által indukált ponttranszformáció. Tekintsünk egy további $\mathbf{f} = z\mathbf{i} + w\mathbf{j}$ vektort és legyen (O, F) az O kezdőpontú reprezentáns. A 4.4. Feladat eredménye szerint az E és az F pontok távolsága éppen az

$$\mathbf{f} - \mathbf{e} = (z - x)\mathbf{i} + (w - y)\mathbf{j}$$

különbségvektor hossza, amit Pitagorasz tételének segítségével a

$$d^2(E, F) = (z - x)^2 + (w - y)^2$$

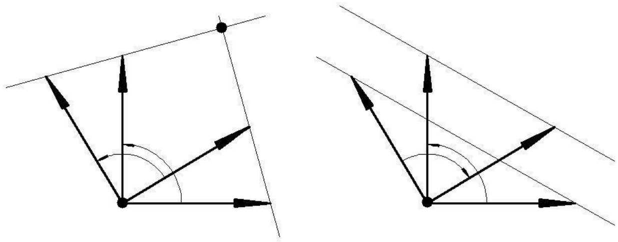
alakban írhatunk fel. Gondolatmenetünket a képvektorok különbségére alkalmazva kapjuk, hogy

$$d^2(E', F') = (z - x)^2 + (w - y)^2,$$

ami azt jelenti, hogy a végpontok megfeleltetése egybevágósági transzformáció – megőrzi a pontok távolságát. Mivel a zérusvektor képe önmaga, ezért O nyilvánvalóan fixpont. Most írjuk át a fixpontokat jellemző $E' = E$ egyenletet vektoriális alakba:

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad x(\mathbf{i}' - \mathbf{i}) + y(\mathbf{j}' - \mathbf{j}) = \mathbf{0}. \tag{3}$$

1. eset. Ha az alaprendszerek egybeesenek, akkor minden pont fixpont. Ez az identikus transzformáció esete, amit speciális forgásnak tekintünk – a forgáscentrum tetszőleges, például éppen az O pont. Különböző, de azonos sodrású alaprendszerek esetében viszont az alapvektorok különbségét képezve lineárisan független vektorrendszerhez jutunk, ahonnan $x = y = 0$ következik. Ez azt jelenti, hogy az O ponton kívül nincs további fixpont, azaz a ponttranszformáció ezúttal is O centrumú forgás. A továbbiak szempontjából fontos $\mathbf{i}' = \mathbf{j}$, illetve

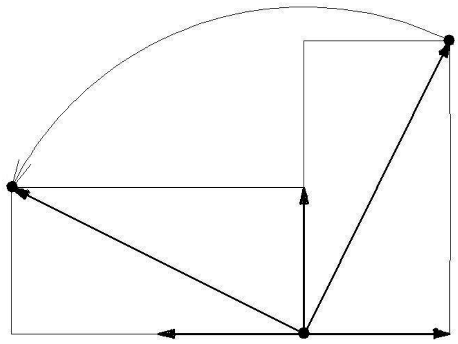


10. ábra. Egyező, illetve különböző sodrású alaprendszerek.

$\mathbf{j}' = -\mathbf{i}$ választással a $+90°$ - os forgást kapjuk a szokásos koordinátacserét és előjelváltást tükröző

$$\mathbf{e} \to \mathbf{e}' := (-y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

formula szerint.



11. ábra. $+90°$ - os forgás az origó körül.

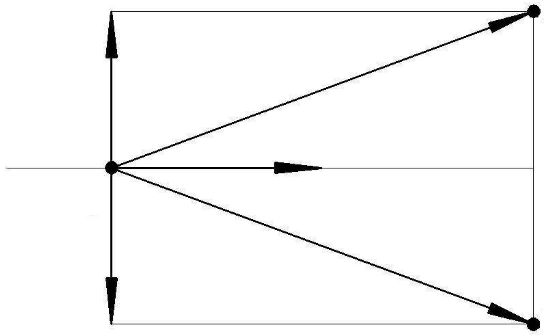
2. eset. Ha az alaprendszerek sodrása különböző, akkor az alapvektorok különbsége lineárisan függő rendszert alkot. A (3) fixpontegyenletnek van tehát a zérusvektortól különböző megoldása is. Ha például a második alapvektorok különbözőek, akkor

$$\mathbf{i}' - \mathbf{i} = \lambda(\mathbf{j}' - \mathbf{j})$$

teljesül valamely λ skalár mellett és a fixpontegyenlet a $\lambda x + y = 0$ alakot ölti. Innen

$$\mathbf{e} = x(\mathbf{i} - \lambda\mathbf{j}),$$

ami azt jelenti, hogy az $\mathbf{e}$ vektor O kezdőpontú reprezentánsának végpontja az O pontra illeszkedő és az $\mathbf{i} - \lambda\mathbf{j}$ vektorral párhuzamos egyenesen – a tükörtengelyen – van. A továbbiak szempontjából fontos $\mathbf{i}' = \mathbf{i}$, illetve $\mathbf{j}' = -\mathbf{j}$ választással $\lambda = 0$, a tükörtengely pedig az első alapvektor O kezdőpontú reprezentánsának tartóegyenese. ■



12. ábra. Tükrözés az első alapvektor tartóegyenesére.

5.1. Feladat. *Mi a közös kezdőpontból reprezentált alapvektorok által bezárt szög szögfelezőjére vonatkozó tükrözés vektoralgebrai megfelelője?*

5.5. Definíció. *Tekintsük az* $\mathbf{i}$ *és a* $\mathbf{j}$ *vektorokból álló jobbsodrású alaprendszert. Ha az* $\mathbf{e}$ *egységvektor* α *előjeles mértékű forgatással származik az első alapvektorból, akkor a rögzített bázisra vonatkozó első* *koordinátáját az α szög* koszinuszának*, második koordinátáját pedig az α szög* szinuszának *nevezzük:*

$$\mathbf{e} = \cos\alpha\mathbf{i} + \sin\alpha\mathbf{j}.$$

5.1. Megjegyzés. *Mivel a jobbsodrású alaprendszerek forgatással egymásba vihetők, ugyanez áll az első alapvektor elforgatottjaira is – a* (2) *képlet szerint ez azt jelenti, hogy egy szög szinusza, illetve koszinusza független az alaprendszer megválasztásától:*

$$\cos'\alpha = \cos\alpha \quad \textit{és} \quad \sin'\alpha = \sin\alpha.$$

5.3. Következmény.

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \qquad \text{(trigonometrikus Pitagorasz - tétel)},$$

továbbá

$$\cos\,(-\alpha) = \cos\alpha \quad \textit{és} \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

Bizonyítás. Első észrevételünk bizonyításához csupán azt kell észrevennünk, hogy az első alapvektor elforgatottjai ugyancsak egységvektorok, azaz koordinátáik négyzetösszege 1. A második és a harmadik összefüggés levezetéséhez pedig tekintsük az $\mathbf{i}$ és a $\mathbf{j}$, illetve az $\mathbf{i}' = \mathbf{i}$ és a $\mathbf{j}' = -\mathbf{j}$ vektorokból álló alaprendszereket. Mivel ezek sodrása különböző, ezért a (2) vektortranszformáció tengelyes tükrözés. A vektorokat közös kezdőpontból reprezentálva könnyen látható, hogy a tükörtengely éppen az $\mathbf{i}$ vektor reprezentánsának tartóegyenese. Ha tehát az $\mathbf{e}$ vektor α előjeles mértékű forgatással származik az $\mathbf{i}$ vektorból, akkor a képvektort $-\alpha$ mértékű forgatással állíthatjuk elő. Ennélfogva

$$\mathbf{e}' = \cos(-\alpha)\mathbf{i} + \sin(-\alpha)\mathbf{j},$$

másfelől pedig a (2) képlet szerint

$$\mathbf{e}' = \cos\alpha\mathbf{i}' + \sin\alpha\mathbf{j}' = \cos\alpha\mathbf{i} + \sin\alpha(-\mathbf{j}) = \cos\alpha\mathbf{i} - \sin\alpha\mathbf{j}.$$

A formulák összevetése éppen a kívánt összefüggéseket adja. ■

5.2. Tétel. (Addíciós tételek) *Bármely α és β szög esetén*

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Speciálisan a kétszeres szögekre vonatkozó összefüggéseket kapjuk:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad \textit{és} \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Bizonyítás. Tekintsük azt az $\mathbf{i}'$ egységvektort, mely az $\mathbf{i}$ vektor β előjeles mértékű forgatásával áll elő, azaz

$$\mathbf{i}' = \cos\beta\mathbf{i} + \sin\beta\mathbf{j}$$

és egészítsük ki a $\mathbf{j}'$ egységvektorral úgy, hogy az $\mathbf{i}'$ és a $\mathbf{j}'$ vektorokból álló alaprendszer jobbsodrású legyen. A koordináták cseréje és az alkalmas előjelválasztás mutatja, hogy az $\mathbf{i}'$ vektor $+90°$ - os elforgatottja a

$$\mathbf{j}' = (-\sin\beta)\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j}$$

alakban írható fel. Mivel az $\mathbf{i}$ és a $\mathbf{j}$, illetve az $\mathbf{i}'$ és a $\mathbf{j}'$ vektorokból álló alaprendszerek sodrása megegyezik, ezért a (2) vektortranszformáció forgás. Ha tehát az $\mathbf{e}$ vektor α előjeles mértékű forgatással származik az $\mathbf{i}$ vektorból, akkor a képvektort $\alpha+\beta$ mértékű forgatással állíthatjuk elő. Ennélfogva

$$\mathbf{e}' = \cos(\alpha+\beta)\mathbf{i} + \sin(\alpha+\beta)\mathbf{j} \tag{4}$$

Másfelől pedig a (2) képlet szerint

$$\begin{aligned} \mathbf{e}' &= \cos\alpha\mathbf{i}' + \sin\alpha\mathbf{j}' = \\ &= \cos\alpha(\cos\beta\mathbf{i} + \sin\beta\mathbf{j}) + \sin\alpha((-\sin\beta)\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j}) = \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\mathbf{i} + (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

A formulák összevetése éppen a kívánt összefüggéseket adja. ■

5.4. Következmény. *Bármely α és β szög esetén*

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Az alapvektorokkal párhuzamos egységvektorok koordinátáival kitöltve az

x	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$\sin x$	0	1	0	-1	0

értéktáblázatot, az addíciós tételek speciális eseteit vezethetjük le:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \quad \text{és} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha, \tag{5}$$

azaz pótszög koszinusza, illetve szinusza a szög szinuszával, illetve koszinuszával egyenlő, továbbá

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \quad \text{és} \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \tag{6}$$

azaz mellékszög koszinusza a szög koszinuszának ellentettje, illetve mellékszög szinusza a szög szinuszával egyenlő. Hasonló típusú a

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha \quad \text{és} \quad \sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha \tag{7}$$

azonosság is. A *trigonometrikus azonosságok* köréből megemlítjük még a következőket:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta, \tag{8}$$

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta, \tag{9}$$

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta, \tag{10}$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta. \tag{11}$$

Ha elvégezzük az

$$\alpha=\frac{x+y}{2} \quad \text{és a} \quad \beta=\frac{x-y}{2}$$

helyettesítéseket, akkor a

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \tag{12}$$

$$\cos y-\cos x=2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}, \tag{13}$$

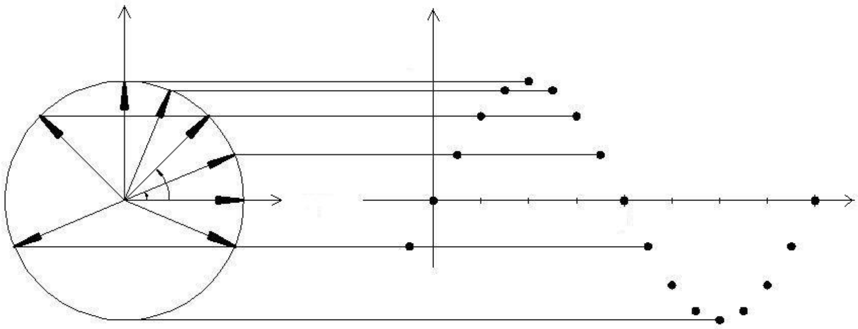
$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \tag{14}$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \tag{15}$$

alakú összefüggésekhez jutunk.

5.6. Definíció. *Azt a függvényt, mely minden α valós számhoz annak szinuszát, illetve koszinuszát rendeli* szinusz -, *illetve* koszinuszfüggvénynek *nevezzük.*

A definíció egyszerű következménye az alábbi állítás.



13. ábra. Forgásszögek szinusza.

5.1. Állítás. *Mind a szinusz -, mind pedig a koszinuszfüggvény* 2π *- szerint periodikus, azaz*

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \quad \textit{és} \quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \tag{16}$$

teljesül bármely k egész szám esetén.

5.7. Definíció. *A koszinuszfüggvény zérushelyeitől eltekintve az* α *szög* tangensét *a*

$$\text{tg } \alpha := \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

képlettel definiáljuk. Azt a függvényt, mely a koszinuszfüggvény zérushelyeitől eltekintve minden α *valós számhoz annak tangensét rendeli,* tangensfüggvénynek *nevezzük.*

5.8. Definíció. *A szinuszfüggvény zérushelyeitől eltekintve az α szög* kotangensét *a*

$$\operatorname{ctg}\,\alpha := \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

képlettel definiáljuk. Azt a függvényt, mely a szinuszfüggvény zérushelyeitől eltekintve minden α valós számhoz annak kotangensét rendeli, kotangensfüggvénynek *nevezzük.*

Nyilvánvaló, hogy ki kell zárnunk a nevezőben szereplő trigonometrikus függvények zérushelyeit. Az értéktáblázat alapján ez azt jelenti, hogy

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{és} \quad \alpha \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

összefoglalva: $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ a tangensfüggvény esetén, a kotangensfüggvény esetén pedig

$$\alpha \neq 2k\pi \quad \text{és} \quad \alpha \neq \pi + 2k\pi,$$

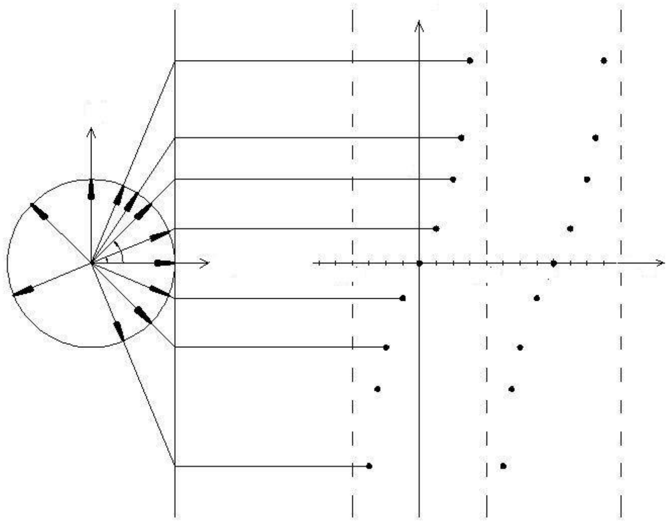
összefoglalva: $\alpha \neq k\pi$, ahol k tetszőleges egész szám. A szögfüggvényértékek előjelét a négy síknegyedben a

α	$0 < \alpha < 90°$	$90° < \alpha < 180°$	$180° < \alpha < 270°$	$270° < \alpha < 360°$
cos	$+$	$-$	$-$	$+$
sin	$+$	$+$	$-$	$-$
tg	$+$	$-$	$+$	$-$
ctg	$+$	$-$	$+$	$-$

táblázat mutatja. A koszinusz -, illetve szinuszfüggvénnyel kapcsolatban megismert addíciós képletek, illetve trigonometrikus azonosságok a tangens -, illetve a kotengensfüggvénnyel kapcsolatos összefüggéseket származtatnak. Ezek közül – a teljesség igénye nélkül – kiemeljük a következőket:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha, \tag{17}$$

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha. \tag{18}$$



14. ábra. Forgásszögek tangense.

5.2. Állítás. *Mind a tangens -, mind pedig a kotangensfüggvény π - szerint periodikus, azaz*

$$\operatorname{tg}(\alpha+k\pi)=\operatorname{tg}\alpha \quad \text{és} \quad \operatorname{ctg}(\alpha+k\pi)=\operatorname{ctg}\alpha \tag{19}$$

teljesül bármely k egész szám esetén.

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük el a $k > 0$ esetben – a $k < 0$ eset vizsgálata hasonló. A (7) összefüggésre tekintettel

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}\alpha \quad \text{és} \quad \operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}\alpha,$$

azaz $k = 1$ esetén az állítás igaz. Ennélfogva például

$$\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}(\alpha + (k-1)\pi + \pi) = \operatorname{tg}(\alpha + (k-1)\pi) = \operatorname{tg}\alpha,$$

ahol a második lépésben a $k = 1$ esetet, az utolsó lépésben pedig az indukciós feltevést alkalmaztuk. ∎

Végül pedig az addíciós tételek megfelelői:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \tag{20}$$

feltéve, hogy a szereplő szögek egyike sem $\frac{\pi}{2}$ páratlan számú többszöröse. Továbbá

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} \quad \text{és} \quad \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha} \tag{21}$$

feltéve, hogy a szereplő szögek egyike sem π többszöröse. Speciálisan

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \quad \text{és} \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}. \tag{22}$$

A trigonometrikus azonosságokat felhasználhatjuk szögek szinuszának, koszinuszának, tangensének és kotangensének a meghatározására:

$$1 = \sin^2 45° + \cos^2 45° = 2\sin^2 45°$$

az (5) azonosság szerint. Figyelembe véve az előjeltáblázatot a

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = 1$$

értékeket nyerjük. Természetesen a 45° esetében hivatkozhatunk az egységnyi átfogójú, egyenlő szárú derékszögű háromszögre is. Geometriai szempontból a 45° szinuszának az értéke a szárak közös hossza. Ha az átfogó nem egységnyi hosszú, akkor a szár hosszát osztanunk kell az átfogó hosszával, hogy megkapjuk az egységnyi átfogóhoz tartozó értéket. Gondolatmenetünket bármely α hegyesszögre általánosíthatjuk: ha egy derékszögű háromszögben az α szöggel szemközti befogó hossza a, a szög melletti befogó b, míg c az átfogó hossza, akkor

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Hasonlóságtól eltekintve ez a derékszögű háromszög egyértelműen meghatározott, hiszen α egyértelműen meghatározza a másik hegyesszöget.

5.1. Megállapodás. *Legyen $a < b$ két valós szám. Jelölje*

(i) $[a, b]$ *az a és b végpontú zárt intervallumot,*

(ii) $[a, b[$ *és* $]a, b]$ *az a és b végpontú félig nyílt (félig zárt) intervallumot,*

(iii) $]a, b[$ *az a és b végpontú nyílt intervallumot.*

5.9. Definíció. *Legyen H a valós számok egy részhalmaza, $I \subset H$ pedig egy nem egypontú részintervallum. Az $f\colon H \to \mathbb{R}$ függvény*

(i) monoton növekvő *az I intervallumon, ha bármely $x, y \in I$ esetén $x \leq y$ maga után vonja, hogy $f(x) \leq f(y)$,*

(ii) monoton csökkenő *az I intervallumon, ha bármely $x, y \in I$ esetén $x \leq y$ maga után vonja, hogy $f(x) \geq f(y)$,*

(iii) $\frac{1}{2}$ - konvex*, vagy* középkonvex [3] *az* I *intervallumon, ha bármely* $x, y \in I$ *esetén*

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \le \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

(iv) $\frac{1}{2}$ - konkáv*, vagy* középkonkáv *az* I *intervallumon, ha a függvény ellentettje* $\frac{1}{2}$ *- konvex, azaz*

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \ge \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

teljesül bármely $x, y \in I$ *esetén,*

(v) páros*, ha az origóra szimmetrikus értelmezési tartomány bármely* x *eleme esetén* $f(x) = f(-x)$ *teljesül,*

(vi) páratlan*, ha az origóra szimmetrikus értelmezési tartomány bármely* x *eleme esetén* $f(x) = -f(-x)$ *teljesül.*

5.10. Definíció. *Legyen* H *a valós számok egy részhalmaza. Az értelmezési tartomány* $x_\circ$ *pontja* lokális szélsőértékhelye *az* $f\colon H \to \mathbb{R}$ *függvénynek, ha létezik olyan* ε *pozitív valós szám, melyre*

$$f(y) \le f(x_\circ) \quad \textit{vagy} \quad f(x_\circ) \le f(y)$$

teljesül bármely $y \in \,]x_\circ - \varepsilon, x_\circ + \varepsilon[\, \cap H$ *esetén. Az első esetben* lokális maximumhelyről*, a másodikban pedig* lokális minimumhelyről *van szó. A szélsőértékhely* globális*, ha az egyenlőtlenségek valamelyike a teljes értelmezési tartományon fennáll.*

---

[3] A konvexitás általában az

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

egyenlőtlenség teljesülését jelenti az I intervallum tetszőleges x és y eleme, valamint bármely $0 < \lambda < 1$ valós szám esetén. Itt csupán a $\lambda = \frac{1}{2}$ speciális esetet tárgyaljuk.

5.11. Definíció. *Legyen H a valós számok egy részhalmaza. Az értelmezési tartomány $x_\circ$ pontja* inflexiós helye *az $f\colon H \to \mathbb{R}$ függvénynek, ha létezik olyan ε pozitív valós szám, melyre $]x_\circ - \varepsilon, x_\circ + \varepsilon[\subset H$ úgy, hogy f konvex az $I_- :=]x_\circ - \varepsilon, x_\circ]$ intervallumon és konkáv az $I_+ := [x_\circ, x_\circ + \varepsilon[$ intervallumon, vagy fordítva.*

5.2. Feladat. *A bevezetett függvénytani fogalmak segítségével jellemezze az*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to \ f(x) := x^2 \quad \textit{és a} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to \ g(x) := x^3$$

függvényeket.

A függvényvizsgálat összetett probléma, melynek fogalmi rendszerét (ld. például határérték) és eszközeit (ld. például differenciahányados és derivált) a matematikai analízis keretén belül tárgyalják. A következő

függvény	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
értelmezési tartomány	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x \neq k\pi$
értékkészlet	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
zérushelyek	$x = k\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x = k\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
periódus	2π	2π	π	π
szélsőértékhelyek	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x = k\pi$	$-$	$-$
inflexiós pontok	$x = k\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x = k\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
paritás	páratlan	páros	páratlan	páratlan

táblázatban összefoglaltuk a trigonometrikus függvények jellegzetes tulajdonságait. Ezek közül a szinusz - és a tangensfüggvény esetét fogjuk részletesebben is megvizsgálni – vegyük észre, hogy elemi függvénytranszformációk segítségével a szinuszfüggvény tulajdonságaiból a koszinuszfüggvény megfelelő tulajdonságai adódnak. Ugyanez áll a tangens - és a kotangensfüggvényre vonatkozóan is.

5.3. Tétel. *A szinuszfüggvény (szigorúan) monoton nő a* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *intervallumon.*

Bizonyítás. A (15) azonosságra tekintettel

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}, \tag{23}$$

ahol az $x-y$ különbség abszolút értéke nyilván nem nagyobb, mint a szóban forgó intervallum hossza. Ha $x < y$, akkor

$$0 < y-x \leq \pi \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{y-x}{2} \leq \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{x-y}{2} < 0.$$

Másfelől pedig

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ és } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{x+y}{2} < \frac{\pi}{2},$$

ahol az éles egyenlőtlenségek szerepeltetését az x és y között fennáló nagyságrendi reláció indokolja. Figyelembe véve az előjeltáblázatot, azt kapjuk, hogy a (23) egyenlőtlenség jobb oldala élesen negatív – átrendezéssel pedig a kívánt összefüggéshez jutunk. ■

5.5. Következmény. *Bármely k egész szám esetén a szinuszfüggvény*

(i) *(szigorúan) monoton nő a* $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ *intervallumon,*

(ii) *(szigorúan) monoton csökken a* $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi]$ *intervallumon.*

A szinuszfüggvénynek

(iii) *maximumhelye van értelmezési tartománya* $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ *pontjaiban, a maximum értéke pedig*

$$\sin x_k = \sin x_0 = 1,$$

(iv) *minimumhelye van értelmezési tartománya* $x_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ *pontjaiban, a minimum értéke pedig*

$$\sin x_k = \sin x_0 = -1.$$

Bizonyítás. Az első észrevétel a periodicitással indokolható. Ugyanezért a másodikat is elegendő a $k = 0$ esetben igazolni. Legyen most x a szóban forgó intervallum egy tetszőleges eleme. Ha elvégezzük a

$$x = y + \pi, \quad \text{ahol} \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

helyettesítést [4], akkor a (7) összefüggés miatt $\sin x = -\sin y$ következik, ahol a jobb oldalon egy szigorúan monoton növekvő függvény ellentettje áll. Ennélfogva a bal oldal szigorúan monoton csökken. A szélsőértékre vonatkozó észrevételek (i), (ii) és a periodicitás egyszerű következményei. ∎

5.6. Következmény. *Bármely k egész szám esetén a koszinuszfüggvény*

(i) (*szigorúan*) *monoton csökken a* $[0+2k\pi, \pi+2k\pi]$ *intervallumon,*

(ii) (*szigorúan*) *monoton nő a* $[-\pi + 2k\pi, 0 + 2k\pi]$ *intervallumon.*

[4] A helyettesítésnél ügyeljünk a változók monotonitásának kapcsolatára. Esetünkben például, ha az egyiket növeljük, akkor nő a másik is és viszont.

A koszinuszfüggvénynek

(iii) *maximumhelye van értelmezési tartománya* $x_k = 0 + 2k\pi$ *pontjaiban, a maximum értéke pedig*

$$\cos x_k = \cos x_0 = 1,$$

(iv) *minimumhelye van értelmezési tartománya* $x_k = \pi + 2k\pi$ *pontjaiban, a minimum értéke pedig*

$$\cos x_k = \cos x_0 = -1.$$

Bizonyítás. Ha elvégezzük az $x = y + \frac{\pi}{2}$ helyettesítést, akkor az ismert trigonometrikus azonosságokból $\cos x = -\sin y$ következik és a szinuszfüggvény menetének jellemzése alapján a koszinuszfüggvényre vonatkozó állításokat kapjuk. ∎

5.4. Tétel. *A tangensfüggvény (szigorúan) monoton nő a* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *intervallumon.*

Bizonyítás. Ha $0 < y - x < \pi$, akkor az előjeltáblázatra tekintettel azt kapjuk, hogy

$$0 < \sin(y-x) = \sin y \cos x - \cos y \sin x,$$

ahonnan átrendezéssel

$$\cos y \sin x < \sin y \cos x$$

következik. Az előjeltáblázatot ismételten figyelembe véve, a koszinuszfüggvény élesen pozitív a szóban forgó intervallum fölött. Oszthatunk tehát az egyenlőtlenség irányának megváltozása nélkül, ami a $\operatorname{tg} x < \operatorname{tg} y$ egyenlőtlenséghez vezet. ∎

5.7. Következmény. *Bármely k egész szám esetén a tangensfüggvény (szigorúan) monoton nő az $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$ intervallumon.*

5.8. Következmény. *Bármely k egész szám esetén a kotangensfüggvény (szigorúan) monoton csökken a $]0+k\pi, \pi+k\pi[$ intervallumon.*

5.5. Tétel. *A szinuszfüggvény $\frac{1}{2}$ - konkáv a $[0, \pi]$ intervallumon.*

Bizonyítás. A (14) összefüggés szerint

$$\frac{\sin x + \sin y}{2} = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

vizsgáljuk ismét a számok összegének és különbségének lehetséges értékeit! Világos, hogy

$$0 \le \frac{x+y}{2} \le \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad -\frac{\pi}{2} \le \frac{x-y}{2} \le \frac{\pi}{2}$$

hiszen különbségük abszolút értéke nem lehet nagyobb, mint az intervallum hossza. Ennélfogva a jobb oldalon két nemnegatív szám szorzata áll, melyek közül az egyiket növelve, a szorzat értéke is nő, vagy legalábbis nem csökken:

$$\cos\frac{x-y}{2} \le 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \le \sin\frac{x+y}{2}.$$

Végül pedig a bizonyítandó

$$\frac{\sin x + \sin y}{2} \le \sin\frac{x+y}{2}$$

összefüggés következik. ■

5.9. Következmény. *Bármely k egész szám esetén a szinuszfüggvény*

(i) $\frac{1}{2}$ *- konkáv a $[0+2k\pi, \pi+2k\pi]$ intervallumon,*

(ii) $\frac{1}{2}$ - *konvex a* $[-\pi + 2k\pi, 0 + 2k\pi]$ *intervallumon.*

A szinuszfüggvénynek

(iii) *inflexiós helye van értelmezési tartománya* $x_k = 0 + k\pi$ *pontjaiban.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 5.5. Következmény bizonyításában látott gondolatmenetet. ∎

5.10. Következmény. *Bármely k egész szám esetén a koszinuszfüggvény*

(i) $\frac{1}{2}$ - *konkáv a* $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ *intervallumon,*

(ii) $\frac{1}{2}$ - *konvex a* $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi]$ *intervallumon.*

A koszinuszfüggvénynek

(iii) *inflexiós helye van értelmezési tartománya* $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *pontjaiban.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 5.6. Következmény bizonyításában látott gondolatmenetet. ∎

5.3. Feladat. *A függvényvizsgálat eredményeit figyelembe véve, ábrázolja a szinusz -, illetve a koszinuszfüggvényt közös koordinátarendszerben. Milyen elemi függvénytranszformációk segítségével vihető át egymásba a két függvény?*

5.6. Tétel. *A tangensfüggvény* $\frac{1}{2}$ - *konvex a* $[0, \frac{\pi}{2}[$ *intervallumon.*

Bizonyítás. Az írásmunkát megkönnyítendő, legyen $a := \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, illetve $b := \operatorname{tg}\frac{y}{2}$. A (20) összefüggés alapján

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = \frac{a+b}{1-ab}$$

következik, míg a kétszeres szögekre vonatkozó (22) képlet szerint

$$\operatorname{tg} x = \frac{2a}{1-a^2} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} y = \frac{2b}{1-b^2}.$$

Kapjuk tehát, hogy

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{2} = \frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} = \frac{a+b-ab(b+a)}{(1-a^2)(1-b^2)} = \frac{(a+b)(1-ab)}{(1-a^2)(1-b^2)}.$$

A bizonyítás teljessé válik, ha megmutatjuk, hogy

$$\frac{a+b}{1-ab} \ \leq \ \frac{(a+b)(1-ab)}{(1-a^2)(1-b^2)} \tag{24}$$

Mivel

$$0 \ \leq \ \frac{x}{2} \ < \ \frac{\pi}{4} \ \text{ és } \ 0 \ \leq \ \frac{y}{2} \ < \ \frac{\pi}{4},$$

a tangensfüggvény monotonitására való tekintettel

$$0 \ \leq \ a \ < \ 1 \ \text{ és } \ 0 \ \leq \ b \ < \ 1.$$

Osztás és átszorzás után a bizonyítandó egyenlőtlenség az

$$(1-a^2)(1-b^2) \ \leq \ (1-ab)^2$$

alakot ölti. A műveletek elvégzése és rendezés pedig a nyilvánvaló

$$0 \ \leq \ (a-b)^2$$

összefüggéshez vezet. ∎

5.11. Következmény. *Bármely k egész szám esetén a tangensfüggvény*

(i) $\frac{1}{2}$ *- konvex a* $[0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ *intervallumon,*

(ii) $\frac{1}{2}$ *- konkáv a* $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, 0 + k\pi]$ *intervallumon.*

A tangensfüggvénynek

(iii) *inflexiós helye van értelmezési tartománya* $x_k = 0 + k\pi$ *pontjaiban.*

5.12. Következmény. *Bármely k egész szám esetén a kotangensfüggvény*

(i) $\frac{1}{2}$ *- konvex a* $]0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$ *intervallumon,*

(ii) $\frac{1}{2}$ *- konkáv a* $[\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi[$ *intervallumon.*

A kotangensfüggvénynek

(iii) *inflexiós helye van értelmezési tartománya* $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *pontjaiban.*

5.4. Feladat. *A függvényvizsgálat eredményeit figyelembe véve, ábrázolja a tangens -, illetve a kotangensfüggvényt közös koordinátarendszerben. Milyen elemi függvénytranszformációk segítségével vihető át egymásba a két függvény?*

A trigonometrikus függvények inverzei. A részletes függvényvizsgálat során láttuk, hogy valamennyi trigonometrikus függvény esetében megadhatjuk az értelmezési tartomány olyan részintervallumait, melyre megszorítva a függvény szigorúan monoton. Ebből az is következik, hogy ezeken a szakaszokon kölcsönösen egyértelmű, következésképpen invertálható. Az inverzfüggvények megkonstruálásához tekintsük a trigonometrikus függvények alábbi leszűkítéseit:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sin} &:= \text{ a szinuszfüggvény leszűkítése a } [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \text{ intervallumra,}\\
\mathrm{Cos} &:= \text{ a koszinuszfüggvény leszűkítése a } [0, \pi] \text{ intervallumra,}\\
\mathrm{Tg} &:= \text{ a tangensfüggvény leszűkítése a }]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\text{ intervallumra,}\\
\mathrm{Ctg} &:= \text{ a kotangensfüggvény leszűkítése a }]0, \pi[\text{ intervallumra}
\end{aligned}$$

és legyen

$$\arcsin := \mathrm{Sin}^{-1}, \quad \arccos := \mathrm{Cos}^{-1}, \quad \mathrm{arctg} := \mathrm{Tg}^{-1}, \quad \mathrm{arcctg} := \mathrm{Ctg}^{-1}.$$

Illusztrációképpen vizsgáljuk meg részletesebben a szinuszfüggvény inverzét. A monotonitást ellenőrizendő, legyen

$$-1 \le u < v \le 1$$

és tegyük fel, hogy

$$u = \sin x, \quad v = \sin y, \quad \text{ahol} \quad x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Figyelembe véve a szinuszfüggvény szigorú monotonitását a szóban forgó intervallumon, kontrapozícióval következik, hogy ha $\sin x < \sin y$, akkor $x < y$. Kapjuk tehát, hogy

$$\arcsin u - \arcsin v = \arcsin(\sin x) - \arcsin(\sin y) = x - y < 0,$$

azaz $\arcsin u < \arcsin v$, ami azt jelenti, hogy az inverzfüggvény ugyanabban az értelemben monoton (szigorúan monoton nő), mint az eredeti. Ez az észrevétel általában is igazolható a kontrapozíció elve segítségével. Az értelmezési tartomány végpontjaiban tehát globális szélsőértékhelyek lépnek fel, mégpedig minimumhely az $x_\circ = -1$ pontban és maximumhely az $x_\circ = 1$ pontban. A minimum, illetve a maximum értéke pedig

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{illetve} \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Térjünk át a konvexitás vizsgálatára. Függvény és inverze között – geometriai szempontból – az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükrözés teremt kapcsolatot. Ezt figyelembe véve világos, hogy egy szigorúan monoton növekvő függvény invertálásakor a konvex szakaszok konkáv, a konkáv szakaszok pedig konvex szakaszokba mennek át. A precíz bizonyítás is könnyen kivitelezhető: legyen $u, v \in [-1, 0]$ két tetszőleges pont, továbbá $u = \sin x$ és $v = \sin y$, ahol $x, y \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$. Mivel ezen a szakaszon a szinuszfüggvény konvex, ezért

$$\frac{u+v}{2} = \frac{\sin x + \sin y}{2} \geq \sin\frac{x+y}{2},$$

ahonnan az inverzfüggvény monotonitását figyelembe véve

$$\arcsin\frac{u+v}{2} \geq \arcsin\left(\sin\frac{x+y}{2}\right) = \frac{x+y}{2} = \frac{\arcsin u + \arcsin v}{2},$$

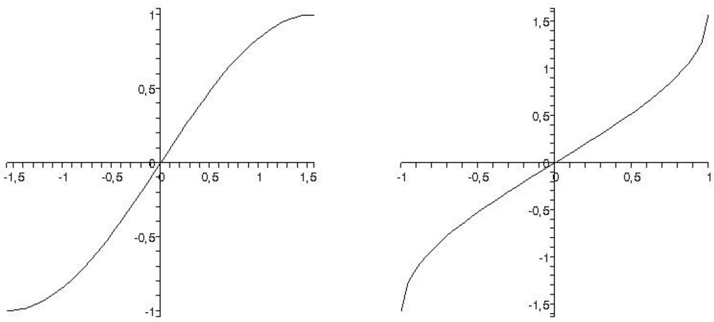
azaz az inverzfüggvény konkáv a $[-1, 0]$ intervallumon. Hasonlóan – vagy a könnyen látható

$$\arcsin x = -\arcsin(-x)$$

paritásra hivatkozva – igazolható, hogy a függvény konvex a $[0, 1]$ intervallumon és ezért inflexiós helye van értelmezési tartománya $x_\circ = 0$ pontjában.

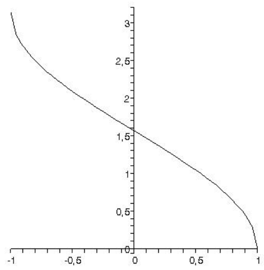
5.5. Feladat. *A* $\cos x = -\sin(x - \frac{\pi}{2})$ *összefüggést figyelembe véve igazolja, hogy*

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} + \arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$



15. ábra. A szinuszfüggvény invertálása.

és az elemi függvénytranszformációkat végrehajtva állapítsa meg a koszinuszfüggvény inverzének megfelelő tulajdonságait.



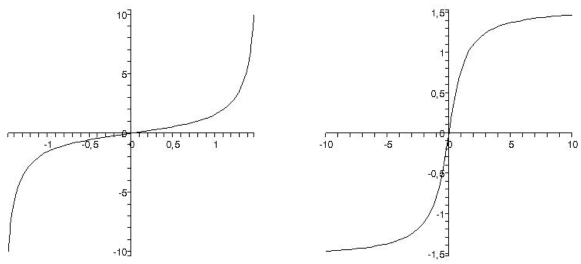
16. ábra. Az arkusz koszinusz függvény.

A koszinuszfüggvény inverzének vizsgálatát természetesen elvégezhetjük a szinuszfüggvény inverzének esetében látottak mintájára is. A tangens -, illetve a kotangensfüggvény inverzének vizsgálata hasonló – az egyetlen lényeges különbség az, hogy nem beszélhetünk az értelmezési tartomány „végpontjaiban” fellépő szélsőértékekről, hiszen az értelmezési tartomány a teljes számegyenes. Ezek szerepét a függvény végtelenben vett határértéke veszi át:

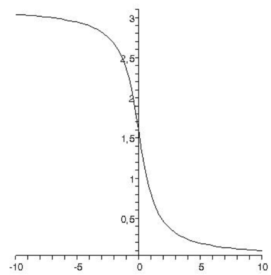
$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2},$$

illetve

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arcctg} x = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi.$$



17. ábra. A tangensfüggvény invertálása.



18. ábra. Az arkusz kotangens függvény.

5.6. Feladat. *A trigonometrikus függvényekről tanultak segítségével foglalja táblázatba az inverzfüggvények megfelelő tulajdonságait.*

Alkalmazás (trigonometrikus alapegyenletek). Tekintsük a

$$\sin x = p$$

trigonometrikus alapegyenletet, ahol $-1 \leq p \leq 1$ valós paraméter. Az inverzfüggvény segítségével

$$\alpha_1 := \arcsin p$$

alakban állíthatjuk elő az egyenlet egy partikuláris megoldását. Emlékeztetünk rá, hogy

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha_1 \leq \frac{\pi}{2}.$$

A (6) trigonometrikus azonosságra tekintettel $\alpha_2 := \pi - \alpha_1$ egy további partikuláris megoldás. A függvény menetét leíró 5.5. Következmény szerint viszont az egyenletnek nincs további megoldása a periódusnyi hosszúságú $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ intervallumon. Az összes megoldás tehát

$$x_1 = \alpha_1 + 2k\pi \quad \text{és} \quad x_2 = \alpha_2 + 2l\pi,$$

ahol k és l tetszőleges egészek. Vegyük észre, hogy α_1 és α_2 a periódus egész számú többszörösétől eltekintve is különböző értékek, kivéve a $p = \pm 1$ esetén fellépő $\sin x = \pm 1$ szélsőértékegyenleteket. A koszinuszfüggvényre vonatkozó

$$\cos x = p$$

trigonometrikus alapegyenlet esete teljesen hasonló az

$$\alpha_1 := \arccos p$$

és az $\alpha_2 := -\alpha_1$ partikuláris megoldásokkal. A függvény menetét leíró 5.6. Következmény szerint viszont az egyenletnek nincs további megoldása a periódusnyi hosszúságú $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Az összes megoldás tehát

$$x_1 = \alpha_1 + 2k\pi \quad \text{és} \quad x_2 = \alpha_2 + 2l\pi,$$

ahol k és l tetszőleges egészek. Vegyük észre, hogy α_1 és α_2 a periódus egész számú többszörösétől eltekintve is különböző értékek, kivéve a $p = \pm 1$ esetén fellépő $\cos x = \pm 1$ szélsőértékegyenleteket.

A tangens -, illetve a kotangensfüggvényre vonatkozó

$$\operatorname{tg} x = r, \quad \text{illetve} \quad \operatorname{ctg} x = r$$

trigonometrikus alapegyenletek esetében pedig r *tetszőleges* valós paraméter és az

$$\alpha_1 := \operatorname{arctg} r, \quad \text{illetve} \quad \alpha_1 := \operatorname{arcctg} r$$

partikuláris megoldás birtokában az egyenlet összes megoldását felírhatjuk az

$$x = \alpha_1 + k\pi$$

alakban, ahol k tetszőleges egész szám – a részletek átgondolása hasznos gyakorló feladat.

A normálás módszere. Legyenek A, B és C valós paraméterek úgy, hogy $A^2 + B^2 \neq 0$. Az

$$A \sin x + B \cos x = C$$

alakú trigonometrikus egyenletet a *normálás módszerével* vezethetjük vissza trigonometrikus alapegyenletre. Ekvivalens átalakítással

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

ahol a bal oldalon álló együtthatók négyzetének összege 1. Ez azt jelenti, hogy

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{és} \quad \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

írható valamely α valós szám esetén. Az addíciós tételek alapján pedig a

$$\sin(x+\alpha) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

alapegyenletet nyerjük.

A megoldhatóság szükséges és elegendő feltétele:

$$\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \leq 1.$$

5.7. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy*

$$\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2}.$$

5.8. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy*

$$4\sin 54^\circ = 1 + 4\sin 36^\circ \cos 18^\circ.$$

5.9. Feladat. *A kétszeres szögekre vonatkozó trigonometrikus azonosságok segítségével oldja meg a*

$$\cos 2x + \cos x + 1 = \sin x + \sin 2x$$

trigonometrikus egyenletet.

5.10. Feladat. *Oldja meg a*

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 3$$

szélsőértékegyenletet.

5.11. Feladat. *Milyen r valós paraméter mellett van megoldása a*

$$(r-1)\sin x + 2\sqrt{r}\cos x = r^2$$

trigonometrikus egyenletnek?

5.12. Feladat. *Milyen r valós paraméter mellett van megoldása a*

$$\sin^6 x + \cos^6 x + r(\sin^4 x + \cos^4 x) = 0$$

trigonometrikus egyenletnek?

5.13. Feladat. *Oldja meg a*

$$\begin{aligned} \sin^2 x - \cos y &= 1 \\ \sin^2 x + \cos y &= 0 \end{aligned}$$

trigonometrikus egyenletekből álló egyenletrendszert.

5.14. Feladat. *Oldja meg a*

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{2}$$

trigonometrikus egyenlőtlenséget.

5.15. Feladat. *Oldja meg a*

$$4\sin^2 x + 4\cos x - 1 > 0$$

trigonometrikus egyenlőtlenséget.

5.16. Feladat. *Oldja meg a*

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x < 1$$

trigonometrikus egyenlőtlenséget.

6. Skaláris és vektoriális szorzat

A trigonometrikus függvények áttekintése után térjünk vissza a szabadvektorok háromdimenziós vektorteréhez. A tanultak alkalmazásaként először a vektorok skaláris, majd pedig vektoriális szorzatával foglalkozunk. Az elnevezések beszédesek, ugyanis a skaláris szorzás végeredménye *valós szám*, míg a vektoriális szorzásé *vektor*.

6.1. Definíció. *Ha* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *nemzérus vektorok, akkor* skaláris szorzatukat *az*

$$\mathbf{ab} := |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha$$

képlet segítségével értelmezzük, ahol α *a vektorok által bezárt szög mértéke,* $|\mathbf{a}|$ *és* $|\mathbf{b}|$ *pedig a tekintett vektorok hossza. Legyen továbbá*

$$\mathbf{a0} = \mathbf{0a} = 0$$

bármely $\mathbf{a}$ *vektor esetén.*

6.1. Megjegyzés. Emlékeztetünk rá, hogy két nemzérus vektor szögét közös kezdőpontú reprezentánsaik segítségével értelmezzük. A szög mértéke megegyezik az általuk meghatározott konvex szögtartomány mértékével. Ez nyilvánvalóan független a kezdőpont megválasztásától, hiszen egyállású szögekről van szó. Nagysága pedig 0 és π, vagy – ekvivalens módon – $0°$ és $180°$ közé esik.

6.1. Következmény. *Bármely vektor önmagával vett skaláris szorzata megegyezik a hosszának négyzetével.*

6.2. Következmény. *Egységvektorok skaláris szorzata megegyezik hajlásszögük koszinuszával.*

6.3. Következmény. *Két nemzérus vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk zérus. Speciálisan:* a zérusvektor bármely vektorra merőleges.

6.1. Tétel. *A skaláris szorzat*

(i) *szimmetrikus, azaz* $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$,

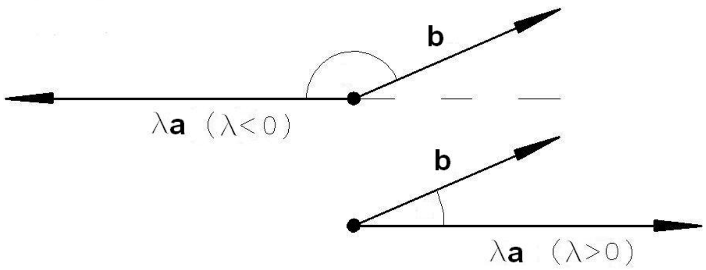
(ii) *homogén, azaz bármely* λ *valós szám esetén* $\lambda(\mathbf{ab}) = (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b})$,

(iii) *mindkét változóban additív, azaz*

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc} \quad \textit{és} \quad \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$$

teljesül bármely $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *vektor esetén.*

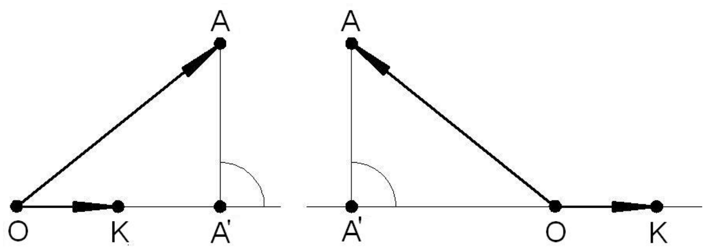
Bizonyítás. Az első észrevétel nyilvánvaló az értelmezés alapján. A másodikkal kapcsolatban jegyezzük meg először is, hogy a $\lambda = 0$, vagy a zérusvektort tartalmazó esetek triviálisak. A (nemzérus) skalárral való szorzás viszont a (nemzérus) vektorok szögét vagy invariánsan hagyja, vagy pedig a kiegészítő szögbe viszi át a $\lambda > 0$, illetve a $\lambda < 0$ eseteknek megfelelően. Az első esetben a szög koszinusza nem változik,



19. ábra. Műveletek vektorokkal.

míg a (szorzott) vektor hossza λ - szorosára nő. A második esetben pedig a koszinusz előjelet vált, míg a (szorzott) vektor hossza a skalár abszolút értékével, vagyis $(-\lambda)$ - val szorzódik. Ez azt jelenti, hogy a $\lambda\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzata mindkét esetben a vektorok skaláris szorzatának λ - szorosa. Az (i) tulajdonság alapján a vektorok szerepe felcserélhető. A harmadik tulajdonság igazolása összetett és több lépésben történik.

I. Ha $\mathbf{c} = \mathbf{k}$ egységvektor, akkor első lépésben reprezentáljuk az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{k}$ vektort közös O kezdőpontból az (O, A), illetve az (O, K) irányított szakaszok segítségével. Vetítsük az A pontot merőlegesen az (O, K) irányított szakasz tartóegyenesére és jelölje A' a vetületi pontot. Az O



20. ábra. Merőleges vetítés.

pont és a vetületi pont egy olyan $\mathbf{a}'$ vektort reprezentál, mely $\mathbf{k}$ - nak skalárszorosa, hossza megegyezik a vektorok

$$\mathbf{ak} = |\mathbf{a}| \cos \alpha$$

skaláris szorzatának abszolút értékével, irányítása pedig $\mathbf{k}$ - val egyező, vagy ellentétes aszerint, amint α hegyes -, illetve tompaszög:

$$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \text{illetve} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi,$$

az $\alpha = \frac{\pi}{2}$ esetben pedig a zérusvektorról van szó. Úgy is fogalmazhatunk, hogy az egységvektorral képzett skaláris szorzat az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{k}$ - ra eső merőleges vetületének "előjeles" hossza, azaz

$$|\mathbf{a}'| = \pm \mathbf{ak},$$

ahonnan $\mathbf{a}' = (\mathbf{ak})\mathbf{k}$ következik. Ha $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ páronként merőleges egységvektorok, akkor egyúttal a tér bázisvektorai és a merőleges vetítés vektoralgebrai megfelelője az

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{i} + \mu \mathbf{j} + \nu \mathbf{k} \;\rightarrow\; \mathbf{a}' = \nu \mathbf{k}$$

leképezés. A vektorösszeadás azonban koordinátánként történik, s ennélfogva

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}',$$

végül pedig az

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{k} = \mathbf{ak} + \mathbf{bk} \tag{25}$$

additív tulajdonságot kapjuk.

II. Ha $\mathbf{c}$ a zérusvektor, akkor nincs mit bizonyítanunk, míg ellenkező esetben képezhetjük a $\mathbf{c}$ *irányú egységvektort.* A homogenitási tulajdonság alapján viszont a (25) egyenlet a $\mathbf{c}$ vektor hosszával felszorozható:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc},$$

illetve szimmetria - okokból

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$$

következik. ■

6.4. Következmény. *Rögzítve az egymásra páronként merőleges* $\mathbf{i}$*,* $\mathbf{j}$ *és* $\mathbf{k}$ *egységvektorokból álló bázist*

$$\mathbf{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

ahol a_1*,* a_2 *és* a_3*, illetve* b_1*,* b_2 *és* b_3 *rendre az* $\mathbf{a}$*, illetve a* $\mathbf{b}$ *vektorok koordinátái az adott bázisra vonatkozóan:*

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \quad \textit{és} \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}.$$

6.2. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az egymásra páronként merőleges $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ egységvektorokból álló bázisra vonatkozó koordináták a bázisvektorokkal vett skaláris szorzatként adódnak:

$$a_1 = \mathbf{ai}, \ a_2 = \mathbf{aj} \ \text{ és } \ a_3 = \mathbf{ak},$$

illetve

$$b_1 = \mathbf{bi}, \ b_2 = \mathbf{bj} \ \text{ és } \ b_3 = \mathbf{bk}.$$

6.5. Következmény. (Koszinusztétel) *Bármely* ABC *háromszög esetén*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

ahol a*,* b*, illetve* c *rendre az* A*,* B*, illetve* C *csúcsokkal szemközti oldalak,* γ *pedig a* c *oldallal szemközti szög. Az oldalak és a szögek ciklikus cseréjével további két összefüggés írható fel:*

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad \textit{és} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Bizonyítás. Tekintsük az ABC háromszöget és rögzítsünk egy tetszőleges O pontot; ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ rendre a háromszög csúcspontjainak helyvektorai, azaz az (O, A), (O, B) és (O, C) reprezentánsú vektorok, akkor

$$\begin{aligned} c^2 &= |\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 = |(\mathbf{b} - \mathbf{c}) - (\mathbf{a} - \mathbf{c})|^2 = \\ &= |\mathbf{b} - \mathbf{c}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{c}|^2 - 2(\mathbf{b} - \mathbf{c})(\mathbf{a} - \mathbf{c}) = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma, \end{aligned}$$

ami bizonyítandó volt. ■

6.2. Tétel. (CBS [5] - egyenlőtlenség) *Bármely* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektor esetén*

$$|\mathbf{ab}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

és egyenlőség pontosan akkor áll, ha az egyik vektor a másiknak skalárszorosa.

Bizonyítás. A koszinuszfüggvény tulajdonságai alapján az észrevétel nyilvánvaló. ■

6.6. Következmény. *Bármely* x, y *és* z, *illetve* x', y' *és* z' *valós szám esetén*

$$|xx' + yy' + zz'| \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

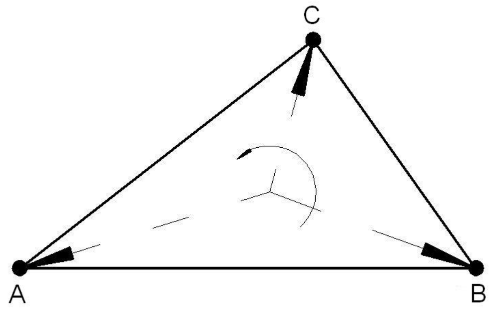
Bizonyítás. Legyen

$$\mathbf{a} := x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} := x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$$

és alkalmazzuk a CBS - egyenlőtlenséget. ■

Alaprendszerek. Legyenek **a**, **b** és **c** bázisvektorok és reprezentáljuk őket közös kezdőpontból az (O, A), (O, B) és az (O, C) irányított szakaszokkal. Ha a közös kezdőpontot *nem* tartalmazó féltérből nézve az ABC háromszög körüljárási iránya pozitív – azaz az „óramutató járásával ellentétes" –, akkor a vektorok alkotta bázist *pozitív*, vagy *jobbsodrású bázisnak* nevezzük. Egy jobbsodrású bázist úgy is jellemezhetünk, hogy az O pontból nézve az ABC háromszög körüljárási iránya negatív. *Alaprendszert* a térben egymásra páronként merőleges egységvektorok alkotnak. A továbbiakban, hacsak mást nem mondunk **i**, **j** és **k** jobbsodrású alaprendszert jelöl és erre a bázisra vonatkoznak a vektorok koordinátái.

[5] Cauchy - Bunyakovszkij - Schwarz.



21. ábra. Jobbsodrású bázis a térben.

6.2. Definíció. *Az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorok* vektoriális szorzatán *azt az* $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ *vektort értjük, mely*

(i) *mindkét tényezőjére merőleges,*

(ii) *hossza a vektorok hosszának és a közbezárt szög szinuszának szorzata, azaz*

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\alpha,$$

(iii) *ha nem a zérusvektor, akkor az* $\mathbf{a}$*,* $\mathbf{b}$ *és az* $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ *vektorok jobbsodrású bázist alkotnak a térben.*

6.3. Megjegyzés. A (ii) tulajdonsággal jellemzett vektor pontosan akkor tűnik el, ha az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok valamelyike a zérusvektor, vagy ha a közbezárt szög 0, illetve π. Ezeket az eseteket összefoglalva szokás azt mondani, hogy az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok pontosan akkor kollineárisak (lineárisan függők), ha a vektoriális szorzatuk a zérusvektor – emlékeztetünk rá, hogy két vektort akkor nevezünk kollineárisnak, ha egy egyenesen reprezentálhatók. Szemléletesen a vektorok párhuzamosságáról van szó, amit vektoriális szorzatuk eltűnése jellemez. Hasonlítsuk össze a skaláris szorzat esetével: két vektor pontosan akkor *merőleges*, ha skaláris szorzatuk nulla.

22. ábra. Balsodrású bázis a térben.

6.4. Megjegyzés. A vektoriális szorzat hossza éppen a vektorok által kifeszített paralelogramma területe. A vektorok által kifeszített paralelogrammán a közös kezdőpontú reprezentánsok által meghatározott paralelogrammát értjük. Ennek oldalai párhuzamosak a tekintett vektorokkal, az oldalak hossza pedig a vektorok hosszával egyezik meg. Végül a közös kezdőpontnál lévő szög nem más, mint a vektorok által bezárt szög. Mindezeket figyelembe véve az észrevétel nyilvánvaló.

6.1. Feladat. *Igazolja, hogy*

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

és egyenlőség pontosan akkor áll, ha a vektorok merőlegesek egymásra.

6.3. Tétel. *A vektoriális szorzat*

(i) *ferdeszimmetrikus, azaz* $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$,

(ii) *homogén, azaz bármely* λ *valós szám esetén*

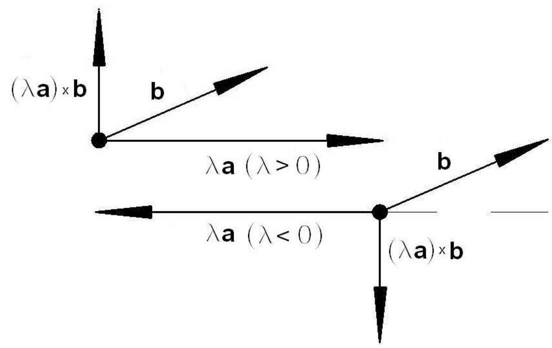
$$\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}),$$

(iii) *disztributív, azaz*

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c} \quad \textit{és} \quad \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$$

teljesül bármely $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *vektor esetén.*

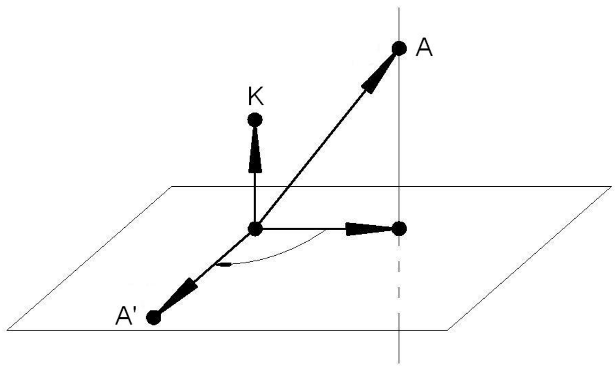
Bizonyítás. Az első észrevétel nyilvánvaló az értelmezés alapján. A másodikkal kapcsolatban jegyezzük meg először is, hogy a $\lambda = 0$, vagy a zérusvektort tartalmazó esetek triviálisak. A (nemzérus) skalárral való szorzás viszont a (nemzérus) vektorok szögét vagy invariánsan hagyja, vagy pedig a kiegészítő szögbe viszi át a $\lambda > 0$, illetve a $\lambda < 0$ eseteknek megfelelően. Az első esetben sem a szög szinusza, sem pe-



23. ábra. Műveletek vektorokkal.

dig a vektorok által alkotott (síkbeli) bázis irányítása nem változik, míg a vektor hossza λ - szorosára nő. A második esetben pedig az irányítás ellentétessé válik, míg a vektor hossza a skalár abszolút értékével, vagyis $(-\lambda)$ - val szorzódik. Ez azt jelenti, hogy a $\lambda\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzata mindkét esetben az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ vektor λ - szorosa. Az (i) tulajdonság alapján a vektorok szerepe előjelváltás segítségével felcserélhető. A disztributív tulajdonság igazolása összetett és több lépésben történik.

I. Ha $\mathbf{c} = \mathbf{k}$ egységvektor, akkor első lépésben reprezentáljuk az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{k}$ vektort közös O kezdőpontból az (O, A), illetve az (O, K) irányított szakaszok segítségével. Vetítsük az A pontot merőlegesen az O pontra illeszkedő $\mathbf{k}$ normálvektorú síkra, majd a vetületi pontot forgassuk el az O pont körül a K pontot tartalmazó féltérből nézve negatív irányban $90°$ - kal. Az O pont és az A' elforgatott vetületi pont egy



24. ábra. Merőleges vetítés és forgatás.

olyan $\mathbf{a}'$ vektort reprezentál, mely merőleges mind az $\mathbf{a}$, mind pedig a $\mathbf{k}$ vektorokra, hossza

$$|\mathbf{a}'| = |\mathbf{a}| \sin \alpha,$$

ahol α az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{k}$ vektorok szöge – ez világos, hiszen a forgatás már nem változtatja meg a pontok távolságát. Ráadásul az O pontból nézve az AKA' háromszög körüljárási iránya negatív. Ez azt jelenti, hogy

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} \times \mathbf{k}.$$

Ha $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ egy jobbsodrású alaprendszer a térben, akkor a végrehajtott ponttranszformációk vektoralgebrai megfelelője az

$$\mathbf{a} = \lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j} + \nu\mathbf{k} \;\; \rightarrow \;\; \mathbf{a}' = \mu\mathbf{i} - \lambda\mathbf{j}$$

leképezés. Szemléletesen szólva: megtartjuk a $\mathbf{k}$ - ra merőleges komponenseket, majd koordinátacsere és előjelváltás segítségével elforgatunk. A vektorösszeadás azonban koordinátánként történik, s ennélfogva

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}',$$

ahonnan az

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times \mathbf{k} = \mathbf{a} \times \mathbf{k} + \mathbf{b} \times \mathbf{k} \tag{26}$$

disztributív tulajdonság következik.
II. Ha $\mathbf{c}$ a zérusvektor, akkor nincs mit bizonyítanunk, míg ellenkező esetben képezhetjük a $\mathbf{c}$ *irányú egységvektort.* A homogenitási tulajdonság alapján viszont a (26) egyenlet a $\mathbf{c}$ vektor hosszával felszorozható:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c},$$

és (ferde)szimmetria - okokból

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

következik. ■

6.7. Következmény. (Szinusztétel) *Bármely ABC háromszög esetén*

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$

ahol a, b, illetve c rendre az A, B, illetve a C csúcsokkal szemközti oldalak míg α, β, illetve γ az a, b, illetve a c oldalakkal szemközti szögek.

Bizonyítás. Tekintsük az ABC háromszöget és rögzítsünk egy tetszőleges O pontot; ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ rendre a háromszög csúcspontjainak helyvektorai, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \times (\mathbf{a}-\mathbf{b}) = (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \times ((\mathbf{a}-\mathbf{c}) + (\mathbf{c}-\mathbf{b})) = \\ &= (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \times (\mathbf{a}-\mathbf{c}) + (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{b}),\end{aligned}$$

ahonnan az következik, hogy

$$|(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{c})| = |(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{c}-\mathbf{b})|.$$

Ennélfogva

$$|\mathbf{a}-\mathbf{b}||\mathbf{a}-\mathbf{c}|\sin\alpha = |\mathbf{a}-\mathbf{b}||\mathbf{c}-\mathbf{b}|\sin\beta,$$

azaz

$$\sin\alpha : \sin\beta = |\mathbf{c}-\mathbf{b}| : |\mathbf{a}-\mathbf{c}| = a : b$$

ami bizonyítandó volt. A $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$ és az $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$ összefüggések levezetése a látottak mintájára könnyű gyakorló feladat.

■

6.8. Következmény. (Tangenstétel) *Bármely ABC háromszög esetén*

$$(a-b) : (a+b) = \mathrm{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} : \mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Az oldalak és a szögek ciklikus cseréjével további két összefüggés írható fel:

$$(b-c) : (b+c) = \mathrm{tg}\,\frac{\beta-\gamma}{2} : \mathrm{tg}\,\frac{\beta+\gamma}{2},$$

$$(c-a) : (c+a) = \mathrm{tg}\,\frac{\gamma-\alpha}{2} : \mathrm{tg}\,\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

Bizonyítás. A szinusztétel alapján

$$\frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a} = 1 - \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Hasonlóan

$$\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha}.$$

A kettő hányadosát képezve

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}.$$

A (14) és a (15) trigonometrikus azonosságok segítségével pedig éppen a kívánt összefüggéshez jutunk. ■

6.9. Következmény. *Tekintsük az*

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \quad \textit{és a} \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$

vektorokat; ekkor

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k},$$

ahol

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} := a_2b_3 - b_2a_3, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} := a_1b_3 - b_1a_3,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} := a_1b_2 - b_1a_2.$$

Bizonyítás. Ha figyelembe vesszük, hogy

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \text{és} \quad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j},$$

akkor a műveleti tulajdonságok szisztematikus alkalmazásával éppen a kívánt összefüggéshez jutunk. ■

6.4. Tétel. (Kifejtési tétel) *Bármely* **a**, **b** *és* **c** *vektor esetén*

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a} \quad \textit{és} \quad \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}.$$

Bizonyítás. Tekintsünk egy jobbsodrású alaprendszert és alkalmazzuk a koordinátás formulákat. Az első összefüggés bal oldali vektorának **i** - re vonatkozó koordinátája

$$\begin{vmatrix} -(a_1b_3 - b_1a_3) & a_1b_2 - b_1a_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -(a_1b_3 - b_1a_3)c_3 - c_2(a_1b_2 - b_1a_2) =$$

$$= (a_2c_2 + a_3b_3)b_1 - (b_2c_2 + b_3c_3)a_1,$$

míg a jobb oldalon álló vektoré

$$(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_1 =$$

$$= (a_2c_2 + a_3b_3)b_1 - (b_2c_2 + b_3c_3)a_1.$$

Hasonló számolással ellenőrizhető a második és a harmadik koordináták egyenlősége – felhívjuk a figyelmet a vektoriális szorzat **j** - re vonatkozó koordinátájának kiszámításánál fellépő negatív előjelre! ■

6.2. Feladat. *Elegendő - e a fenti összefüggéseket csupán egy jobbsodrású alaprendszer tagjaira igazolni?*

6.5. Tétel. (Jacobi - azonosság) *Bármely* **a**, **b** *és* **c** *vektor esetén*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a kifejtési tételt a bal oldalon álló összeg mindhárom tagjára:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a},$$

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = (\mathbf{cb})\mathbf{a} - (\mathbf{ab})\mathbf{c},$$

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{ba})\mathbf{c} - (\mathbf{ca})\mathbf{b}.$$

Figyelembe véve, hogy a skaláris szorzat szimmetrikus, összegzéssel éppen a kívánt formulához jutunk. ■

6.3. Feladat. *A skaláris szorzás műveleti tulajdonságait felhasználva igazolja az*

$$\frac{1}{2}\Big((\mathbf{a}+\mathbf{b})^2+(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2\Big)=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2$$

azonosságot.

6.10. Következmény. *Egy paralelogramma oldalaira emelt négyzetek területének összege egyenlő az átlók hosszának négyzetösszegével.*

6.4. Feladat. *A skaláris szorzás műveleti tulajdonságait felhasználva igazolja az*

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2-(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2=4\mathbf{ab}$$

azonosságot.

6.11. Következmény. *Egy paralelogramma akkor és csak akkor téglalap, ha az átlói egyenlő hosszúak.*

6.5. Feladat. *A skaláris szorzás műveleti tulajdonságait felhasználva igazolja az*

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})=|\mathbf{a}|^2-|\mathbf{b}|^2$$

azonosságot.

6.12. Következmény. *Egy paralelogramma akkor és csak akkor rombusz, ha az átlói merőlegesek egymásra.*

Hozzáférhetetlen távolság meghatározása. Sík terepen az A és B megközelíthetelen pontok távolságának kiszámítására kijelölünk egy mérhető CD szakaszt és megmérjük, hogy az AB szakasz hány fokos szögben látszik a C, illetve a D pontból (α, illetve β szögek), továbbá hány fokos szögben látszik a BD szakasz a C, illetve az AC szakasz a D pontból (γ, illetve δ szögek). Az ACD háromszögben szinusztétellel meghatározható az AD oldal, míg a BCD háromszögben BD oldal. Alkalmazhatjuk ezek után a koszinusztételt az ABD háromszögben a keresett távolság kiszámítására.

6.6. Feladat. *Határozza meg az AB szakasz hosszát, ha $d = 40$ a CD szakasz hossza, továbbá*

$$\alpha = 35,3^\circ, \quad \beta = 29,5^\circ, \quad \gamma = 53,5^\circ \quad \textit{és} \quad \delta = 62^\circ.$$

Fejezze ki a kérdéses távolságot a megadott paraméterek segítségével is.

6.7. Feladat. *Jelölje – a szokásos módon – a, b és c egy háromszög oldalait, α, β és γ pedig rendre az a, b és a c oldalakkal szemközti szögeket. Töltse ki a táblázat hiányzó adatait.*

a	b	c	α	β	γ
12	20				40°
	$13,4$	$18,5$			110°
24	25	30			
19				60°	35°
		6	120°		22°

7. Vegyesszorzat

7.1. Definíció. *Az* $\mathbf{a}$*,* $\mathbf{b}$ *és a* $\mathbf{c}$ *vektorok* vegyes szorzatán *az*

$$\mathbf{abc} := (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$$

összefüggéssel definiált valós számot értjük.

7.1. Tétel. *Az* $\mathbf{a}$*,* $\mathbf{b}$ *és a* $\mathbf{c}$ *vektorok pontosan akkor komplanárisak (lineárisan függők), ha vegyesszorzatuk eltűnik.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a vegyesszorzat eltűnik; ha az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok kollineárisak, akkor nincs mit bizonyítanunk, míg ellenkező esetben az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorok bázisát alkotják a térnek. Ha

$$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu(\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

akkor mindkét oldal skaláris szorzatát véve $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-vel

$$0 = \mathbf{abc} = \nu|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 \;\Rightarrow\; \nu = 0$$

következik. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{c}$ előállítható $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineáris kombinációjaként, vagyis komplanáris a szóban forgó vektorokkal. Megfordítva, tegyük fel, hogy a vektorok egy síkban reprezentálhatók; ha az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok kollineárisak, akkor nincs mit bizonyítanunk, hiszen vektoriális szorzatuk eltűnése maga után vonja a vegyesszorzat eltűnését is. Ellenkező esetben

$$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$$

írható és ha mindkét oldal skaláris szorzatát képezzük az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorral, akkor a skaláris szorzat műveleti tulajdonságait és a vektoriális szorzat értelmezésének (i) pontját figyelembe véve

$$\mathbf{abc} = 0$$

következik. ■

7.2. Tétel. *Az* **a**, **b** *és a* **c** *vektorok vegyes szorzatának abszolút értéke a vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata.*

Bizonyítás. Először is jegyezzük meg, hogy amennyiben az **a** és a **b** vektorok kollineárisak, akkor mind a vegyesszorzat értéke, mind az elfajuló paralelepipedon térfogata zérus – hasonló a helyzet komplanáris **a**, **b** és **c** vektorok esetén. Tegyük fel tehát, hogy **a** és **b** nem kollineáris és legyen **e** az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorral párhuzamos egységvektor, azaz

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|\mathbf{e}.$$

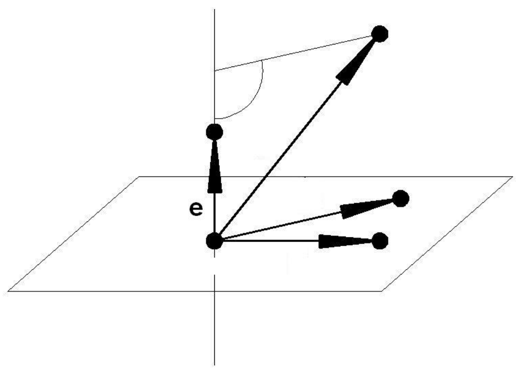
Ekkor

$$|\mathbf{abc}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}||\mathbf{ec}|,$$

ahol az

$$\mathbf{ec} = |\mathbf{e}||\mathbf{c}| \cos\alpha = |\mathbf{c}| \cos\alpha$$

skaláris szorzat abszolút értéke a **c** vektor **e** - re eső merőleges vetületének hossza, azaz a paralelepipedon (egyik) magassága. Ezt az alap területével megszorozva a paralelepipedon térfogatát kapjuk. ∎



25. ábra. A paralelepipedon térfogata.

7.3. Tétel. (Felcserélési tétel) *Bármely* **a**, **b** *és* **c** *vektor esetén*

$$\mathbf{abc} = \mathbf{cab} = \mathbf{bca}.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a kiszámítási formulákat! ∎

7.1. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy*

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

ahol a

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} := a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - c_1b_2a_3 - c_2b_3a_1 - c_3b_1a_2$$

harmadrendű determináns *értéke pozitív, vagy negatív aszerint, amint az* **a**, **b** *és a* **c** *vektorokból álló bázis pozitív (jobbsodrású), vagy negatív (balsodrású) és pontosan akkor tűnik el, ha a szóban forgó vektorok komplanárisak (lineárisan függők).*

7.1. Megjegyzés. *A vektoriális - és a vegyesszorzatra vonatkozó kiszámítási formulák másod -, illetve harmadrendű determinánsai jól áttekinthető, tömör írásmódot tesznek lehetővé. Kapcsolatukat a*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

képlettel is kifejezhetjük. Utóbbi lehetővé teszi a vektoriális szorzat kiszámítására vonatkozó formula

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

alakban történő felírását is.

7.2. Feladat. *Az* **a**, **b** *és a* **c** *vektorok milyen helyzeténél lesz az általuk kifeszített paralelepipedon térfogata maximális?*

7.3. Feladat. *Legyen*

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k} \quad \textit{és} \quad \mathbf{c} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k};$$

határozza meg a vektorok skaláris, vektoriális és vegyes szorzatát az összes lehetséges módon – alkalmazza a műveleti tulajdonságokat a kiszámítandó szorzatok számának csökkentése érdekében!

(i) *Az elvégzett számítások alapján döntse el, hogy komplanárisak - e a szóban forgó vektorok.*

(ii) *Határozza meg a vektorok által kifeszített paralelepipedon* **a** *és* **b** *vektorokkal párhuzamos alapjához tartozó magasságát.*

7.4. Feladat. *Egy síkban reprezentálhatók - e az*

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \quad \textit{és} \quad \mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

vektorok?

7.5. Feladat. *Lineárisan függő, vagy független rendszert alkotnak az*

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \quad \textit{és} \quad \mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

vektorok?

8. Koordinátageometria a síkon

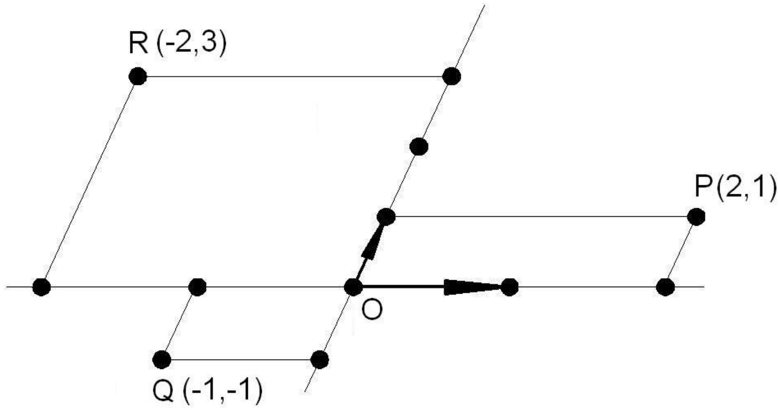
Ebben a fejezetben az euklideszi sík koordinátageometriájával ismerkedünk meg. A sík geometriájának tanulmányozásakor természetesen csak az adott síkkal párhuzamos, vagy – ekvivalens módon – az adott síkban reprezentálható vektorokkal foglalkozunk. A sík pontjainak helyzetét rendezett számpárok segítségével fogjuk jellemezni és viszont, minden rendezett számpárnak megfeleltetjük a sík egy adott pontját. Ha a hozzárendelésnek egy ilyen szabálya a rendelkezésünkre áll, akkor azt mondjuk, hogy adott egy koordinátarendszer a síkon. Vektoralgebrai ismereteinkre alapozva megkonstruáljuk az ún. affin, majd ennek speciális eseteként a derékszögű, vagy Descartes - féle koordinátarendszereket, melyek használata kényelmes, bár nem kizárólagos módszer arra, hogy számok segítségével jellemezzük a pontok helyzetét.

Koordinátarendszerek a síkon. Legyen S a tér egy rögzített síkja. Emlékeztetünk rá, hogy $V(S)$ jelöli a síkkal párhuzamos vektorok halmazát. Ez egy kétdimenziós vektortér a vektorok szokásos összeadására és skalárral való szorzására nézve – a kéttagú, lineárisan független rendszereket *bázisnak* nevezzük. Legyen O a sík egy tetszőlegesen rögzített pontja. Egy *affin koordinátarendszer* az O kezdőpontból és az $\mathbf{a}$, illetve $\mathbf{b}$ bázisvektorokból áll. Ezeket *koordinátavektoroknak* nevezzük. Ha P a sík egy további pontja, akkor az (O, P) irányított szakasszal reprezentált $\mathbf{p}$ vektor a pont *helyvektora*, míg a

$$\mathbf{p} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$$

előállításban szereplő x és y együtthatók a P pont *koordinátái* a szóban forgó koordinátarendszerre vonatkozóan – kapcsolatukat a $P(x, y)$ jelölés fejezi ki.

A vektoralgebra elemei szerint a sík nemkollineáris O, A és B pontjai affin koordinátarendszert határoznak meg, ha megállapodunk a



26. ábra. Affin koordinátarendszer.

pontok státuszát illetően is : legyen például O a koordinátarendszer kezdőpontja, A és B pedig a *tengelypontjai*, vagyis a koordinátavektorokat az (O, A) és az (O, B) irányított szakaszok reprezentálják.

8.1. Feladat. *Legyen O, P és Q három nemkollineáris pont; szerkessze meg annak az O kezdőpontú affin koordinátarendszernek a tengelypontjait, melyre $P(1, 2)$ és $Q(3, 5)$.*

A koordinátarendszer szemléltetése gyakran úgy történik, hogy a koordinátavektorok O kezdőpontú reprezentánsainak tartóegyenesén megjelöljük a reprezentánsok végpontjait (egységek) és ezzel összhangban feltüntetjük a reprezentánsok által meghatározott félegyeneseket. Egy affin koordinátarendszert *derékszögű*, vagy *Descartes - féle koordinátarendszernek* hívunk, ha koordinátavektorai az egymásra merőleges, jobbsodrású $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ egységvektorok.

A derékszögű koordinátarendszer általában megkönnyíti a számítási feladatok megoldását, ahogy azt a következő példa is szemlélteti.

8.1. Példa. *A* $P(x_1, y_1)$ *és a* $Q(x_2, y_2)$ *pontok távolsága helyvektoraik különbségének hosszaként a*

$$|\mathbf{p}-\mathbf{q}| = \sqrt{(\mathbf{p}-\mathbf{q})(\mathbf{p}-\mathbf{q})}$$

képlet segítségével számítható ki. Ha

$$\mathbf{p} = x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} \quad \textit{és} \quad \mathbf{q} = x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b},$$

akkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{p}-\mathbf{q} = (x_1 - x_2)\mathbf{a} + (y_1 - y_2)\mathbf{b},$$

ahonnan a skaláris szorzás műveleti tulajdonságaira tekintettel

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2|\mathbf{a}|^2 + (y_1 - y_2)^2|\mathbf{b}|^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\mathbf{ab}}$$

következik. Descartes - féle koordinátarendszer esetén viszont

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \tag{27}$$

hiszen a koordinátavektorok egységnyi hosszúak és skaláris szorzatuk zérus. Vegyük észre, hogy a (27) képlet geometriai megfelelője Pitagorasz tétele.

8.1. Definíció. *Rögzítsünk egy affin koordinátarendszert a síkon; a* $\Phi \subset S$ *alakzat* definiáló relációján *olyan* $\rho \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *kétváltozós relációt értünk, melyre*

$$(x, y) \in \rho \quad \Leftrightarrow \quad P(x, y) \in \Phi$$

teljesül.

A leggyakoribb definiáló relációk az egyenlőség, illetve az egyenlőtlenség:

$$3x + 2y + 6 = 0, \text{ illetve } (x-2)^2 + (y-3)^2 < 1.$$

A síkbeli rácsok esetében viszont $\rho := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a definiáló reláció. Az affin koordinátarendszerekre vonatkozóan definiált rácsokat *paralelogrammarácsnak* nevezzük. Ezek speciális esete a Descartes - féle koordinátarendszer esetén fellépő *négyzetrács*.

8.2. Feladat. *A vektoriális szorzás műveleti tulajdonságai segítségével igazolja, hogy a rácsparalelogrammák és a koordinátavektorok által kifeszített paralelogramma területének a hányadosa egész szám.*

Az egyenes egyenlete. Az egyenletek (egyenlőségek) speciális relációk. Ezek közül is a legegyszerűbbek az

$$Ax + By + C = 0$$

alakú lineáris egyenletek, ahol A, B és C rögzített valós számok. Ha A és B egyszerre tűnnek el, akkor egyenletünk a $C = 0$ alakra redukálódik, ami C értékétől függően azonosság, vagy ellentmondás. A továbbiakban ezeket *triviális eseteknek* nevezzük és kizárjuk. Meg fogjuk mutatni, hogy a triviális esetektől eltekintve, a kétismeretlenes lineáris egyenletek az euklideszi sík egyeneseinek a definiáló relációi az affin koordinátarendszerekre vonatkozóan.

Az euklideszi sík bármely egyenese megadható

(i) két különböző pontja segítségével (ld. illeszkedési axiómák),

(ii) egy pontja és egy *irányvektora*, azaz egy az egyenesen reprezentálható nemzérus vektor segítségével (ld. párhuzamossági axióma),

(iii) egy pontja és egy *normálvektora*, azaz az egyenesen reprezentálható vektorokra merőleges nemzérus vektor segítségével.

Az egyenes megadásának különböző módszerei között természetesen szoros kapcsolat van: ha ugyanis az egyenes P és Q pontja a rendelkezésünkre áll, akkor a (P, Q) irányított szakasszal reprezentált $\mathbf{v}$ vektor az egyenes irányvektora és viszont. Ha adott egy P pont és a $\mathbf{v}$ irányvektor, akkor a P kezdőpontú reprezentáns végpontja az egyenes további pontja lesz. A (ii) és a (iii) módszerek ekvivalenciája szemléletesen nyilvánvaló [6].

Rögzítsünk egy affin koordinátarendszert, melynek kezdőpontja az O pont, koordinátavektorai pedig az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok. Tekintsük a $P \neq Q$ pontokra illeszkedő l egyenest és legyen $\mathbf{v}$ a (P, Q) reprezentánsú vektor, azaz

$$\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p},$$

ahol $\mathbf{p}$, illetve $\mathbf{q}$ rendre a P, illetve a Q pontok helyvektora a rögzített koordinátarendszerre vonatkozóan. Ekkor a következő kijelentések ekvivalensek:

(i) $R \in l$,

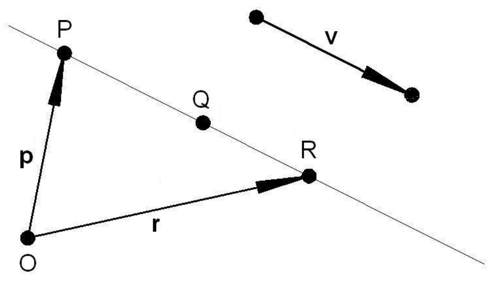
(ii) P, Q és R kollineáris,

(iii) a (P, Q) és a (P, R) reprezentánsú vektorok lineárisan függők (párhuzamosak), azaz

$$\mathbf{r} - \mathbf{p} = \lambda \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{r} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{v}$$

teljesül valamely λ valós szám mellett, ahol $\mathbf{r}$ az R pont helyvektora. A szóban forgó vektoregyenlet az egyenes paraméteres előállítása.

[6] A kétdimenziós euklideszi síkban ugyanis az egymásra merőleges irányok egymást kölcsönösen meghatározzák: ha az a egyenes merőleges a b egyenesre és a b egyenes merőleges a c egyenesre, akkor az a és a c egyenesek párhuzamosak, azaz ugyanazt az irányt reprezentálják. A térben azonban létezik három olyan irány, melyet páronként merőleges, de kitérő egyenesek reprezentálnak – az egyenes megadása egy pont és egy normálvektor segítségével tehát tipikusan síkbeli konstrukció.



27. ábra. Az egyenes egyenlete.

Az $\mathbf{r} = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{v}$ vektoregyenlet az

$$\begin{aligned} x &= x_\circ + \lambda v_x \\ y &= y_\circ + \lambda v_y \end{aligned}$$

egyenletrendszert adja, ahol x és y az R pont, $x_\circ$ és $y_\circ$ pedig a P pont koordinátái, míg

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{a} + v_y\mathbf{b}.$$

A λ paramétert könnyen kiküszöbölhetjük, ha az első egyenletet az irányvektor második koordinátájával, a második egyenletet pedig az első koordinátájával szorozzuk és kivonjuk a kettőt egymásból:

$$v_y x - v_x y = v_y x_\circ - v_x y_\circ. \tag{28}$$

Ez az egyenes irányvektoros egyenlete, amit az

$$A := v_y, \quad B := -v_x \;\text{ és }\; C := v_x y_\circ - v_y x_\circ$$

rövidítésekkel az $Ax + By + C = 0$ alakba írhatunk. Világos, hogy A és B egyidejű eltűnése ellentmondana annak, hogy $\mathbf{v}$ az egyenesen reprezentálható nemzérus vektor. Ha a $\mathbf{v}$ vektor P kezdőpontú reprezentánsának végpontja Q, akkor

$$\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p} \quad \Rightarrow \quad v_x = x_1 - x_\circ \text{ és } v_y = y_1 - y_\circ,$$

ahol x_1 és y_1 a Q pont koordinátái. Az egyenes egyenletében szereplő együtthatókat tehát – az egyenes megadásának módja szerint – tovább részletezhetjük. Megfordítva, tekintsük az

$$Ax + By + C = 0$$

nemtriviális egyenlettel definiált alakzatot a síkban – a határozottság kedvéért tételezzük fel, hogy $A \neq 0$. Az egyenlet megoldásának formális módszerét követve egyszerűen látható, hogy ha y értékét tetszőleges λ valós paraméterként megadjuk, akkor x értéke az

$$x = -\frac{1}{A}(B\lambda + C)$$

formula alapján kiszámolható. Szaknyelven szólva: egy szabad paraméterrel rendelkezünk. A megoldó számpárok által meghatározott pontok helyvektorára pedig az

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{A}(B\lambda + C)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$$

összefüggés írható fel, amit átalakítva:

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{v},$$

ahol

$$\mathbf{p} := -\frac{C}{A}\,\mathbf{a} \text{ és } \mathbf{v} := \mathbf{b} - \frac{B}{A}\,\mathbf{a}.$$

Ez tehát a P pontra illeszkedő, $\mathbf{v}$ irányvektorú egyenes paraméteres előállítása, feltéve, hogy a $\mathbf{v}$ vektor nem tűnik el. Ennek belátásához vegyük észre, hogy a $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ indirekt feltevésből kiindulva

$$\mathbf{b} = \frac{B}{A}\,\mathbf{a}$$

következik, ami bázisvektorok esetében lehetetlen.

8.1. Tétel. *Affin koordinátarendszert alapul véve, a sík egyeneseinek definiáló relációi*

$$Ax + By + C = 0$$

alakú, nemtriviális kétismeretlenes lineáris egyenletek.

8.2. Tétel. *Descartes - féle koordinátarendszert alapul véve bármely egyenes*

$$Ax + By + C = 0$$

alakú egyenletében az A és a B valós számok az egyenes normálvektorának koordinátái a koordinátavektorokra vonatkozóan.

Bizonyítás. Emlékeztetünk rá, hogy $A = v_y$ és $B = -v_x$. Legyen

$$\mathbf{n} := v_y\mathbf{i} + (-v_x)\mathbf{j} = v_y\mathbf{i} - v_x\mathbf{j}.$$

Mivel az $\mathbf{i}$ és a $\mathbf{j}$ koordinátavektorok alaprendszert alkotnak, ezért az $\mathbf{n}$ és a

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$$

irányvektor skaláris szorzata zérus:

$$\mathbf{vn} = v_x v_y - v_y v_x = 0,$$

ami a műveleti tulajdonságokat figyelembe véve könnyen igazolható. ■

Metrikus feladatok megoldásánál, vagy metrikus viszonyokat tükröző alakzatok esetében a Descartes - féle koordinátarendszer használata megkönnyíti az összefüggések felírását. Tipikusan ilyen a sík pontjai és egyenesei közötti távolság meghatározása, vagy – a metrikus viszonyokat tükröző legegyszerűbb alakzat – a kör egyenletének felírása.

8.3. Tétel. *Descartes - féle koordinátarendszer esetén a $K(x_\circ, y_\circ)$ középpontú, $r > 0$ sugarú kör egyenlete*

$$(x - x_\circ)^2 + (y - y_\circ)^2 = r^2.$$

A kör $P(x_*, y_*)$ pontjára illeszkedő érintőegyenesének az egyenlete pedig

$$(x_* - x_\circ)x + (y_* - y_\circ)y = (x_* - x_\circ)x_* + (y_* - y_\circ)y_*.$$

Bizonyítás. A kör egyenletének ismertetett alakja a (27) képlet alapján nyilvánvaló. Másfelől pedig a (K, P) reprezentánsú vektor éppen a P - beli érintő normálvektora – a helyvektorok különbségének a koordinátáival az érintő egyenlete könnyen felírható. ∎

8.4. Tétel. *Legyen*

$$Ax + By + C = 0$$

egy egyenes egyenlete a sík Descartes - féle koordinátarendszerére vonatkozóan. Ha $X(x_*, y_*)$ a sík egy tetszőleges pontja, akkor az egyenes és az X pont távolsága a

$$d = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} |Ax_* + By_* + C|$$

képlet segítségével számolható ki.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy az egyenletben fellépő A és B együtthatók az egyenes egy normálvektorának a koordinátái. Tekintsük az ezzel párhuzamos $\mathbf{n}$ egységvektort, azaz legyen

$$\mathbf{n} = n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j},$$

ahol

$$n_x = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{és} \quad n_y = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Ha $P(x_\circ, y_\circ)$ az egyenes egy tetszőleges pontja, akkor az X pont és az egyenes távolságának a meghatározásához a (P, X) reprezentánsú vektor $\mathbf{n}$ - re eső merőleges vetületének a hosszára van szükség. Ez éppen az $(\mathbf{x} - \mathbf{p})\mathbf{n}$ skaláris szorzat abszolút értéke. Mivel

$$\mathbf{x} - \mathbf{p} = (x_* - x_\circ)\mathbf{i} + (y_* - y_\circ)\mathbf{j},$$

ezért

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} - \mathbf{p})\mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\Big((x_* - x_\circ)A + (y_* - y_\circ)B\Big) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(Ax_* + By_* + C),\end{aligned}$$

hiszen $Ax_\circ + By_\circ + C = 0$. ∎

8.1. Megjegyzés. Koordinátamentes formában kifejezve, a P pontra illeszkedő, $\mathbf{n}$ normálvektorú egyenesnek a sík X pontjától való távolsága a

$$d = \frac{|(\mathbf{x} - \mathbf{p})\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$$

képlet segítségével számolható, ahol – a közös kezdőpont rögzítését követően – $\mathbf{x}$, illetve $\mathbf{p}$ rendre az X, illetve a P pont helyvektora. Ha a pont és az egyenes által meghatározott síkot az euklideszi térbe ágyazzuk, akkor a vektoriális szorzás is a rendelkezésünkre áll. A kérdéses távolság az $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ vektor és az egyenes $\mathbf{v}$ irányvektora által kifeszített paralelogramma magassága: a területet elosztjuk az egyenessel párhuzamos alap hosszával, azaz

$$d = \frac{|(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}.$$

8.3. Feladat. *Alapul véve egy Descartes - féle koordinátarendszert a síkon, töltse ki a táblázat hiányzó adatait.*

P	Q	$\mathbf{v}$	$\mathbf{n}$	$Ax + By + C = 0$
$(3,1)$	$(1,0)$			
$(1,2)$		$\mathbf{i} - \mathbf{j}$		
	$(1,6)$		$\mathbf{i} + \mathbf{j}$	
				$3x + 4y - 1 = 0$

8.4. Feladat. *Alapul véve egy Descartes - féle koordinátarendszert a síkon, határozza meg az $A(1,2)$, $B(4,0)$ és a $C(3,4)$ csúcspontokkal rendelkező háromszög*

(i) *oldalainak hosszát és szögeinek nagyságát,*

(ii) *súlypontjának, magasságpontjának a koordinátáit, illetve a körülírt kör középpontjának a koordinátáit – ld. Euler - féle egyenes.*

8.5. Feladat. *Alapul véve egy Descartes - féle koordinátarendszert a síkon, határozza meg az*

$$x^2 + y^2 = 16 \quad \textit{és az} \quad x^2 + y^2 - 16x - 12y + 96 = 0$$

körök közös belső érintőegyeneseinek a meredekségét.

8.6. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy az*

$$A\sin x + B\cos x = C, \quad A^2 + B^2 \neq 0$$

trigonometrikus egyenlet pontosan akkor megoldható, ha az

$$Ax + By + C = 0$$

egyenletű egyenes origótól mért távolsága kisebb, vagy egyenlő, mint 1.

9. Kúpszeletek

Az euklideszi sík olyan speciális ponthalmazairól lesz szó, melyek nem csupán matematikai, hanem gyakorlati szempontból is fontosak. A kúpszeletek, azaz az *ellipszis*, a *hiperbola* és a *parabola* szisztematikus elméletét Apollóniusz dolgozta ki i.e. 260 körül. A későbbiek során pedig ezek az alakzatok a fizikai világ leírásában is központi szerepet játszottak – elegendő csupán a bolygók mozgásával kapcsolatos Kepler - féle törvényekre utalnunk.

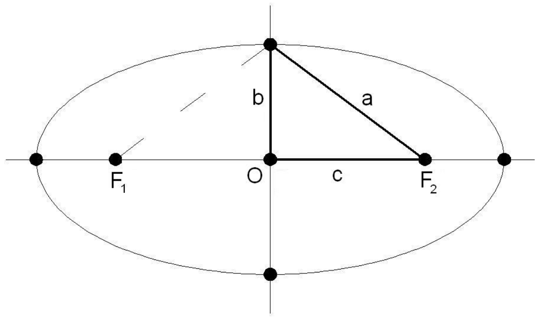
9.1. Definíció. *Legyen F_1 és F_2 az S sík két különböző pontja és tegyük fel, hogy $2a$ az F_1F_2 szakasz hosszánál nagyobb – s ennélfogva pozitív – valós szám. Az*

$$\mathcal{E} := \Big\{P \in S \mid 2a = d(P, F_1) + d(P, F_2)\Big\}$$

ponthalmazt ellipszisnek*, az F_1 és az F_2 pontokat pedig az ellipszis fókuszainak nevezzük.*

9.1. Megjegyzés. Az ellipszis tehát azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, melyeknek két rögzített ponttól mért távolságösszege állandó.

További elnevezések és jelölések. Nyilvánvaló, hogy az ellipszis szimmetrikus mind a fókuszok által meghatározott egyenesre, mind pedig a fókuszok által meghatározott szakasz felező merőlegesére. Ennek belátásához csupán azt kell megfontolnunk, hogy a szóban forgó egyenesekre vonatkozó tükrözések megőrzik a pontok távolságát, másfelől pedig a fókuszokat helyben hagyják, illetve egymás között felcserélik. A tükörtengelyeket az ellipszis *tengelyeinek* nevezzük, közelebbről *nagytengelynek* (a fókuszokat összekötő egyenes), illetve *kistengelynek* (a fókuszok felező merőlegese). A tengelyek metszéspontja az ellipszis *centruma*, melyre nézve az alakzat ugyancsak szimmetrikus



28. ábra. Az ellipszis.

– vegyük észre ugyanis, hogy az O metszéspontra vonatkozó centrális tükrözés a tengelyekre vonatkozó tükrözések egymás utáni végrehajtásával egyenértékű. A fókuszoknak a centrumtól való távolságát *lineáris excentricitás*nak nevezzük. Ez éppen a fókuszok által meghatározott szakasz hosszának a fele. Az ellipszisnek a tengelyekkel vett metszéspontjai pedig az ún. *tengelypontok*. A tengelypontok által a tengelyeken meghatározott szakaszokat is említjük *nagy* -, illetve *kistengelyként*, sőt – szokásos pongyolasággal – ugyanezek az elnevezések használatosak a nagy -, illetve a kistengely $2a$, illetve $2b$ hosszúságára. Jelölje T a kistengely (egyik) végpontját; figyelembe véve, hogy a felező merőleges pontjai a szakasz végpontjaitól egyenlő távolságra vannak, azt kapjuk, hogy

$$d(T,F_1)=d(T,F_2) \quad \wedge \quad d(T,F_1)+d(T,F_2)=2a \quad \Rightarrow$$

$$d(T,F_1)=d(T,F_2)=a.$$

A centrum, az egyik fókusz és a T pont által meghatározott derékszögű háromszögben

$$a^2=b^2+c^2,$$

ahol a és b a nagy, illetve a kis *féltengelyek* hossza, c pedig a lineáris excentricitást jelöli.

Az ellipszis (egyik) fókusza körül a nagytengellyel, mint sugárral írt kört az ellipszis (egyik) *vezérkör*ének nevezzük. Az ellipszis *főköre* az O középpontú, a sugarú kör.

9.1. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy az ellipszis megadható azoknak a pontoknak a halmazaként a síkon, melyek körül az egyik fókuszon áthaladó és a másik fókusz körüli vezérkört érintő kör írható.*

Szerkesztési eljárás. Az előző feladat eredményét felhasználhatjuk az ellipszis pontjainak szerkesztésére is: vegyünk fel egy tetszőleges pontot a vezérkörön és kössük össze a vezérkör középpontjával (azaz az egyik fókusszal). A másik fókusz és a felvett pont által meghatározott szakasz felező merőlegese olyan pontot metsz ki a vezérkör sugarából, mely körül a vezérkört érintő és a másik fókuszon áthaladó kör írható.

9.2. Megjegyzés. Az érdekesség kedvéért megemlítjük még az úgynevezett *fonálszerkesztési eljárást*. Ennek eszköze egy nyújthatatlan fonál, amit a két végénél fogva rögzítünk. A rögzítési pontok által meghatározott szakasz hossza legyen a fonál hosszánál kisebb pozitív szám. A fonalat kifeszítve annak az ellipszisnek egy pontjához jutunk, melynek nagytengelye a fonál hossza, fókuszai pedig a rögzítési pontok. Ha pedig a fonál egy pillanatra sem lazul meg a kifeszítési pont változtatása közben, akkor a kényszerfeltétel biztosítja, hogy a pont ellipszispályán mozog.

9.2. Definíció. *Legyen F_1 és F_2 az S sík két különböző pontja és tegyük fel, hogy a $2a$ valós szám pozitív és kisebb, mint az F_1F_2 szakasz hossza. A*

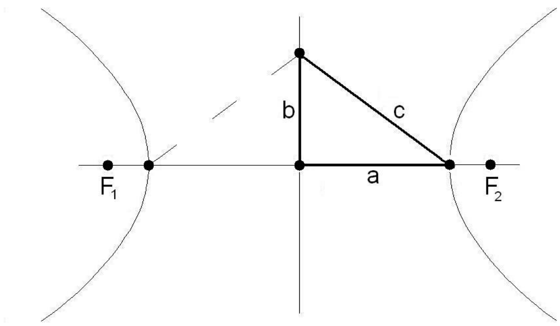
$$\mathcal{H} := \Big\{ P \in S \mid 2a = |d(P, F_1) - d(P, F_2)| \Big\}$$

ponthalmazt hiperbolának*, az F_1 és az F_2 pontokat pedig a hiperbola fókuszainak nevezzük.*

9.3. Megjegyzés. A hiperbola tehát azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, melyeknek két rögzített ponttól mért távolságkülönbsége abszolút értékben állandó.

További elnevezések és jelölések. Nyilvánvaló, hogy a hiperbola szimmetrikus mind a fókuszok által meghatározott egyenesre, mind pedig a fókuszok által meghatározott szakasz felező merőlegesére. Ennek belátásához csupán azt kell megfontolnunk, hogy a szóban forgó egyenesekre vonatkozó tükrözések megőrzik a pontok távolságát, másfelől pedig a fókuszokat helyben hagyják, illetve egymás között felcserélik. A tükörtengelyeket a hiperbola *tengelyeinek* nevezzük, közelebbről *valós tengelynek* (a fókuszokat összekötő egyenes), illetve *képzetes tengelynek* (a fókuszok felező merőlegese). Metszéspontjuk a hiperbola *centruma*, melyre nézve az alakzat ugyancsak szimmetrikus – vegyük észre ugyanis, hogy az O metszéspontra vonatkozó centrális tükrözés a tengelyekre vonatkozó tükrözések egymás utáni végrehajtásával egyenértékű. A fókuszoknak a centrumtól való távolságát *lineáris excentricitás*nak nevezzük. Ez éppen a fókuszok által meghatározott szakasz hosszának a fele. A hiperbolának a valós tengellyel vett metszéspontjai az ún. *tengelypontok*. Mivel a felező merőleges pontjai a szakasz végpontjaitól egyenlő távolságra vannak, ezért a képzetes tengelyen nincs pontja a hiperbolának. Segítségével viszont osztályozhatjuk a hiperbola pontjait aszerint, hogy az egyik, illetve a másik fókuszhoz vannak - e közelebb. A hiperbola így keletkező *ágait* a képzetes tengely szeparálja. A tengelypontok által a tengelyen meghatározott szakaszt is említjük *valós tengelyként*, sőt – szokásos pongyolasággal – ugyanez az elnevezés használatos a valós tengely $2a$ hosszúságára. Az ellipszisnél látottak mintájára szokás a hiperbola *képzetes féltengelyéről* beszélni, melyet az

$$a^2 + b^2 = c^2$$



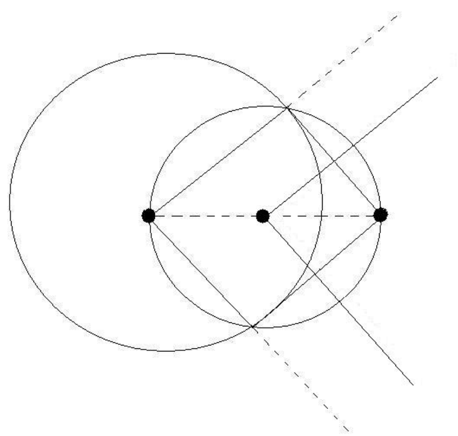
29. ábra. A hiperbola.

összefüggés definiál. A tengelypontokból c sugárral körözve kapjuk a „képzetes tengelypontokat” a képzetes tengelyen.

A hiperbola (egyik) fókusza körül a valós tengellyel, mint sugárral írt kört a hiperbola (egyik) *vezérkör*ének nevezzük. A hiperbola *főköre* az O középpontú, a sugarú kör.

9.2. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy a hiperbola megadható a sík olyan pontjainak halmazaként, melyek körül az egyik fókuszon áthaladó és a másik fókusz körüli vezérkört érintő kör írható.*

Szerkesztési eljárás. Az előző feladat eredményét felhasználhatjuk a hiperbola pontjainak szerkesztésére is: vegyünk fel egy tetszőleges pontot a vezérkörön és kössük össze a vezérkör középpontjával (azaz az egyik fókusszal). A másik fókusz és a felvett pont által meghatározott szakasz felező merőlegese olyan pontot metsz ki a vezérkör sugarának meghosszabításából, mely körül a vezérkört érintő és a másik fókuszon áthaladó kör írható. Kritikus helyzetűek viszont a vezérkör és a fókuszokra emelt Thalész - kör metszéspontjai. Ebben az esetben ugyanis párhuzamos egyenesek lépnek fel a szerkesztési eljárás során. Ezekkel az egyenesekkel az O ponton át párhuzamost húzva jutunk a hiperbola *aszimptotaegyeneseihez.* Könnyű látni, hogy a valós tengely és az aszimptotaegyenesek által bezárt szög tangense éppen $\frac{b}{a}$ – a részletek átgondolása hasznos gyakorló feladat.



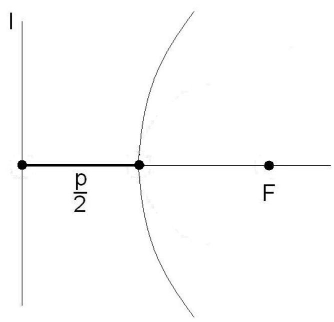
30. ábra. Kritikus helyzetű pontok.

9.3. Definíció. *Legyen F az S sík egy rögzített pontja és tekintsünk egy rá nem illeszkedő l egyenest a síkban. A*

$$\mathcal{P} := \Big\{ P \in S \mid d(P,F) = d(P,l) \Big\}$$

ponthalmazt parabolának*, az F pontot, illetve az l egyenest pedig a parabola* fókuszának*, illetve* vezéregyenesének (*direktrix*) *nevezzük.*

9.4. Megjegyzés. A parabola tehát azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, melyeknek egy rögzített ponttól és egy rögzített egyenestől mért távolsága egyenlő. Emlékeztetünk rá, hogy pont és egyenes távolsága nem más, mint a pont és a pontból az egyenesre bocsátott merőleges talppontjának a távolsága. Úgy is fogalmazhatunk, hogy ez a *minimális* távolság: kisebb, mint a pont és az egyenes bármely további pontjának a távolsága.



31. ábra. A parabola.

További elnevezések és jelölések. Nyilvánvaló, hogy a parabola szimmetrikus a fókuszból a vezéregyenesre bocsátott merőlegesre. Ennek belátásához csupán azt kell megfontolnunk, hogy a szóban forgó egyenesre vonatkozó tükrözés megőrzi a pontok távolságát, másfelől pedig a fókusz fixpontja, míg a vezéregyenes invariáns alakzata a tükrözésnek. A tükörtengelyt a parabola *tengelyének* nevezzük. A parabolának a *tengellyel* vett metszéspontja az ún. *tengelypont.* A fókusznak a vezéregyenestől való távolságát a parabola *paraméterének*, ennek felét pedig *gyújtótávolságnak* hívjuk. Nyilvánvaló, hogy ez éppen a tengelypont és a fókusz távolsága.

9.3. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy a parabola megadható a sík olyan pontjainak halmazaként, melyek körül a fókuszon áthaladó és a vezéregyenest érintő kör írható.*

Szerkesztési eljárás. Az előző feladat eredményét felhasználhatjuk a parabola pontjainak szerkesztésére is: vegyünk fel egy tetszőleges pontot a vezéregyenesen és állítsunk ebben a pontban merőlegest a vezéregyenesre. Ez a fókusz és a felvett pont által meghatározott szakasz felező merőlegeséből olyan pontot metsz ki, mely körül a vezéregyenest érintő és a fókuszon áthaladó kör írható.

9.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a sík egy Q pontja* belső pontja

(i) *az F_1 és F_2 fókuszú, $2a$ nagytengelyű ellipszisnek, ha*

$$d(Q, F_1) + d(Q, F_2) < 2a,$$

(ii) *az F_1 és F_2 fókuszú, $2a$ valós tengelyű hiperbolának, ha*

$$|d(Q, F_1) - d(Q, F_2)| > 2a,$$

(iii) *az F fókuszú, l vezéregyenesű parabolának, ha*

$$d(Q, F) < d(Q, l),$$

azaz közelebb van a fókuszhoz, mint a vezéregyeneshez.

Ha Q nem belső pont és nem is pontja az alakzatoknak, akkor külső pontnak *nevezzük. Az ellipszis, a hiperbola és a parabola* érintője *a sík olyan egyenese, melynek pontosan egy közös pontja van a szóban forgó alakzattal és minden további pontja külső pont.*

9.5. Megjegyzés. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a fókusz(ok) minden esetben belső pontjai az alakzatoknak – ez segíthet a relációk memorizálásában.

A kúpszeletek érintőjének értelmezésekor az egységes tárgyalás igénye érvényesül. Az ellipszis esetében ugyan elegendő lenne egyetlen közös pont létezését megkövetelni, a parabola tengelyével, vagy a hiperbola aszimptotáival párhuzamos egyenesek viszont jól szemléltetik, hogy általában mindkét feltétel lényeges: az érintő a sík olyan egyenese, melynek

(i) pontosan egy közös pontja van az alakzattal és

(ii) minden további pontja külső pont.

Felhívjuk a figyelmet arra is, hogy a sík pontjai természetes módon vagy belső, vagy külső pontok, vagy pedig a szóban forgó kúpszelet pontjai – az érintő értelmezése során ezt használtuk ki. Nyilvánvaló azonban, hogy ha nincs mód a sík pontjainak osztályozására, akkor ez az út nem járható. Teljes általánosságban az érintő értelmezésének problémáját a matematikai analízis oldja meg: az érintő a pontra illeszkedő szelők „határhelyzete". Ha a sík egy Q pontja külső pontja

(i) az F_1 és F_2 fókuszú, $2a$ nagytengelyű ellipszisnek, akkor

$$d(Q, F_1) + d(Q, F_2) > 2a,$$

(ii) az F_1 és F_2 fókuszú, $2a$ valós tengelyű hiperbolának, akkor

$$|d(Q, F_1) - d(Q, F_2)| < 2a,$$

(iii) az F fókuszú, l vezéregyenesű parabolának, akkor

$$d(Q, F) > d(Q, l),$$

azaz közelebb van a vezéregyeneshez, mint a fókuszhoz.

9.5. Definíció. *Az ellipszis és a hiperbola bármely P pontja esetén a ponthoz tartozó* rádiuszvektorokon *az (F_1, P) és az (F_2, P) reprezentánsú vektorokat értjük; a parabola P pontjához tartozó* rádiuszvektort *az (F, P) irányított szakasz reprezentálja.*

Egy minimumfeladat. Adott a sík egy l egyenese, továbbá az F_1 és az F_2 pontok a szóban forgó egyenes ugyanazon oldalán. Keressük az egyenesnek azt a P pontját, melyre az

$$f(P) := d(P, F_1) + d(P, F_2)$$

függvény értéke minimális.

A feladat megoldásához tükrözzük (például) az F_2 pontot az l egyenesre és alkalmazzuk az

$$f(P) = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P, F_1) + d(P, F_2') \;\geq\; d(F_1, F_2')$$

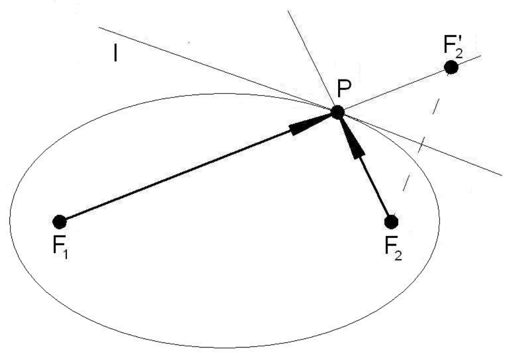
háromszög - egyenlőtlenséget az egyenes pontjaira. Egyenlőség pontosan akkor áll, ha P az F_1 és az F_2' tükörkép által meghatározott egyenes l - lel vett metszéspontja. Ekvivalens módon: az egyenes felezi az (F_1, P) és az (F_2, P) reprezentánsú vektorok mellékszögét.

9.1. Tétel. *Az ellipszis, a hiperbola és a parabola minden pontjában egy és csak egy érintő húzható, mely*

(i) *az ellipszis esetében felezi a ponthoz tartozó rádiuszvektorok mellékszögét,*

(ii) *a hiperbola esetében felezi a ponthoz tartozó rádiuszvektorok szögét,*

(iii) *a parabola esetében pedig felezi a ponthoz tartozó rádiuszvektor és a pontból a vezéregyenesre bocsátott merőleges egyenes szögét.*



32. ábra. Az ellipszis érintői.

Bizonyítás. Illusztrációképpen bebizonyítjuk az ellipszisre vonatkozó állítást. A hiperbolát és a parabolát illetően pedig a [4] szakirodalomra utalunk.

Legyen P az ellipszis egy tetszőleges pontja és tegyük fel, hogy az l egyenes felezi a rádiuszvektorok mellékszögét. Ha F_2' a megfelelő indexű fókusz l egyenesre vonatkozó tükörképe, akkor a szögfelezési tulajdonság miatt az F_1, a P és az F_2' pontok kollineárisak. Kapjuk tehát, hogy

$$2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P, F_1) + d(P, F_2') = d(F_1, F_2'),$$

hiszen a tükrözés során a P pont helyben marad és megőrződik a pontok távolsága is. Ha Q az l egyenes P - től különböző pontja, akkor az F_1QF_2' háromszögben érvényes

$$d(Q, F_1) + d(Q, F_2) = d(Q, F_1) + d(Q, F_2') \ > \ d(F_1, F_2') = 2a$$

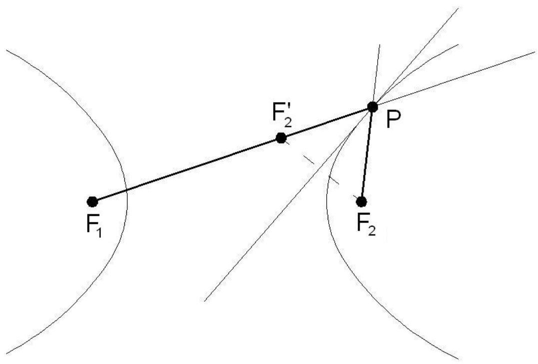
háromszög - egyenlőtlenség miatt Q külső pont. Tegyük fel most, hogy az l egyenes érinti az ellipszist a P pontban. A minimumfeladatban látott gondolatmenet szerint az F_2 fókuszt l - re tükrözve és a képpontot az F_1 fókusszal összekötve kapjuk az egyenesen azt a pontot, melyre a fókuszoktól mért távolságok összege minimális. Ha ez a P - től különböző Q pont, akkor a minimumfeladat megoldásaként egyrészt

$$d(Q, F_1) + d(Q, F_2) \; < \; d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a,$$

másrészt pedig az érintő egy P - től különböző, s ennélfogva külső pontjaként:

$$d(Q, F_1) + d(Q, F_2) \; > \; 2a.$$

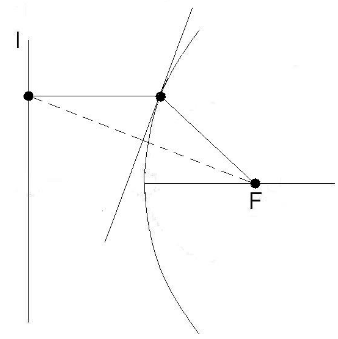
Az ellentmondás mutatja, hogy az l egyenes minimumpontja egybeesik az érintési ponttal, vagyis l felezi a P ponthoz tartozó rádiuszvektorok mellékszögét. ∎



33. ábra. A hiperbola érintői.

9.6. Megjegyzés. A tételben megfogalmazott tulajdonságok fontos szerepet játszanak a tükröző felületek elméletében. Tipikus példa a forgásparaboloid, mely úgy keletkezik, hogy a parabolát a tengelye körül megforgatjuk. A forgástengellyel párhuzamosan érkező sugarak éppen a parabola fókuszán áthaladva verődnek vissza.

Felhívjuk a figyelmet arra is, hogy a P ponton áthaladó, konfokális – azaz közös fókuszokkal rendelkező – ellipszis és hiperbola adott



34. ábra. A parabola érintői.

pontbeli érintői egymásra merőlegesek, ami – definíció szerint – a görbék merőlegességét jelenti. A konfokális ellipszisek és hiperbolák serege tehát egy olyan hálózatot alkot, melynek minden pontján egymást merőlegesen metsző görbék haladnak át. A legegyszerűbb görbék természetesen az egyenesek. A Descartes - féle koordinátarendszerek tengelyeivel párhuzamos egyenesek ugyanilyen tulajdonságú hálózatot alkotnak. Némi képzelőerővel tehát a koordinátarendszer fogalmának egy általánosabb értelmezéséhez jutunk – ún. görbevonalú koordinátarendszerek.

9.4. Feladat. *Adott az ellipszis*

(i) *egyik fókusza, P_1 és P_2 pontjai, továbbá a nagytengely $2a$ hossza; szerkesztendő az ellipszis másik fókusza,*

(ii) *mindkét fókusza és egy érintője; szerkesztendő az érintési pont és az ellipszis tengelypontjai.*

9.5. Feladat. *Adott a hiperbola*

(i) *egyik fókusza, P_1 és P_2 pontjai, továbbá a valós tengely $2a$ hossza; szerkesztendő a hiperbola másik fókusza,*

(ii) *mindkét fókusza és egy érintője; szerkesztendő az érintési pont és a hiperbola tengelypontjai.*

9.6. Feladat. *Adott a parabola*

(i) *fókusza, továbbá* P_1 *és* P_2 *pontjai; szerkesztendő a parabola vezéregyenese,*

(ii) *vezéregyenese, továbbá* P_1 *és* P_2 *pontjai; szerkesztendő a parabola fókusza,*

(iii) *fókusza, egy érintője és az érintési pont; szerkesztendő a tengely és a vezéregyenes,*

(iv) *vezéregyenese, egy érintője és az érintési pont; szerkesztendő a parabola fókusza,*

(v) *vezéregyenese, egy érintője és egy* P *pontja; szerkesztendő a parabola fókusza.*

10. A kúpszeletek koordinátageometriája

A kúpszeletek geometriai definíciója után koordinátageometriai leírásukkal ismerkedünk meg. Mindhárom esetben szó lesz a kanonikus, a fokális, illetve a polárkoordinátás egyenletekről, melyek alkalmasan választott koordinátarendszerekre vonatkozóan a kúpszeleteket definiáló analitikus relációk. Látni fogjuk, hogy látszólagos különbözőségük ellenére ezek az alakzatok sok szempontból egységesen kezelhetők és lehetőség van egységes definiálásukra is. A definíció megalkotása során a kevésbé szokásos utat követjük: koordinátageometriai eredményeket fogalmazunk át a szintetikus geometria nyelvére.

A kanonikus egyenletek. Az egyenletek felírásához először is elhelyezzük az ellipszist, a hiperbolát, illetve a parabolát egy - egy ún. *kanonikus koordinátarendszerben*. Ezek olyan Descartes - féle koordinátarendszerek a síkon, melyek kezdőpontja az ellipszis és a hiperbola esetében a centrum, a parabola esetében pedig a tengelypont. Az $\mathbf{i}$ és a $\mathbf{j}$ bázisvektorok úgy vannak megválasztva, hogy

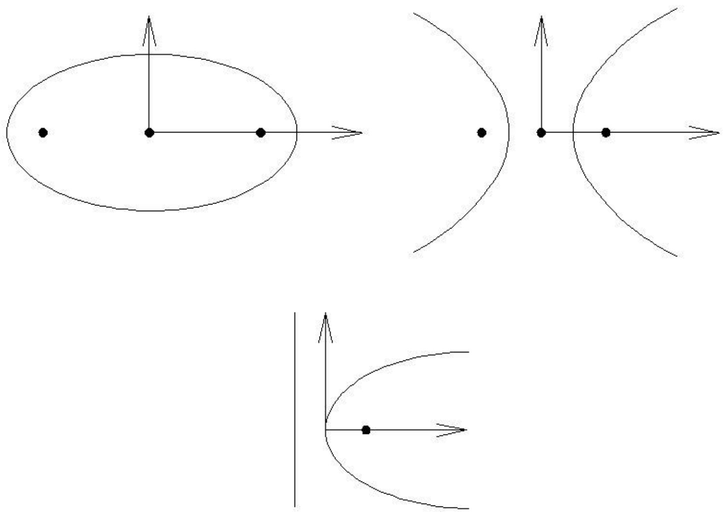
(i) az ellipszis esetében az $\mathbf{i}$ vektor a nagytengellyel, következésképpen $\mathbf{j}$ a kistengellyel

(ii) a hiperbola esetében az $\mathbf{i}$ vektor a valós tengellyel, következésképpen $\mathbf{j}$ a képzetes tengellyel

(iii) a parabola esetében az $\mathbf{i}$ vektor a tengellyel, következésképpen $\mathbf{j}$ a vezéregyenessel

párhuzamos.

Megállapodunk abban is, hogy ha az $\mathbf{i}$ vektort a koordinátarendszer kezdőpontjából reprezentáljuk, akkor az általa meghatározott félegyenes tartalmazza a parabola fókuszát.



35. ábra. A kanonikus koordinátarendszerek.

10.1. Tétel. *A kanonikus koordinátarendszerre vonatkozóan az ellipszis, a hiperbola és a parabola egyenlete rendre*

(i) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, *ahol* a *és* b *a nagy, illetve a kis féltengely,*

(ii) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, *ahol* a *és* b *a valós, illetve a képzetes féltengely,*

(iii) $y^2 = 2px$, *ahol* p *a parabola paramétere.*

Bizonyítás. Tekintsük először is az ellipszis esetét. A koordinátarendszer megválasztása miatt a fókuszok helyvektora rendre az $\mathbf{i}$ vektor $\pm c$ - szerese. A határozottság kedvéért tegyük fel, hogy $F_1(c, 0)$ és $F_2(-c, 0)$. A $P(x, y)$ pont pontosan akkor tartozik az ellipszishez, ha

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a,$$

ami a pontok távolságát Descartes - féle koordinátarendszerben leíró képlet szerint a

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

egyenlettel ekvivalens. Az áttekinthetőség kedvéért legyen

$$r_1:=\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \text{és} \quad r_2:=\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Négyzetre emelés és átrendezés után az

$$(r_1+r_2)^2=4a^2,$$

illetve a

$$2r_1r_2-\Big(4a^2-(r_1^2+r_2^2)\Big)=0$$

összefüggéshez jutunk. Ebben már csak a távolságok szorzata tartalmaz gyökös kifejezést, amit kiküszöbölhetünk, ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk a $2r_1r_2+\Big(4a^2-(r_1^2+r_2^2)\Big)$ kifejezéssel. Az összeg és különbség szorzatára vonatkozó ismert algebrai azonosság szerint

$$4r_1^2r_2^2-\Big(4a^2-(r_1^2+r_2^2)\Big)^2=0$$

következik. Elvégezve a négyzetre emelést:

$$4r_1^2r_2^2-16a^4+8a^2(r_1^2+r_2^2)-(r_1^2+r_2^2)^2=0,$$

ahol

$$4r_1^2r_2^2-(r_1^2+r_2^2)^2=4r_1^2r_2^2-r_1^4-r_2^4-2r_1^2r_2^2=-(r_1^4+r_2^4-2r_1^2r_2^2)=$$
$$=-(r_1^2-r_2^2)^2,$$

következésképpen

$$-16a^4+8a^2(r_1^2+r_2^2)-(r_1^2-r_2^2)^2=0.$$

Vegyük észre, hogy

$$r_1^2 + r_2^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2) \ \text{ és } \ r_1^2 - r_2^2 = -4cx.$$

Behelyettesítve

$$-16a^4 + 16a^2(x^2 + y^2 + c^2) - 16c^2x^2 = 0,$$

ahonnan

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 + a^2(c^2 - a^2) = 0, \ \text{ ahol } \ a^2 = b^2 + c^2.$$

Ha elosztjuk az egyenlet mindkét oldalát a változót nem tartalmazó kifejezéssel, akkor rendezve éppen a kívánt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

egyenlethez jutunk. A hiperbola egyenletének levezetése teljesen hasonló – az egyetlen különbség a $c^2 = a^2 + b^2$ összefüggés a valós és a képzetes féltengely, illetve a lineáris excentricitás között. Térjünk rá a parabola vizsgálatára. A koordinátarendszer felvétele biztosítja, hogy a vezéregyenes egyenlete

$$x + \frac{p}{2} = 0.$$

Mivel a vezéregyenes párhuzamos a Descartes - féle koordinátarendszer „függőleges" tengelyével, ezért a sík $P(x, y)$ pontjának merőleges vetülete az egyenesen egyszerűen a $P'(-\frac{p}{2}, y)$ pont. A vezéregyenes és a P pont távolsága tehát

$$d(P, P') = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Másfelől

$$d(P, F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

hiszen $F(\frac{p}{2}, 0)$, ahol p a parabola paramétere. Emlékeztetünk rá, hogy a koordinátarendszer kezdőpontja éppen a tengelypont. A $P(x, y)$ pont pontosan akkor tartozik a parabolához, ha

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

amit négyzetre emelve az

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$

egyenlethez jutunk. Elvégezve a négyzetre emelést és rendezve:

$$y^2 = 2px,$$

ami bizonyítandó volt. ■

10.1. Feladat. *Legyen $0 < \lambda < 1$ egy rögzített valós szám. Descartes - féle koordinátarendszert alapul véve bizonyítsa be, hogy a sík pontjainak*

$$P(x, y) \mapsto P'(x, \lambda y)$$

transzformációja körhöz ellipszist rendel.

10.2. Feladat. *A szögfelezési tulajdonságok segítségével írja fel*

(i) *az $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ kanonikus egyenletű ellipszis $P(2, -3)$,*

(ii) *az $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ kanonikus egyenletű hiperbola $P(5, -4)$,*

(iii) *az $y^2 = 18x$ kanonikus egyenletű parabola $P(2, -6)$*

pontjában vont érintőegyenesének egyenletét.

10.1. Definíció. *A kanonikus koordinátarendszerre vonatkozóan az*

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

egyenlettel definiált metsző egyenespár tagjait a hiperbola aszimptotáinak *nevezzük.*

10.3. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy a centrumra illeszkedő és a hiperbolát* nem *metsző egyenesek egy olyan csúcsszögtartományt határoznak meg, melynek határegyenesei a hiperbola aszimptotái.*

10.1. Megjegyzés. A hiperbola tehát az aszimptotáihoz simul – ezt a tulajdonságot kihasználhatjuk a kúpszelet ábrázolásánál még egy gyors szabadkézi rajz esetében is.

A fokális egyenletek. Az egyenletek felírásához először is elhelyezzük az ellipszist, a hiperbolát, illetve a parabolát egy - egy ún. *fokális koordinátarendszerben.* Ezek olyan Descartes - féle koordinátarendszerek a síkon, melyek kezdőpontja a(z egyik) fókusz. Az **i** és a **j** bázisvektorok úgy vannak megválasztva, hogy

(i) az ellipszis esetében az **i** vektor a nagytengellyel, következésképpen **j** a kistengellyel

(ii) a hiperbola esetében az **i** vektor a valós tengellyel, következésképpen **j** a képzetes tengellyel

(iii) a parabola esetében az **i** vektor a tengellyel, következésképpen **j** a vezéregyenessel

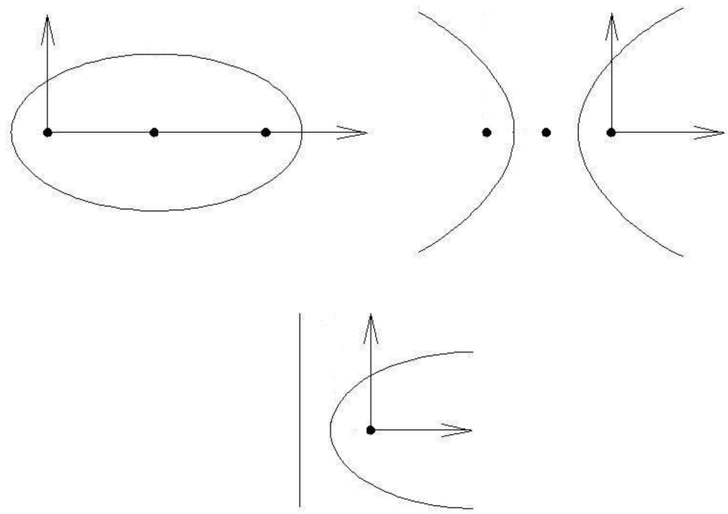
párhuzamos.

Megállapodunk abban is, hogy ha az **i** vektort a koordinátarendszer kezdőpontjából reprezentáljuk, akkor az általa meghatározott félegyenes

(iv) tartalmazza a másik fókuszt (az ellipszis esetében),

(v) kiegészítő félegyenese tartalmazza a másik fókuszt (a hiperbola esetében),

(vi) kiegészítő félegyenese tartalmazza a tengelypontot (a parabola esetében).



36. ábra. A fokális koordinátarendszerek.

10.2. Definíció. *A kúpszelet* paramétere *ellipszis és hiperbola esetében*

$$p := \frac{b^2}{a},$$

míg az ún. numerikus excentricitás *a parabola esetében* 1*, az ellipszis és a hiperbola esetében pedig*

$$e := \frac{c}{a}.$$

10.2. Tétel. *A fokális koordinátarendszerre vonatkozóan az ellipszis, a hiperbola és a parabola egyenlete*

$$\xi^2 + \eta^2 = (e\xi + p)^2 \tag{29}$$

alakú, ahol p *a kúpszelet paramétere,* e *pedig a numerikus excentricitás.*

Bizonyítás. A fokális egyenlet levezetéséhez vegyük észre, hogy a fokális koordinátarendszer F kezdőpontját az ellipszis és a hiperbola centrumába, a parabola esetében pedig a tengelypontba eltolva, a kanonikus koordinátarendszert kapjuk. Egy tetszőleges P pontnak a kanonikus, illetve a fokális koordinátarendszer kezdőpontjára vonatkozó helyvektorai között tehát egy

$$\mathbf{p}(\text{kanonikus}) = \mathbf{p}(\text{fokális}) - \mathbf{v}$$

alakú összefüggés áll fenn, míg a koordinátarendszerek bázisa közös. A (iv), (v) és (vi) megállapodások szerint a $\mathbf{v}$ eltolóvektor rendre

(i) az $\mathbf{i}$ vektor c - szerese (az ellipszis esetében),

(ii) az $\mathbf{i}$ vektor c - szeresének ellentettje (a hiperbola esetében),

(iii) az $\mathbf{i}$ vektor $\frac{p}{2}$ - szeresének ellentettje (a parabola esetében).

Ennek megfelelően a kanonikus és a fokális koordináták kapcsolatát a

(iv) $x = \xi - c$ és $y = \eta$ (az ellipszis esetében),

(v) $x = \xi + c$ és $y = \eta$ (a hiperbola esetében),

(vi) $x = \xi + \frac{p}{2}$ és $y = \eta$ (a parabola esetében)

képletek írják le. Az összefüggések jobb oldalát a kanonikus egyenletekbe helyettesítve kapjuk a (29) alakú fokális egyenletet. ■

10.2. Megjegyzés. Egy (29) alakú egyenlet a sík Descartes - féle koordinátarendszerére vonatkozóan ellipszis, hiperbola, vagy parabola egyenlete aszerint, amint $0 < e < 1$, $1 < e$, vagy $1 = e$.

10.4. Feladat. *A fokális egyenlet alapján fogalmazza meg az ellipszis és a hiperbola paraméterének a geometriai jelentését.*

A kúpszeletek fokális egyenletét a

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = e\left|\xi + \frac{p}{e}\right|$$

alakba írva látható, hogy a bal oldali kifejezés éppen a $P(\xi, \eta)$ pont távolsága a koordinátarendszer F kezdőpontjától, míg a jobb oldali abszolút értékes kifejezés a

$$\xi + \frac{p}{e} = 0$$

egyenestől mért távolság. Definiálhatjuk tehát a kúpszeleteket az alábbi alternatív módon is.

10.3. Definíció. *Legyen F a sík rögzített pontja és tekintsünk egy rá nem illeszkedő l egyenest a síkban. A*

$$\mathcal{K} := \left\{ P \in S \;\middle|\; e = \frac{d(P, F)}{d(P, l)} \right\}$$

ponthalmaz ellipszis, hiperbola, vagy parabola aszerint, hogy $0 < e < 1$, $1 < e$, vagy $1 = e$.

10.3. Megjegyzés. Egy kúpszelet tehát azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, melyeknek egy rögzített ponttól és egy rögzített egyenestől mért távolsághányadosa állandó.

A polárkoordinátás egyenletek. Az affin koordinátarendszer használata kényelmes, de nem kizárólagos módszer arra, hogy megadjuk a sík pontjainak helyzetét – gyakori a *polárkoordináta-rendszer* alkalmazása is. Ehhez egy O kezdőpontú f félegyenest választunk a síkban. A sík $P \neq O$ pontjának *polárkoordinátái* az O ponttól mért $r := d(O, P)$ távolság és az f, valamint az O kezdőpontú P - t tartalmazó félegyenes által bezárt φ irányított szög. Megállapodunk abban, hogy az O kezdőpont φ (szög)koordinátája tetszőleges. A polárkoordinátás egyenletek felírásához rögzítsük a koordinátarendszerek kezdőpontját a kúpszelet (egyik) fókuszában. A kezdő félegyenes pedig legyen úgy megválasztva, hogy

(i) tartalmazza a másik fókuszt (az ellipszis esetében),

(ii) kiegészítő félegyenese tartalmazza a másik fókuszt (a hiperbola esetében),

(iii) kiegészítő félegyenese tartalmazza a tengelypontot (a parabola esetében).

10.3. Tétel. *Az ellipszis, a hiperbola és a parabola polárkoordinátás egyenlete rendre*

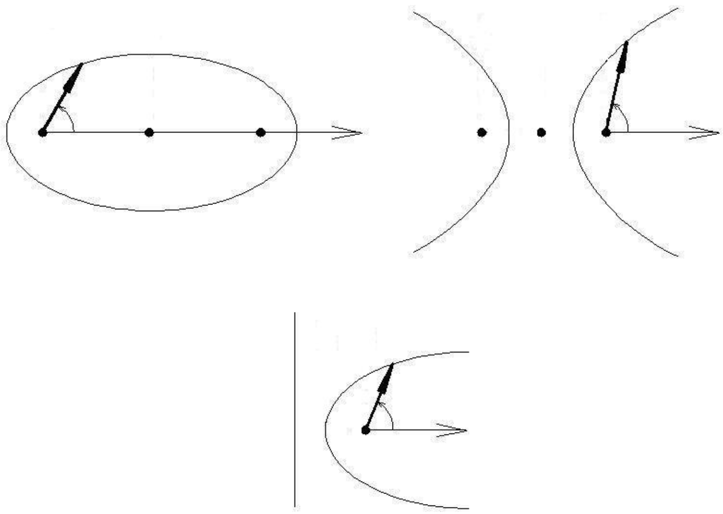
(i) $$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$$ (ii) $$r = \frac{p}{(\pm 1) - e\cos\varphi}$$

(iii) $$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$$

alakú, ahol p *a kúpszelet paramétere,* e *pedig a numerikus excenricitás.*

Bizonyítás. A trigonometrikus függvények segítségével egyszerű kapcsolat írható fel a fokális koordináták és a polárkoordináták között:

$$\xi = r\cos\varphi \quad \text{illetve} \quad \eta = r\sin\varphi;$$



37. ábra. A polárkoordináta - rendszerek.

a képleteket a fokális egyenletbe helyettesítve

$$r^2 = (er\cos\varphi + p)^2,$$

ahonnan azt kapjuk, hogy

$$\pm r = er\cos\varphi + p.$$

Rendezés után

$$r\Big((\pm 1) - e\cos\varphi\Big) = p,$$

végül pedig

$$r = \frac{p}{(\pm 1) - e\cos\varphi}$$

következik, hiszen a kúpszelet paramétere egyik esetben sem zérus, ami kizárja a nevező eltünését a kúpszelet pontjait jellemző forgásszögek értéke mellett. Ráadásul, ha $e \leq 1$, akkor $1 + e\cos\varphi \geq 0$ teljesül bármely forgásszögre, ami azt jelenti, hogy az ellipszis és a parabola esetében a negatív előjellel felírt egyenlet elhagyható. ∎

10.4. Megjegyzés. A polárkoordináták fontos szerepet játszanak a komplex számok elméletében is (ld. trigonometrikus alak). A részleteket illetően a [8] szakirodalomra utalunk.

11. Kúpszeletek – térbeli származtatás

Ebben a fejezetben rámutatunk a kúpszeletek elnevezés eredetére: a teljes forgáskúpfelület síkmetszeteit vizsgáljuk. Egy (teljes) forgáskúpfelület úgy keletkezik, hogy a sík metsző egyenespárját megforgatjuk az egyik szögfelező körül. A metszéspont a kúp *csúcsa*, míg a kúp alkotói a szóban forgó egyenesek elforgatottjai. A kúp *tengelyén* a forgástengelyt, *félnyílásszögén* pedig annak a szögnek a felét értjük, melynek szögfelezője körül forgatunk. Ha egy sík illeszkedik a kúp csúcsára, akkor a kúpfelületből

(i) csak a kúp csúcsát,

(ii) két alkotóegyenesét,

(iii) egy alkotóegyenesét

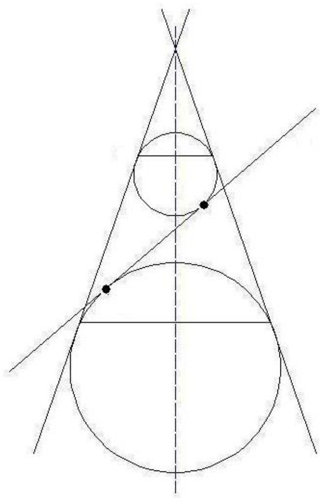
tartalmazza aszerint, amint a sík és a kúptengely szöge [7] a félnyílásszögnél nagyobb, kisebb, vagy a félnyílásszöggel egyenlő. A szóban forgó síkkal párhuzamos síkok tehát a fenti eseteknek megfelelően vagy egyetlen alkotóval sem, vagy pontosan két, vagy pedig pontosan egy alkotóval párhuzamosak.

11.1. Tétel. *A forgáskúp csúcsán át nem haladó, a kúptengelyre nem merőleges sík a kúpfelületet ellipszisben, hiperbolában illetve parabolában metszi aszerint, amint a sík egy alkotóval sem, pontosan két alkotóval, illetve pontosan egy alkotóval párhuzamos.*

Bizonyítás. Illusztrációképpen belátjuk az ellipszisre vonatkozó állítást. A kúp tengelyére illeszkedő, a metsző S síkra merőleges vetületi sík a kúpfelület két alkotóegyenesét (mint metsző egyenespárt), a kúptengelyt (mint szögfelezőt) és az S síkkal vett metszésvonalat

[7] Térelemek szögével kapcsolatban ld. 12. paragrafus.

tartalmazza, mely a szögtartományok egyikéből egy háromszöget vág le. Tekintsük a háromszög beírt és a metszésvonalon fekvő oldalához írt körét [8]. Jelölje F_1 és F_2 a köröknek a metszésvonallal vett érintési



38. ábra. Az ellipszis, mint kúpszelet – vetületi ábra.

pontjait. Mivel mindkét kör középpontja illeszkedik a szögtartományt felező kúptengelyre, ezért a köröket a tengely körül megpörgetve két ún. *Dandelin - féle gömbhöz* jutunk. A gömbök a kúpfelületet a k_1 és a k_2 körökben, míg az S síkot az F_1 és F_2 pontokban érintik. Legyen most P a metszetgörbe tetszőleges pontja és messe a kúp P - re illeszkedő alkotója ezeket a köröket az A_1 és az A_2 pontokban. Tekintettel arra, hogy a gömbhöz egy külső pontból vont érintőszakaszok egyenlők, azt kapjuk, hogy

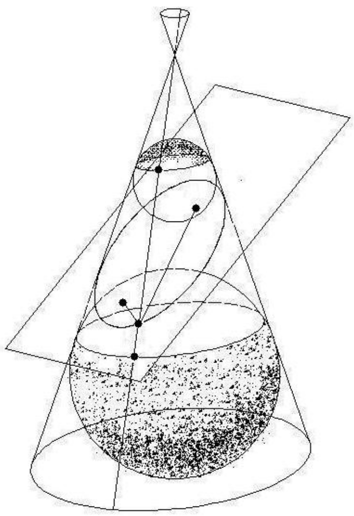
$$d(P, F_1) = d(P, A_1) \quad \text{és} \quad d(P, F_2) = d(P, A_2),$$

[8]Ez a kör érinti a szóban forgó oldalt és a másik két oldal meghosszabbítását.

ahonnan összegzéssel

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(A_1, A_2),$$

ami a forgásszimmetria miatt a P pont választásától független állandó.



39. ábra. Az ellipszis, mint kúpszelet.

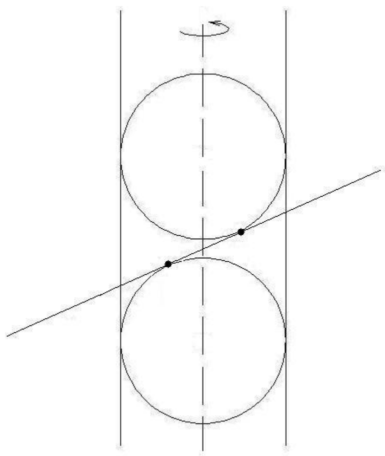
A hiperbola és a parabola esetét illetően ld. [4]. Szigorúan véve csupán azt bizonyítottuk be, hogy a metszetgörbe pontjai illeszkednek az S sík F_1 és F_2 fókuszú, $2a = d(A_1, A_2)$ nagytengelyű ellipszisére. A megfordítást illetően a szemléletre hivatkozunk. ■

11.1. Feladat. *Hol helyezkednek el azoknak a forgáskúpoknak a csúcspontjai, melyek az S síkból egy adott ellipszist metszenek ki?*

Térgeometriai származtatásuk birtokában ismertetjük a kúpszeletek érintőinek konstrukcióját: a metszetgörbe P pontjában a kúpfelület érintősíkját az S síkkal metszve éppen az érintőegyenest kapjuk.

Az érintősík előállításához tekintsünk két egyszerű felületi görbét, nevezetesen a P - re illeszkedő alkotót és a P - re illeszkedő keresztmetszetkört. Az alkotóegyenes és a kör P - beli érintője a kívánt érintősíkot feszíti ki. Az ellipszis azonban származtatható egy forgáshengerfelület síkmetszeteként is. A bizonyítást a 11.1. Tétel mintájára az alábbi vetületi ábra alapján végezhetjük el. A kúpszeletekkel – és az ismertetett áttekintés részleteivel – kapcsolatban pedig a [4] szakirodalomra utalunk. Egy forgáshengerfelület úgy keletkezik, hogy a sík párhuzamos egyenespárját megforgatjuk az egyenesekkel párhuzamos szimmetriatengely körül. A henger alkotói a szóban forgó egyenesek elforgatottjai. A henger *tengelyén* a forgástengelyt, *átmérőjén* pedig a párhuzamos egyenespár tagjainak távolságát értjük.

11.2. Tétel. *A forgáshenger tengelyével nem párhuzamos és a tengelyre nem merőleges sík a hengerfelületet ellipszisben metszi.*



40. ábra. A 11.2. Tétel bizonyítása.

12. Koordinátageometria a térben

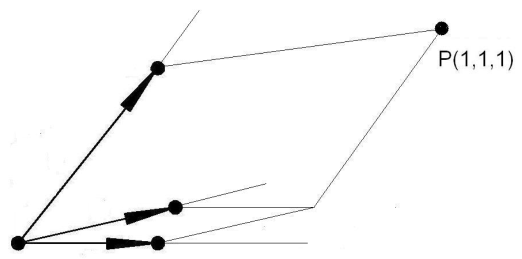
Ebben a fejezetben az euklideszi tér koordinátageometriájával ismerkedünk meg. A tér pontjainak helyzetét rendezett számhármasok segítségével fogjuk jellemezni és viszont, minden rendezett számhármasnak megfeleltetjük a tér egy adott pontját. Ha a hozzárendelésnek egy ilyen szabálya a rendelkezésünkre áll, akkor azt mondjuk, hogy adott egy koordinátarendszer a térben.

Koordinátarendszerek a térben. Emlékeztetünk rá, hogy a szabadvektorok tere háromdimenziós vektortér a szokásos összeadásra és skalárral való szorzásra nézve – a háromtagú, lineárisan független rendszereket *bázisnak* nevezzük. Legyen O a tér egy tetszőlegesen rögzített pontja. Egy *affin koordinátarendszer* az O kezdőpontból és az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, illetve $\mathbf{c}$ bázisvektorokból áll. Ezeket *koordinátavektoroknak* nevezzük. Ha P a tér egy további pontja, akkor az (O, P) irányított szakasszal reprezentált $\mathbf{p}$ vektor a P pont *helyvektora*, míg a

$$\mathbf{p} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$$

előállításban szereplő x, y és z együtthatók a P pont *koordinátái* a szóban forgó koordinátarendszerre vonatkozóan – kapcsolatukat a $P(x, y, z)$ jelölés fejezi ki. A vektoralgebra elemei szerint a tér általános helyzetű (nemkomplanáris) O, A, B és C pontjai affin koordinátarendszert határoznak meg, ha megállapodunk a pontok státuszát illetően is: legyen például O a koordinátarendszer kezdőpontja, A, B és C pedig a tengelypontjai, vagyis a koordinátavektorokat az (O, A), (O, B) és az (O, C) irányított szakaszok reprezentálják. Egy affin koordinátarendszert *derékszögű*, vagy *Descartes - féle koordinátarendszernek* hívunk, ha koordinátavektorai az egymásra merőleges, jobbsodrású $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ egységvektorok.

12.1. Példa. *Descartes - féle koordinátarendszer esetén a* $P(x_1, y_1, z_1)$



41. ábra. Affin koordinátarendszer.

és a $Q(x_2, y_2, z_2)$ *pontok távolsága a*

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \tag{30}$$

képlet segítségével számítható ki.

12.1. Feladat. *Adjon képletet a távolság kiszámítására tetszőleges affin koordinátarendszer esetén.*

12.2. Feladat. *Számítsa ki egy kocka csúcsainak koordinátáit arra az affin koordinátarendszerre vonatkozóan, melynek kezdőpontja az egyik csúcs, koordinátavektorait pedig az ebből a csúcsból induló lapátlók reprezentálják.*

12.1. Definíció. *Rögzítsünk egy affin koordinátarendszert a térben; a* $\Phi \subset \mathbb{E}$ *alakzat* definiáló relációján *olyan* $\rho \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *háromváltozós relációt értünk, melyre*

$$(x, y, z) \in \rho \quad \Leftrightarrow \quad P(x, y, z) \in \Phi$$

teljesül.

A leggyakoribb definiáló relációk az egyenlőség, illetve az egyenlőtlenség:

$$3x + 2y + z + 6 = 0, \text{ illetve } (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 < 1.$$

A térbeli rácsok esetében viszont $\rho := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a definiáló reláció. Az affin koordinátarendszerekre vonatkozóan definiált rácsokat *paralelepipedonrácsnak* nevezzük. Ezek speciális esete a Descartes - féle koordinátarendszer esetén fellépő *kockarács*.

12.3. Feladat. *A vegyesszorzás műveleti tulajdonságai segítségével igazolja, hogy a rácsparalelepipedonok és a koordinátavektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatának a hányadosa egész szám.*

A sík egyenlete. Az egyenletek (egyenlőségek) speciális relációk. Ezek közül is a legegyszerűbbek az

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

alakú lineáris egyenletek; A, B, C és D rögzített valós számok. Ha A, B és C egyszerre tűnnek el, akkor egyenletünk a $D = 0$ alakra redukálódik, ami D értékétől függően azonosság, vagy ellentmondás. A továbbiakban ezeket *triviális eseteknek* nevezzük és kizárjuk. Meg fogjuk mutatni, hogy a triviális esetektől eltekintve, a háromismeretlenes lineáris egyenletek az euklideszi tér síkjainak a definiáló relációi az affin koordinátarendszerekre vonatkozóan.

Az euklideszi tér bármely síkja megadható

(i) három nemkollineáris pontja segítségével,

(ii) egy pontja és a síkkal párhuzamos lineárisan független vektorok segítségével,

(iii) egy pontja és egy *normálvektora*, azaz a síkban reprezentálható vektorokra merőleges nemzérus vektor segítségével.

A sík megadásának különböző módszerei között természetesen szoros kapcsolat van: ha ugyanis a sík P, Q és R nemkollineáris pontjai a rendelkezésünkre állnak, akkor a (P, Q) és a (P, R) irányított szakaszokkal reprezentált $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok a síkkal párhuzamosak és lineárisan függetlenek. Másfelől ha adott a sík egy P pontja, továbbá a síkban reprezentálható lineárisan független $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok, akkor a P pont és a P kezdőpontú reprezentánsok Q és R végpontjai nem illeszkednek egy egyenesre. A (ii) és a (iii) módszerek ekvivalenciája szemléletesen nyilvánvaló.

Rögzítsünk egy affin koordinátarendszert, melynek kezdőpontja az O pont, koordinátavektorai pedig az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és a $\mathbf{c}$ vektorok. Tekintsük a nemkollineáris P, Q és R pontokra illeszkedő S síkot és legyen $\mathbf{v}$, illetve $\mathbf{w}$ a (P, Q), illetve a (P, R) reprezentánsú vektor, azaz

$$\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p} \quad \text{és} \quad \mathbf{w} = \mathbf{r} - \mathbf{p},$$

ahol $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, illetve $\mathbf{r}$ rendre a P, Q, illetve az R pontok helyvektora a rögzített koordinátarendszerre vonatkozóan. Ekkor a következő kijelentések ekvivalensek:

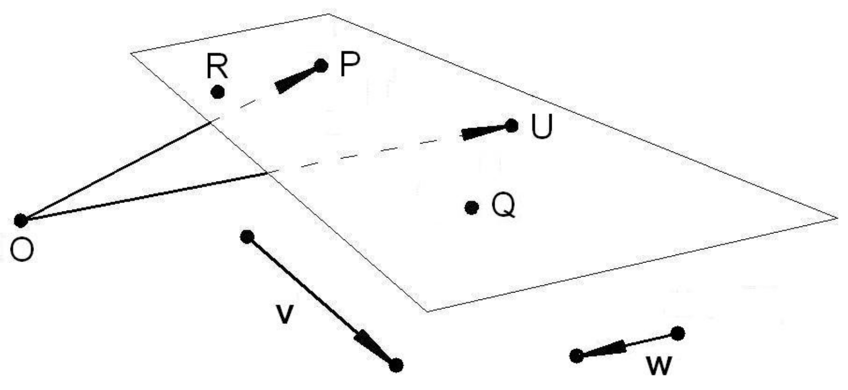
(i) $U \in S$,

(ii) P, Q, R és U komplanáris,

(iii) a (P, Q), (P, R) és a (P, U) reprezentánsú vektorok lineárisan függők, azaz

$$\mathbf{u} - \mathbf{p} = \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}$$

teljesül valamely λ és μ valós szám mellett, ahol $\mathbf{u}$ az U pont helyvektora. A szóban forgó vektoregyenlet a sík paraméteres előállítása.



42. ábra. A sík egyenlete.

A vektorok lineáris függőségét azonban a vegyesszorzat eltűnésével is jellemezhetjük:

$$\mathbf{vw}(\mathbf{u}-\mathbf{p})=0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{v}\times\mathbf{w})(\mathbf{u}-\mathbf{p})=0.$$

Részletesen kiírva,

$$\mathbf{v}=v_x\mathbf{a}+v_y\mathbf{b}+v_z\mathbf{c} \;\text{ és }\; \mathbf{w}=w_x\mathbf{a}+w_y\mathbf{b}+w_z\mathbf{c},$$

ahonnan a vektoriális szorzat műveleti szabályaira tekintettel

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w}=(v_xw_y-w_xv_y)\mathbf{a}\times\mathbf{b}+(v_yw_z-w_yv_z)\mathbf{b}\times\mathbf{c}+(v_zw_x-w_zv_x)\mathbf{c}\times\mathbf{a}$$

következik. Másfelől

$$\mathbf{u}-\mathbf{p}=(x-x_\circ)\mathbf{a}+(y-y_\circ)\mathbf{b}+(z-z_\circ)\mathbf{c},$$

ahol x, y és z az U pont, $x_\circ$, $y_\circ$ és $z_\circ$ pedig a P pont koordinátái. Skaláris szorzatukat véve először is az

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{a}=0, \quad \text{illetve az} \quad (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{b}=0$$

típusú vegyesszorzatok eltűnésére hívjuk fel a figyelmet. A 7.3. Tétel szerint pedig

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\mathbf{b}=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\mathbf{a}.$$

Mindezeket felhasználva a $\mathbf{vw}(\mathbf{u}-\mathbf{p})$ vegyesszorzat eltűnésével ekvivalens

$$Ax+By+Cz+D=0$$

egyenletet kapjuk, ahol

$$A:=v_yw_z-v_zw_y, \quad B:=-(v_xw_z-v_zw_x) \quad \text{és} \quad C:=v_xw_y-v_yw_x,$$

illetve

$$D=-(v_yw_z-v_zw_y)x_\circ+(v_xw_z-v_zw_x)y_\circ-(v_xw_y-v_yw_x)z_\circ.$$

Világos, hogy az A, B és C egyidejű eltűnése ellentmond a $\mathbf{v}$ és a $\mathbf{w}$ vektorok lineáris függetlenségének, ugyanis vektoriális szorzatuk éppen ezeknek az együtthatóknak a segítségével kombinálható ki az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ és a $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ vektorokból. Mivel a $\mathbf{v}$ vektor P kezdőpontú reprezentánsának végpontja Q, ezért

$$\mathbf{v}=\mathbf{q}-\mathbf{p} \quad\Rightarrow\quad v_x=x_1-x_\circ,\ v_y=y_1-y_\circ \text{ és } v_z=z_1-z_\circ,$$

ahol x_1, y_1 és z_1 a Q pont koordinátái. Hasonlóan

$$\mathbf{w}=\mathbf{r}-\mathbf{p} \quad\Rightarrow\quad w_x=x_2-x_\circ,\ w_y=y_2-y_\circ \text{ és } w_z=z_2-z_\circ,$$

ahol x_2, y_2 és z_2 az R pont koordinátái. A sík egyenletében szereplő együtthatókat tehát – a sík megadásának módja szerint – tovább részletezhetjük. Megfordítva, tekintsük az

$$Ax+By+Cz+D=0$$

nemtriviális egyenlettel definiált alakzatot a térben – a határozottság kedvéért tételezzük fel, hogy $A \neq 0$. Az egyenlet megoldásának formális módszerét követve egyszerűen látható, hogy ha y és z értékét tetszőleges λ és μ valós paraméterekként megadjuk, akkor x értéke a

$$x = -\frac{1}{A}(B\lambda + C\mu + D)$$

formula alapján kiszámolható. Szaknyelven szólva: két szabad paraméterrel rendelkezünk. A megoldó számhármasok által meghatározott pontok helyvektorára pedig az

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{A}(B\lambda + C\mu + D)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$$

összefüggés írható fel, amit átalakítva:

$$\mathbf{u} = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w},$$

ahol

$$\mathbf{p} := -\frac{D}{A}\,\mathbf{a}, \quad \mathbf{v} := \mathbf{b} - \frac{B}{A}\,\mathbf{a} \;\text{ és }\; \mathbf{w} = \mathbf{c} - \frac{C}{A}\,\mathbf{a}.$$

Ez tehát a P pontra illeszkedő, a $\mathbf{v}$ és a $\mathbf{w}$ vektorok által kifeszített sík paraméteres előállítása, feltéve, hogy a szóban forgó vektorok lineárisan függetlenek. Ennek belátásához vegyük észre, hogy a

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

indirekt feltevésből kiindulva a

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} - \frac{B}{A}\,\mathbf{a} \times \mathbf{c} - \frac{C}{A}\,\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

összefüggés következik. Mindkét oldal skaláris szorzatát véve az $\mathbf{a}$ vektorral

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0,$$

ami bázisvektorok esetében lehetetlen.

12.1. Tétel. *Affin koordinátarendszert alapul véve, a tér síkjainak definiáló relációi*

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

alakú, nemtriviális háromismeretlenes lineáris egyenletek.

12.2. Tétel. *Descartes - féle koordinátarendszert alapul véve bármely sík*

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

alakú egyenletében az A, B és a C valós számok a sík normálvektorának koordinátái a koordinátavektorokra vonatkozóan.

Bizonyítás. Emlékeztetünk rá, hogy

$$A := v_y w_z - v_z w_y, \quad B := -(v_x w_z - v_z w_x) \ \text{ és } \ C := v_x w_y - v_y w_x.$$

Legyen

$$\mathbf{n} := (v_y w_z - v_z w_y)\mathbf{i} - (v_x w_z - v_z w_x)\mathbf{j} + (v_x w_y - v_y w_x, v_y)\mathbf{k}.$$

Mivel az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és a $\mathbf{k}$ koordinátavektorok alaprendszert alkotnak, ezért mind az $\mathbf{n}$ és a

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k},$$

mind pedig az $\mathbf{n}$ és a

$$\mathbf{w} = w_x\mathbf{i} + w_y\mathbf{j} + w_z\mathbf{k}$$

vektorok skaláris szorzata zérus – vegyük észre ugyanis, hogy $\mathbf{n}$ éppen a $\mathbf{v}$ és a $\mathbf{w}$ vektorok vektoriális szorzata. ∎

Metrikus feladatok megoldásánál, vagy metrikus viszonyokat tükröző alakzatok esetében a Descartes - féle koordinátarendszer használata megkönnyíti az összefüggések felírását. Tipikusan ilyen a tér pontjai és síkjai közötti távolság meghatározása, vagy – a metrikus viszonyokat tükröző legegyszerűbb alakzat – a gömb egyenletének felírása.

12.3. Tétel. *Descartes - féle koordinátarendszer esetén a* $K(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ *középpontú,* $r > 0$ *sugarú gömb egyenlete*

$$(x - x_\circ)^2 + (y - y_\circ)^2 + (z - z_\circ)^2 = r^2.$$

A gömb $P(x_*, y_*, z_*)$ *pontjára illeszkedő érintősíkjának az egyenlete pedig*

$$(x_* - x_\circ)x + (y_* - y_\circ)y + (z_* - z_\circ)z = (x_* - x_\circ)x_* + (y_* - y_\circ)y_* + (z_* - z_\circ)z_*.$$

Bizonyítás. A gömb egyenletének ismertetett alakja a (30) képlet alapján nyilvánvaló. Másfelől pedig a (K, P) reprezentánsú vektor éppen a P - beli érintősík normálvektora – a helyvektorok különbségének a koordinátáival az érintősík egyenlete könnyen felírható. ∎

12.4. Tétel. *Legyen*

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

egy sík egyenlete a tér Descartes - féle koordinátarendszerére vonatkozóan és $X(x_*, y_*, z_*)$ *a tér egy tetszőleges pontja. A sík és az* X *pont távolsága a*

$$d = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} |Ax_* + By_* + Cz_* + D|$$

képlet segítségével számolható ki.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy az egyenletben fellépő A, B és C együtthatók a sík egy normálvektorának a koordinátái. Tekintsük az ezzel párhuzamos $\mathbf{n}$ egységvektort, azaz legyen

$$\mathbf{n} = n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j} + n_z\mathbf{k},$$

ahol
$$n_x = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad n_y = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \text{és}$$
$$n_z = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$
Ha $P(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ a sík egy tetszőleges pontja, akkor az X pont és a sík távolságának a meghatározásához a (P, X) reprezentánsú vektor $\mathbf{n}$ - re eső merőleges vetületének a hosszára van szükség. Ez éppen az $(\mathbf{x}-\mathbf{p})\mathbf{n}$ skaláris szorzat abszolút értéke. Mivel

$$\mathbf{x}-\mathbf{p} = (x_* - x_\circ)\mathbf{i} + (y_* - y_\circ)\mathbf{j} + (z_* - z_\circ)\mathbf{k},$$

ezért

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{x}-\mathbf{p})\mathbf{n} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}((x_* - x_\circ)A + (y_* - y_\circ)B + (z_* - z_\circ)C) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(Ax_* + By_* + Cz_* + D),
\end{aligned}$$

hiszen $Ax_\circ + By_\circ + Cz_\circ + D = 0$. ■

12.1. Megjegyzés. Koordinátamentes formában kifejezve, a P pontra illeszkedő, $\mathbf{n}$ normálvektorú síknak a tér X pontjától való távolsága a
$$d = \frac{|(\mathbf{x}-\mathbf{p})\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$$
képlet segítségével számolható, ahol – a közös kezdőpont rögzítését követően – $\mathbf{x}$, illetve $\mathbf{p}$ rendre az X, illetve a P pont helyvektora. Alkalmazhatjuk a vektoriális szorzás műveletét is, hiszen a kérdéses

távolság az $\mathbf{x}-\mathbf{p}$ vektor és a síkot kifeszítő $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok által meghatározott paralelepipedon magassága: a térfogatot elosztjuk a síkkal párhuzamos alap területével, azaz

$$d = \frac{|\mathbf{v}\mathbf{w}(\mathbf{x}-\mathbf{p})|}{|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|}.$$

12.4. Feladat. *Alapul véve egy Descartes - féle koordinátarendszert a térben, töltse ki a táblázat hiányzó adatait.*

P	Q	R	$\mathbf{n}$	$Ax+By+Cz+D=0$
$(-2,1,1)$	$(6,4,1)$	$(-1,0,0)$		
$(-1,3,2)$			$5\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$	
				$6x+4y-3z+1=0$

12.5. Feladat. *Alapul véve egy Descartes - féle koordinátarendszert a térben, írja fel a $P(-1,3,2)$ pontra illeszkedő,*

$$\mathbf{v}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k},\quad \mathbf{w}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

vektorokkal párhuzamos sík egyenletét.

Az egyenes egyenletrendszere. Az euklideszi tér bármely egyenese megadható

(i) két különböző pontja segítségével (ld. illeszkedési axiómák),

(ii) egy pontja és egy *irányvektora*, azaz egy az egyenesen reprezentálható nemzérus vektor segítségével (ld. párhuzamossági axióma).

Az egyenes megadásának különböző módszerei között természetesen szoros kapcsolat van: ha ugyanis az egyenes P és Q pontja a rendelkezésünkre áll, akkor a (P, Q) irányított szakasszal reprezentált $\mathbf{v}$ vektor az egyenes irányvektora és viszont. Ha adott egy P pont és a $\mathbf{v}$ irányvektor, akkor az irányvektor P kezdőpontú reprezentánsának a végpontja az egyenes további pontja lesz.

Rögzítsünk egy affin koordinátarendszert, melynek kezdőpontja az O pont, koordinátavektorai pedig az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és a $\mathbf{c}$ vektorok. Tekintsük a $P \neq Q$ pontokra illeszkedő l egyenest és legyen $\mathbf{v}$ a (P, Q) reprezentánsú vektor, azaz

$$\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p},$$

ahol $\mathbf{p}$, illetve $\mathbf{q}$ rendre a P, illetve a Q pontok helyvektora a rögzített koordinátarendszerre vonatkozóan. Ekkor a következő kijelentések ekvivalensek:

(i) $R \in l$,

(ii) P, Q és R kollineáris,

(iii) a (P, Q) és a (P, R) reprezentánsú vektorok lineárisan függők (párhuzamosak), azaz

$$\mathbf{r} - \mathbf{p} = \lambda \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{r} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{v}$$

teljesül valamely λ valós szám mellett, ahol $\mathbf{r}$ az R pont helyvektora. A szóban forgó vektoregyenlet az egyenes paraméteres előállítása.

Az $\mathbf{r} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{v}$ vektoregyenlet az

$$\begin{aligned} x &= x_\circ + \lambda v_x \\ y &= y_\circ + \lambda v_y \\ z &= z_\circ + \lambda v_z \end{aligned}$$

egyenletrendszert adja, ahol x, y és z az R pont, $x_\circ$, $y_\circ$ és $z_\circ$ pedig a P pont koordinátái, míg

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{a} + v_y\mathbf{b} + v_z\mathbf{c}.$$

A λ paramétert az egyenlő együtthatók módszerével kiküszöbölve a

$$\begin{aligned} v_y x - v_x y &= v_y x_\circ - v_x y_\circ \\ v_z y - v_y z &= v_z y_\circ - v_y z_\circ \end{aligned}$$

irányvektoros egyenletrendszerhez jutunk. Szokásosabb írásmód az

$$\frac{x - x_\circ}{v_x} = \frac{y - y_\circ}{v_y} = \frac{z - z_\circ}{v_z}$$

egyenlőségsorozat, feltéve, hogy az irányvektor egyetlen koordinátája sem tűnik el. Ha például $v_x = 0$, de $v_y \neq 0$ és $v_z \neq 0$, akkor az

$$x = x_\circ \quad \text{és} \quad \frac{y - y_\circ}{v_y} = \frac{z - z_\circ}{v_z}$$

egyenletekből álló rendszert kapjuk, míg a $v_x = v_y = 0$, de $v_z \neq 0$ esetben egyenletrendszerünk az

$$x = x_\circ \quad \text{és} \quad y = y_\circ$$

alakra redukálódik. Mivel az irányvektor koordinátái egyszerre nem tűnhetnek el, valamennyi lényegesen különböző esetet áttekintettük. Jegyezzük meg, hogy a $\mathbf{v}$ vektor P kezdőpontú reprezentánsának végpontja Q, ezért

$$\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p} \quad \Rightarrow \quad v_x = x_1 - x_\circ, \quad v_y = y_1 - y_\circ \quad \text{és} \quad v_z = z_1 - z_\circ,$$

ahol x_1, y_1 és z_1 a Q pont koordinátái. Az egyenes egyenletrendszerében szereplő együtthatókat tehát – az egyenes megadásának módja szerint – tovább részletezhetjük.

12.5. Tétel. *Affin koordinátarendszert alapul véve, a tér egyeneseinek definiáló relációi két független egyenletet tartalmazó, azaz nemtriviális lineáris egyenletrendszerek.*

Bizonyítás. Gondolatmenetünket kiegészítendő vegyük észre, hogy ezek az egyenletrendszerek az egyeneseket síkok metszésvonalaként állítják elő – ez a tétel geometriai tartalma. ■

12.2. Megjegyzés. A tér pontjai és egyenesei közötti távolság kiszámítására a

$$d = \frac{|(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

irányvektoros formula áll a rendelkezésünkre.

12.6. Feladat. *Alapul véve egy Descartes - féle koordinátarendszert a térben, írja fel a*

(i) *a* $P(-1, 3, 2)$ *és a* $Q(2, 4, -1)$ *pontokra illeszkedő,*

(ii) *a* $P(-2, 3, 5)$ *pontra illeszkedő és* $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ *irányvektorú,*

(iii) *a* $P(-3, 6, 11)$ *pontra illeszkedő és a* $6x - 3y + z + 5 = 0$ *síkra merőleges*

egyenes egyenletrendszerét.

A térelemek kölcsönös helyzetét már a 4. Fejezetben áttekintettük. Emlékeztetünk rá, hogy a tér két egyenese lehet metsző, párhuzamos, vagy kitérő. A tér két síkja lehet metsző, vagy párhuzamos és ugyanez áll a tér egy egyenese és egy síkja esetében is. Természetes elvárás, hogy az alakzatok kölcsönös helyzetét definiáló relációik ismeretében is meg tudjuk határozni. Néhány egyszerű és a szemlélet alapján közvetlenül látható észrevételt teszünk:

(i) két egyenes pontosan akkor párhuzamos, ha irányvektoraik párhuzamosak (ekvivalens módon: közös egyenesen reprezentálhatók, illetve lineárisan függők), azaz vektoriális szorzatuk zérus,

(ii) két sík pontosan akkor párhuzamos, ha normálvektoraik párhuzamosak (ekvivalens módon: közös egyenesen reprezentálhatók, illetve lineárisan függők), azaz vektoriális szorzatuk zérus,

(iii) egy egyenes és egy sík pontosan akkor párhuzamos, ha az egyenes irányvektora merőleges a sík normálvektorára, azaz skaláris szorzatuk zérus.

12.7. Feladat. *Fogalmazza meg két sík, illetve egy egyenes és egy sík metszésének szükséges és elegendő feltételét.*

Az eddigiekből következik, hogy ha irányvektoraik vektoriális szorzata nem tűnik el, akkor a P pontra illeszkedő, $\mathbf{v}$ irányvektorú, illetve a Q pontra illeszkedő, $\mathbf{w}$ irányvektorú egyenesek metszők, vagy kitérők. A kérdést a $\mathbf{v}\mathbf{w}(\mathbf{q}-\mathbf{p})$ vegyesszorzat vizsgálatának segítségével dönthetjük el. A vegyesszorzat eltűnése ugyanis pontosan azt jelenti, hogy a $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ és a $\mathbf{q}-\mathbf{p}$ vektorok lineárisan függők. Esetünkben tehát

$$\mathbf{q}-\mathbf{p}=\lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{w} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{q}=\mathbf{p}+\lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{w}$$

teljesül valamely λ és μ valós szám mellett. A kapott vektoregyenlet az egyenesek közös síkjának paraméteres előállítása.

12.1. Következmény. *A P pontra illeszkedő,* $\mathbf{v}$ *irányvektorú, illetve a Q pontra illeszkedő,* $\mathbf{w}$ *irányvektorú egyenesek pontosan akkor kitérők, ha a* $\mathbf{v}\mathbf{w}(\mathbf{q}-\mathbf{p})$ *vegyesszorzat nem tűnik el. A kitérő egyenesek távolságát megkapjuk, ha a vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát elosztjuk az egyenesekkel párhuzamos alap területével:*

$$d=\frac{|\mathbf{v}\mathbf{w}(\mathbf{q}-\mathbf{p})|}{|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|}.$$

Térelemek hajlásszöge. A fejezet lezárásaképpen a térelemek hajlásszögének értelmezésével foglalkozunk. Egy metsző egyenespár az általa meghatározott síkot négy szögtartományra bontja. Ezek páronként egymás mellékszögei, vagy csúcsszögei. A *két egyenes szögén* a két csúcsszögpár közül a nem nagyobbnak a mértékét értjük [9]. Azt mondjuk, hogy a síkot metsző egyenes *merőleges* a síkra, ha merőleges a metszéspontra illeszkedő összes síkbeli egyenesre. *A síkra merőleges egyenes* tétele szerint azonban, ha a szóban forgó egyenes merőleges két egyenesre a metszéspontra illeszkedő egyenesek közül, akkor merőleges az összesre is. Szemléletesen nyilvánvaló, hogy a tér bármely pontjára illeszkedik egy és csak egy olyan egyenes, mely merőleges egy adott síkra. A sík és az egyenes metszéspontja a pont *merőleges vetülete* a síkon. A tér részhalmazainak merőleges vetületét a pontonkénti elv alapján értelmezzük. Egy *metsző egyenes és sík szögén* az egyenesnek és a síkba eső merőleges vetületének a szögét értjük. *Metsző síkok szögének* értelmezéséhez pedig válasszuk ki a metszésvonal egy pontját és tekintsünk egy - egy síkbeli egyenest, mely a kiválasztott pontban merőleges a metszésvonalra. Az egyenesek szögét a két sík szögének nevezzük. Ez független a pont megválasztásától, hiszen egyállású szögekről van szó. Kitérő egyenesek szögének az értelmezésére is lehetőség van, mégpedig olyan metsző egyenespár szögeként, melynek tagjai az eredeti egyenesekkel párhuzamosak (ld. párhuzamossági axióma). Párhuzamos egyenesek, illetve párhuzamos térelemek szöge – definíció szerint – nulla. A fogalomalkotás egyszerű következménye, hogy

(i) a $\mathbf{v}$, illetve a $\mathbf{w}$ irányvektorú egyenesek szöge a vektorok szögével, vagy mellékszögével egyezik meg aszerint, amint hegyes -, vagy tompaszögről van szó,

(ii) az $\mathbf{n}$, illetve az $\mathbf{m}$ normálvektorú síkok szöge megegyezik az $\mathbf{n}$,

[9] Ennek a megfogalmazásnak az előnye, hogy magában foglalja az egymásra merőleges egyenesek esetét is, amikor mind a négy szögtartomány mértéke ugyanakkora.

illetve az **m** irányvektorú egyenesek szögével,

(iii) a **v** irányvektorú egyenes, illetve az **n** normálvektorú sík szöge megegyezik a **v**, illetve az **n** irányvektorú egyenes szögének a pótszögével.

Végül pedig a vektorok szögének meghatározásáról lesz szó. Tekintsünk egy Descartes - féle koordinátarendszert és tegyük fel, hogy

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{w} = w_x\mathbf{i} + w_y\mathbf{j} + w_z\mathbf{k}.$$

Mivel **i**, **j** és **k** egymásra merőleges egységvektorok, ezért **v** és **w** skaláris szorzata

$$\mathbf{vw} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z,$$

a vektorok hossza pedig

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad \text{illetve} \quad |\mathbf{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}.$$

Figyelembe véve a skaláris szorzat értelmezését, a vektorok szögét a

$$\cos\alpha = \frac{v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}$$

képlet segítségével határozhatjuk meg, ha a szereplő vektorok egyike sem a zérusvektor. Korábbi megállapodásaink értelmében pedig a zérusvektorral bezárt szöget derékszögnek tekintjük.

12.8. Feladat. *Állapítsa meg az*

$$\frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z-3}{2}, \qquad \frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{4} = 2 - z$$

egyenletrendszerű egyenesek kölcsönös helyzetét.

12.9. Feladat. *Állapítsa meg az*

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+4}{3}$$

egyenletrendszerű egyenes és a $2x + 3y - z - 6 = 0$ *egyenletű sík kölcsönös helyzetét.*

12.10. Feladat. *Állapítsa meg a*

$$4x + 2y - 4z + 5 = 0, \quad 2x + y + 2z - 1 = 0$$

egyenletű síkok kölcsönös helyzetét.

12.11. Feladat. *Alapul véve egy Descartes - féle koordinátarendszert a térben, határozza meg az* $A(1,2,0)$, $B(4,0,0)$, $C(3,4,0)$ *és* $D(0,0,1)$ *csúcspontokkal rendelkező tetraéder*

(i) *élegyeneseinek egyenletrendszerét,*

(ii) *lapsíkjainak egyenletét,*

(iii) *él - és lapszögeit.*

Szintfelmérő dolgozat 2006/2007

1. Az x szög kiszámítása nélkül határozza meg $\sin x$ pontos értékét, ha ismert, hogy $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$!

2. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\sin 2x(\cos x + 1) + \sin x(\cos 2x - 5) = 0$$

egyenletet!

3. Határozza meg a c paraméter értékét úgy, hogy az $x + 3y = c$ egyenletű egyenes érintse az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kört!

4. Két, egymást derékszögben metsző egyenesen egy - egy pont mozog a metszéspont felé állandó sebességgel. Az A pont sebessége $4\frac{m}{s}$, míg a B ponté $2\frac{m}{s}$. Egy adott időpontban az A pont 40 méterre, a B pont pedig 30 méterre van a metszésponttól. Ettől a pillanattól számítva mennyi idő múlva lesz a két pont egymáshoz legközelebb és mekkora ez a minimális távolság?

5. Ismeretes, hogy ha egy ponton át szelőt húzunk egy körhöz, akkor a ponttól a metszéspontokig terjedő szakaszok hosszának szorzata nem függ a szelő megválasztásától. Számítsa ki ezt az állandót az

$$x^2 + y^2 - 16x - 4y + 43 = 0$$

egyenletű kör és a $P(1, 3)$ pont esetében!

Szintfelmérő dolgozat 2007/2008

1. A valós számok mely legbővebb részhalmazán értelmezhető az

$$\frac{1}{\sin x - 1}$$

kifejezés?

2. Oldja meg a valós számok halmazán az

$$x \cos \frac{1}{x} = 0$$

egyenletet!

3. Ha egy kocka éleit 4 centiméterrel megnöveljük, akkor felszíne 480 négyzetcentiméterrel nő. Mekkora az eredeti kocka térfogata?

4. Két, egymást nem metsző kör középpontjának a távolsága 12. A közös belső érintőszakaszuk hossza $4\sqrt{3}$, a közös külső érintőszakaszuk hossza $2\sqrt{35}$. Számítsa ki a körök sugarát!

5. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, mely illeszkedik a $P(3,6)$ pontra és az $O(3,0)$ ponttól mért távolsága két egység!

Megoldások

1. Tudjuk, hogy
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$
Az egyenlet mindkét oldalát emeljük négyzetre és rendezzünk:
$$4\sin^2 x = \cos^2 x.$$
A trigonometrikus Pitagorasz - tétel szerint $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, s így az
$$5\sin^2 x - 1 = 0$$
egyenlethez jutunk. Innen $\sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. A periódus többszörösétől eltekintve az első síknegyedben a pozitív, míg a harmadik síknegyedben a negatív érték lép fel a szög tangensének rögzített értéke mellett. Ez azt jelenti, hogy mindkét érték lehetséges.

2. A kétszeres szögekre vonatkozó
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x,$$
illetve
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
trigonometrikus azonosságok alapján szorzattá alakítva:
$$\sin x(3\cos^2 x + 2\cos x - \sin^2 x - 5) = 0.$$
Ha $\sin x = 0$, akkor $x = k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Ellenkező esetben pedig oldjuk meg az
$$3\cos^2 x + 2\cos x - \sin^2 x - 5 = 0$$

egyenletet. A trigonometrikus Pitagorasz - tételt felhasználva az $y = \cos x$ változóban másodfokú

$$2y^2 + y + 3 = 0$$

egyenletet nyerjük. Innen $\cos x = 1$, vagy $\cos x = -\frac{3}{2}$, de az utóbbi nyilván nem ad megoldást, míg $\cos x = 1$ esetén $\sin x = 0$, vagyis az első esethez képest új megoldásokat itt sem kapunk. Az ekvivalens átalakításokra tekintettel az $x = k\pi$ alakú valós számok az eredeti trigonometrikus egyenlet megoldásai.

3. Helyettesítsük az $x = c - 3y$ kifejezést a kör egyenletébe:

$$10y^2 - 6cy + c^2 - 25 = 0.$$

Az érintés szükséges és elegendő feltétele az, hogy az y változóban másodfokú egyenlet diszkriminánsa zérus legyen, azaz

$$9c^2 - 10(c^2 - 25) = 0,$$

ahonnan $c = \pm 5\sqrt{10}$.

4. Az adott időpillanatban az A pont koordinátái $(40, 0)$, a B pont koordinátái pedig $(0, 30)$. Ettől a pillanattól számítva t idő múlva a pontok koordinátái rendre

$$(40 - 4t, 0), \quad \text{illetve} \quad (0, 30 - 2t);$$

a távolság pedig

$$d(t) = \sqrt{(40 - 4t)^2 + (30 - 2t)^2}.$$

Elegendő a négyzetgyök alatt álló kifejezés minimumát megkeresni:

$$20t^2 - 440t + 2500 = 20(t^2 - 22t + 125).$$

A zárójeles kifejezést

$$(t-11)^2+4$$

alakba írva $t=11$ és a minimális távolság:

$$d(11)=4\sqrt{5}.$$

5. Hozzuk a kör egyenletét kanonikus alakra:

$$(x-8)^2+(y-2)^2=25.$$

A koordináták behelyettesítésével meggyőződhetünk róla, hogy P külső pontja a körnek. A P pont és a kör középpontja által meghatározott egyenes olyan pontokban metszi a körvonalat, melyek P - től vett távolsága rendre

$$d(P,O)-r, \text{ illetve } d(P,O)+r,$$

ahol O a kör középpontját, r pedig a sugarát jelöli. Figyelembe véve, hogy $r=5$ és $d(P,O)=\sqrt{50}$, a szóban forgó állandó értéke

$$(\sqrt{50}+5)(\sqrt{50}-5)=50-25=25.$$

- - - - - - - - - -

1. A valós számok közül ki kell zárnunk a nevező zérushelyeit, azaz

$$\sin x-1\neq 0.$$

A szóban forgó kifejezés értelmezési tartománya tehát az

$$\{\ x\in\mathbb{R}\mid x\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\ \}$$

halmaz.

2. Egy szorzat értéke pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Az egyenlet bal oldalán álló kifejezés értelmezési tartománya azonban a nemzérus valós számok halmaza, ezért elegendő a

$$\cos\frac{1}{x} = 0$$

egyenletet megoldanunk. A koszinuszfüggvény zérushelyei az

$$y = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

alakú valós számok, ahonnan

$$x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

következik.

3. Jelölje x a kocka élének hosszúságát. A feltételekből

$$6(x+4)^2 = 6x^2 + 480.$$

Négyzetre emelés és rendezés után

$$6(x^2 + 8x + 16) = 6x^2 + 480,$$

$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 80,$$

$$8x + 16 = 80,$$

$$x + 2 = 10,$$

$$x = 8$$

következik. A kocka térfogata tehát $V = 512\ \mathrm{cm}^3$.

4. A belső érintőszakasz hosszát és a körök középpontjainak távolságát felhasználva
$$(R+r)^2 + (4\sqrt{3})^2 = 12^2$$
írható. A külső érintőszakasz hosszát felhasználva pedig
$$(R-r)^2 + (2\sqrt{35})^2 = 12^2.$$
Vegyük észre, hogy a második egyenletünk kizárja a körök sugarainak egyenlőségét és az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy $R > r$. Kapjuk tehát, hogy
$$R + r = 4\sqrt{6} \ \text{ és } \ R - r = 2.$$
Innen pedig $R = 1 + 2\sqrt{6}$ és $r = 2\sqrt{6} - 1$.

5. Írjuk fel az $O(3,0)$ középpontú 2 egység sugarú kör egyenletét:
$$(x-3)^2 + y^2 = 4.$$
A feladat megoldását a $P(3,6)$ pontra illeszkedő, a körhöz érintőleges egyenesek adják. Mivel a megadott pontok távolsága 6, Pitagorasz tételével könnyen meghatározható a $P(3,6)$ pont és az érintési pontok d távolsága:
$$6^2 = 2^2 + d^2 \ \Rightarrow \ d = 4\sqrt{2}.$$
Most már csupán az
$$(x-3)^2 + y^2 = 4 \ \text{ és a } \ (x-3)^2 + (y-6)^2 = 32$$
körök metszéspontjait kell megtalálnunk. A két egyenletet kivonva egymásból
$$y_1 = y_2 = \frac{2}{3} \ \text{ és } \ x_1 = 3 + \frac{4}{3}\sqrt{2}, \ \text{ illetve } \ x_2 = 3 - \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

következik. A keresett egyenesek irányvektorai

$$v_1(\sqrt{2}, -4) \quad \text{és} \quad v_2 = (\sqrt{2}, 4).$$

A keresett egyenesek egyenletei rendre:

$$4x + \sqrt{2}y = 12 + 6\sqrt{2} \quad \text{és} \quad 4x - \sqrt{2}y = 12 - 6\sqrt{2}.$$

Hivatkozások

[1] T. M. Apostol, *Irrationality of the Square Root of Two – A geometric Proof*, Amer. Math. Monthly, November 2000, 841 - 842.

[2] V. T. Baziljev és K. I. Dunyicsev, *Geometria I*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.

[3] Dragálin Albert és Buzási Szvetlána, *Bevezetés a matematikai logikába*, Kossuth Egyetemi kiadó, Debrecen, 1986.

[4] Hajós György, *Bevezetés a geometriába*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1962.

[5] Kalmár László, *A Bolyai - Lobacsevszkij - féle geometria hatása az axiomatikus módszer fejlődésére*, Természet Világa 2003. I. Különszám.

[6] Pogáts Ferenc, *Vektorok, koordinátageometria, trigonometria*, TYPOTEX, Budapest, 1998.

[7] Prékopa András, *Bolyai János forradalma*, Természet Világa 2003. I. Különszám.

[8] Reiman István, *Geometria és határterületei*, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft., Kisújszállás, 1999.

[9] G - C. Rota, *The number of partitions of a set*, Amer. Math. Monthly 71 (5), 1964, 498 - 504.